МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЦ УНЦ РАН
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛЕОНТЬЕВ АЛЕКСЕЙ ФЕДОРОВИЧ

(1917 – 1987)

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И ВКЛАД В НАУКУ

К столетию со дня рождения

УФА
РИЦ БашГУ
2017

УДК 517.5
ББК 22.161.5
Л47

Печатается по решению Оргкомитета международной конференции, посвященной 100-летию А. Ф. Леонтьева

Издание осуществлено при финансовой поддержке Академии наук Республики Башкортостан

Леонтьев Алексей Федорович: основные направления исследований и вклад в науку / Сост. А.М. Гайсин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2017. — 40 с.

ISBN 978-5-7477-7377-9

Издание содержит вступительную статью составителя о жизни, научно-организационной и педагогической деятельности выдающегося советского математика, основателя уфимской школы по теории функций, члена-корреспондента АН СССР Алексея Федоровича Леонтьева (1917 – 1987). Работа включает обзор его наиболее важных научных результатов, обогативших отечественную и мировую науку, а также список печатных трудов.

Для специалистов по теории функций, а также исследователей, работающих в смежных областях анализа, преподавателей, аспирантов математических специальностей университетов.

УДК 517.5
ББК 22.161.5

ISBN 978-5-7477-7377-9

ПОРТРЕТ УЧЕНОГО

ОСНОВОПОЛОЖНИК УФИМСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ[1] (к столетию со дня рождения)

27 марта 2017 г. исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося советского математика, основоположника уфимской школы по теории функций, члена-корреспондента АН СССР Алексея Федоровича Леонтьева. Солидный научно-технический потенциал республики, особенно высококвалифицированных кадров по математике, так или иначе связан с его именем. Итог деятельности ученого в Уфе — Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, его детище — единственный академический институт математики среди областей Поволжья. А история института начинается с 1971 г., когда по приглашению руководства Башкирии А.Ф. Леонтьев с группой учеников[2] приехал в Уфу, имея перед собой конкретную программу: организовать в Башкирском филиале АН СССР (БФАН СССР) математические исследования на самом современном уровне и привлечь к этим исследованиям талантливую молодежь. В то время в республике не было ни одного доктора наук по математике. В год приезда Алексея Федоровича в Уфу в составе БФАН СССР был организован Отдел физики и математики (ОФМ) и создан сектор теории функций, а в 1972 г. в Башкирском государственном университете была образована кафедра теории функций и функционального анализа, которыми он и руководил до последнего дня своей жизни.

В рамках журнала (Вестник АН РБ. — *А.Г.*), рассчитанного для широкого круга читателей, нет возможности остановиться на содержании научных исследований Алексея Федоровича. Такая задача и не ставится. Тут важно другое. Хочется поговорить о нем не только как о видном ученом, но и как о педагоге, просто о человеке. Его многогранной деятельности в Башкирии в свое время была дана краткая, но исчерпывающая характеристика в одном из престижных математических журналов:

«За шестнадцать лет пребывания в Уфе Алексей Федорович проделал поразительную по своим масштабам работу. Он получил огромное

[1]Опубликовано в: Вестник Академии наук Республики Башкортостан. 2017. Том 22. №1. С. 94 – 101. Здесь текст статьи печатается с некоторыми уточнениями и без иллюстраций.

[2]В.П. Громовым, Ю.Н. Фроловым, И.Ф. Красичковым-Терновским и В.В. Напалковым. — *А.Г.*

количество превосходных научных результатов, написал четыре книги, на современном уровне организовал преподавание математических курсов, создал аспирантуру, городской научный семинар, подготовил большую группу кандидатов и докторов наук, периодически проводил всесоюзные симпозиумы по теории функций, организовал совет по защитам диссертаций. В итоге в Башкирии создана и активно действует мощная математическая школа, имеющая высокий всесоюзный и международный авторитет. Без всякого преувеличения весь этот подвижнический труд Алексея Федоровича можно расценить как научный подвиг» [1, с. 177 — 178].

Удивительно плодотворным оказался этот уфимский период и для него самого: именно здесь были получены важнейшие результаты по представлению аналитических функций рядами экспонент и более общими рядами. Подытоживая свои исследования, здесь он написал монографии «Ряды экспонент» (1976), «Последовательности полиномов из экспонент» (1980) и «Обобщения рядов экспонент» (1981), которые позже были удостоены Государственной премии СССР (1989).

На первый взгляд, биография простого сельского паренька, ставшего крупным ученым с мировым именем, может показаться хрестоматийной. Однако жизнь и деятельность Алексея Федоровича удивительна и поучительна. Однажды на кафедре ему был задан вопрос о том, кто же на самом деле «движет науку». Чуть подумав, он ответил: «Все-таки отдельные личности». Нет сомнений, что одним из таких избранных был и сам Алексей Федорович.

Он родился в 1917 г. в селе Яковцево Вачского района Нижегородской области тринадцатым, последним ребенком в крестьянской семье Надежды Ивановны и Федора Харитоновича. Работала вся семья, и дети с ранних лет приучались к труду. Алексей Федорович с детства знал, что «хлеб добывается только в поте лица». Родители воспитали в своих детях не только трудолюбие. В этой дружной семье царила удивительная атмосфера взаимного уважения, очень ценились знания, образованность. В доме имелась своя небольшая библиотека. У Леонтьевых был и домашний хор! Руководил старший брат Василий с сильным красивым тенором («как у Козловского») [2, с. 22].

В 1926 г. на семью обрушилось горе — умер отец. Вскоре от сердечной астмы слегла и умерла мать. Трудную ношу — поставить на ноги младших, дать им выучиться — взвалили на себя старшие [2, с. 22], [3, с. 104][1]. В 1929 г., окончив в своем селе школу первой ступени, Алексей

[1]В автобиографии Алексей Федорович пишет: «Мои родители (отец умер в 1926 году, мать

Федорович продолжил учебу в Дзержинске, а затем в Горьком — там в ту пору работали его братья Василий и Иван.

В 1934 г., после окончания 9 классов, он поступает на физико-математический факультет Горьковского университета, затем, окончив университет с отличием, — в аспирантуру. Научный руководитель — профессор Иван Романович Брайцев, создавший в университете школу по теории аналитических функций, был такого мнения о своем аспиранте: «Еще в бытность свою студентом ГГУ тов. Леонтьев проявил блестящие математические способности... Тов. Леонтьев специализируется по обыкновенным дифференциальным уравнениям, и в этой области он проявляет большие успехи... Я уверен, что при своих блестящих математических дарованиях и выдающемся интересе [к математике]... тов. Леонтьев добьется больших успехов в математических исследованиях...» [2, с. 22].

О некоторых штрихах из жизни Алексея Федоровича в годы аспирантуры вспоминает к.х.н. И.Г. Сумин: «С 1939 г. с Алексеем жили в одной комнате общежития, еду готовили вдвоем. И как трудно ни было, отношения между нами были дружескими. Заниматься приходилось чаще всего в красном уголке общежития... Алексей Федорович успешно сдал экзамены, подготовил диссертацию. Но началась война. Мы вступили в народное ополчение. Занимались строевой подготовкой, ездили в колхозы области убирать урожай. С осени 1941 г. до марта 1942 г. строили оборонительные рубежи вокруг Горького» [3, с. 106].

В августе 1942 г. Алексей Федорович успешно защищает кандидатскую диссертацию «Дифференциально-разностные уравнения» и направляется на постоянную работу в волжский городок Козьмодемьянск в Марийский педагогический институт, где сначала был доцентом, а затем заведующим кафедрой математического анализа. В трудные военные годы, совмещая педагогическую деятельность, он активно занимается и наукой. А условия жизни были нелегкими: не хватало всего — не было не только электричества, но и керосина. Заниматься и готовиться к лекциям приходилось около раскрытой дверцы печки, при мерцающем свете углей. А когда прогорали и они, оставалось только прокручивать сложные математические выкладки перед мысленным

умерла в 1936 году) до революции и после революции занимались крестьянством. В 1925 году поступил учиться в первый класс в своем селе» [4, л. 5]. В графе анкеты о своем социальном происхождении он отмечает, что «сын крестьянина» [4, л. 3]. Неудивительно, что Алексей Федорович часто интересовался тем, как заготавливают сено в Башкирском Зауралье. Он знал, сколько «пудов сена» требуется на зиму для коровы. Рассказывал также, что для заготовки сена вся семья переправлялась за Оку на пойменные луга, погружая на лодки косы, вилы, самовары... , одним словом, все необходимое. — *А.Г.*

взором (однажды, вспоминая об этом, он как-то шутя, но не без удовлетворения произнес, что «ни разу не попался (не попал впросак. — *А.Г.*) во время лекций!»). Именно в эти годы А.Ф. Леонтьев закалился как математик, воспитал в себе умение проводить большую умственную работу без карандаша и бумаги, готовиться к лекциям и размышлять над задачами в уме. Этой способностью Алексей Федорович всегда приводил в восхищение своих коллег и учеников...

В 1945 г. он переезжает в Москву, поскольку был принят в докторантуру при Математическом институте имени В.А. Стеклова — крупнейшем математическом центре страны[1]. Общение с крупнейшими учеными страны, среди которых были академики М.В. Келдыш, И.М. Виноградов, М.А. Лаврентьев, А.Н. Колмогоров, П.С. Александров, систематическая работа в научных семинарах, публичные выступления с докладами — все это благотворно повлияло на молодого докторанта. Хотя бытовые условия в Москве не стали легче, Алексей Федорович настойчиво и целеустремленно занимается наукой. А жить приходилось вшестером в тесной комнате, где люди спали не только на кроватях, но и на столах, и, как говорил Алексей Федорович, докторскую диссертацию приходилось писать и оформлять при свете керосиновой лампы, используя вместо стола... табуретку.

19 февраля 1948 г. состоялась блестящая защита докторской диссертации «О классе функций, определенных рядами полиномов Дирихле». Официальные оппоненты М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев и А.И. Маркушевич признали работу А.Ф. Леонтьева выдающейся.

После защиты диссертации Алексей Федорович заведует кафедрой теории функций Горьковского университета, а в 1954 г. переезжает в Москву. Сначала он заведует кафедрой высшей математики, затем кафедрой специальных курсов высшей математики Энергетического института, а с 1962 г. местом его основной работы становится Математический институт имени В.А. Стеклова.

В 1970 г. Алексей Федорович был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1971 г., как уже было сказано, приезжает в Уфу, где возглавляет созданный им сектор теории функций в ОФМ, а по совместительству — кафедру теории функций и функционального анализа в

[1]По словам Алексея Федоровича, в Козьмодемьянске он получал неплохую по тем временам зарплату. Тем не менее, приглашение в докторантуру было принято, но не без настойчивости... жены и верной спутницы Марьи Григорьевны: это она собрала его работы и послала в столицу. Она и решительно заявила тогда: «Лёша, едем в Москву!». На прощании студенты в знак признательности преподнесли Алексею Федоровичу, как он говорил, «дорогой подарок — кисет с махоркой» — *А.Г.*

Башкирском университете. С этого момента у него начинается особый этап жизни, связанный с нашей республикой. Годы пребывания Алексея Федоровича в столице Башкирии оказались необыкновенными и для его окружения: в уфимской среде сложилась удивительно благоприятная обстановка для своеобразного общения и математического творчества — особенно для молодежи. Не забудем, что Алексей Федорович был талантливым педагогом и воспитателем. Кроме того, он сам обладал редкими душевными качествами: исключительная скромность, доброжелательность и деликатность сочетались в нем с твердостью характера и необыкновенной принципиальностью, деловые качества — с завидной порядочностью, громадная работоспособность — с глубоким уважением к чужому труду.

Педагогическая деятельность А.Ф. Леонтьева оказала большое влияние на повышение уровня и культуры преподавания математики в университете и в других вузах, в т.ч. и втузах республики. А на кафедре теории функций и функционального анализа образовалась особая творческая атмосфера, бережное, исключительно внимательное отношение к молодежи. Индивидуальная работа со способными студентами всегда была наиболее важным направлением деятельности кафедры. Неудивительно, что эта небольшая кафедра со временем стала поистине кузницей высококвалифицированных кадров по математике. Результат налицо: за сравнительно небольшой срок 25 выпускников кафедры защитили кандидатские диссертации, в основном, по математическому анализу (речь идет о середине 1980-х гг., а в настоящее время их более 60! — *А.Г.*).

Как отмечалось, Алексеем Федоровичем была создана авторитетная научная школа по теории функций: среди его учеников 35 кандидатов наук[1], из которых А.А. Миролюбов, В.П. Громов, Ю.Н. Фролов, И.Ф. Красичков-Терновский, В.В. Напалков, А.М. Седлецкий, А.М. Гайсин являются наиболее известными специалистами — докторами наук.

Алексей Федорович никогда не придавал большого значения своей персоне, хотя вполне осознавал важность своих идей для развития математики. Эта уверенность шла от сопоставления своих результатов с достижениями других ученых. Его знали и за рубежом, на его работы ссылались многие ведущие иностранные учение, в т.ч.: Я. Коревар, М. Диксон, Ж. Сиддики, А. Байет, П. Маллявен, Р. Зейнстра и др. С некоторыми из них ему довелось общаться и лично. Алексей Федорович за

[1]По другим сведениям — 36 кандидатов наук, в том числе и А.А. Рябинин (1946 – 2003), который в 1999 г. защитил докторскую диссертацию.

рубежом представлял Советский Союз в ряде крупнейших форумов — международных конгрессах математиков в Стокгольме (1962), Москве (1966), Ванкувере (1974), Хельсинки (1978). Он принимал самое деятельное участие и в работах авторитетных международных конференций в Австрии, Венгрии, Болгарии, регулярно выступал с лекциями в Международном математическом центре имени С. Банаха в Варшаве[1].

В статье одного из наших коллег говорилось: «Алексей Федорович был крупным ученым. Но мне хочется называть его Учителем, поскольку он выводит в жизнь следующее поколение, вооружая его не только знаниями и теорией — в каждом ученике воспитывает человечность, доброту, порядочность. Имя Учителя хранят в памяти вместе с именами отца и матери. Алексей Федорович был именно таким...

Что я считаю главным в личности Алексея Федоровича? Без сомнения, его удивительный демократизм в общении. Но его демократизм не представлял лишь внешнюю простоту, желание всеми средствами завоевать популярность — нет, он был его природной чертой, имел корни в глубокой человечности... Он был демократичен, однако не упрощал отношения, с подчиненными оставался подчеркнуто вежлив; был добрым, внешне даже мягким — и в то же время исключительно принципиальным; был энергичным, деловым, деятельным — но при этом не добивался выигрыша для себя ценой чьих-то неприятностей, отличался редкой порядочностью. Он был глубоко предан науке, обладал талантом сам и любил талантливых учеников, но никогда не делил людей «по сортам» согласно степени математической одаренности, малейшим намеком не задевал чужого достоинства. Всего себя отдавал математике, даже во время прогулок размышлял над выкладками, но оставался на удивление чутким и внимательным — формулы не заслоняли ему живых людей с их человеческими заботами... Душевная его мудрость – исконная черта, всегда отличавшая настоящих русских интеллигентов.

Я не погрешу против истины, сказав, что Алексей Федорович был моральным эталоном для всех, кто работал вместе с ним. Одной лишь силой своего нравственного воздействия он достигал того, что люди работали с полной отдачей. Потому что находиться рядом с ним и работать спустя рукава — было просто невозможно...» [5, с. 3].

[1]В анкете Алексея Федоровича имеется запись о том, что в сентябре 1956 г. он был в Австрии «в составе делегации на математическом конгрессе» [4, л. 4]. Ближайшие международные конгрессы математиков состоялись в Амстердаме (1954), Эдинбурге (1958). Видимо, он имел в виду конференцию или конгресс иного ранга. Он выезжал в Будапешт и «по делам редколлегии» советско-венгерского журнала «Analysis Mathematica».

Шестнадцать лет каждую неделю по вторникам на математическом факультете проходили заседания городского семинара по теории функций. Сюда собирались сотрудники филиала Академии наук, преподаватели университета и других вузов, часто приезжали с докладами иногородние и иностранные специалисты. И, конечно же, посещали его аспиранты, студенты. И для многих этот семинар стал отправным пунктом в науку. За короткий срок усилиями Алексея Федоровича и его соратников мало кому известный вне пределов республики факультет университета сформировался как математический в полном смысле этого слова и приобрел широкую известность. А ядро научно-педагогических кадров факультета составили выпускники кафедры теории функций и функционального анализа — воспитанники уфимской школы по теории функций, основоположником которой и был А.Ф. Леонтьев[1]. Это был человек, в течение каких-то 10 – 15 лет сумевший перевернуть все закоренелые представления о математической науке и уровне ее преподавания!

Перед юбилеем, 24 марта 1987 г., Алексею Федоровичу его ученики преподнесли картину известного горьковского художника Б.Л. Бочкарева, на которой изображены его родные места: река Ока, пристань Пожога, гора Сапун... Алексей Федорович очень любил эти места, приезжал сюда почти каждое лето... А через три недели его не стало. И впервые за 16 лет заседание городского семинара по теории функций не состоялось — это произошло во вторник, 14 апреля 1987 г. — в день его кончины. Подобно Эйлеру, Алексей Федорович «перестал вычислять и жить[2]» [6, с. 17].

Невысокий ростом, со светлым открытым лицом, чуть склоненной к плечу головой, словно весь погруженный в мир математики, а может быть, просто размышляющий о чем-то другом — не менее важном, вечном... Таким и остался в нашей памяти Алексей Федорович.

В начале июня 1987 г. состоялся очередной всесоюзный симпозиум по теории функций. Как и два предыдущих (они состоялись в 1976 и 1980 гг.), он был организован по инициативе А.Ф. Леонтьева. В конце марта ему исполнилось 70 лет, и было принято решение чествовать его в окружении учеников и приглашенных ученых. Но предстоящему симпозиуму суждено было стать симпозиумом памяти...

[1]К сожалению, кафедра теории функций и функционального анализа — базовая кафедра Института математики, — основанная и руководимая в 1972 – 1987 гг. членом-корреспондентом АН СССР А.Ф. Леонтьевым, а в 1987 – 2015 гг. — членом-корреспондентом РАН В.В. Напалковым, прекратила существование как самостоятельная единица.

[2]Слова секретаря Французской академии наук маркиза Кондорсе, относящиеся к Л. Эйлеру.

Приведем высказывания некоторых участников этого форума.

Ю.Н. Фролов, профессор Энергетического института, ученик А.Ф. Леонтьева (Москва): «Мы знали друг друга более 40 лет, я был еще школьником, когда с ним познакомился... Алексей Федорович был человеком редкого природного таланта. По-видимому, это все-таки было врожденное качество у него — способность к математическим исследованиям. Кроме того, он был большим тружеником, обладал редким умением работать в любых условиях. Интересно, что летом во время отпуска Алексей Федорович «отдыхал» самым странным, на посторонний взгляд, образом — решал задачи (самые серьезные и, как правило, перспективные. — *А.Г.*), тем самым закладывая фундамент дальнейших исследований» [7, с. 3]. Именно научные результаты, полученные на своей московской даче летом, он и докладывал осенью на первом же заседании своего семинара в университете. И действительно, они порождали новые задачи, его идеи сразу же подхватывались коллегами, учениками. Вскоре о новых достижениях уфимцев узнавали и в других научных центрах страны – по публикациям в академических журналах... Так происходило непрерывное развитие математической науки в Уфе, из года в год. Двигателем этого процесса, несомненно, был сам основатель уфимской школы Алексей Федорович Леонтьев, чьи исследования обогатили и мировую математическую науку.

Кто знаком с его работами, несомненно, оценили не только его глубокие и фундаментальные результаты и исключительное аналитическое мастерство, но и чрезвычайную четкость доказательств, умение сделать понятными и идею, и детали самых сложных рассуждений. По мнению коллег и всех учеников, лекции Алексея Федоровича всегда были поучительными и представляли собой великолепный пример доступного, в то же время умелого сочетания высокого научного уровня с простотой изложения. В научных статьях он излагал свои идеи и доводы также кратко и ясно, по существу, а в геометрических рассуждениях умел обходиться без чертежа, прибегая к лаконичному словесному описанию...

Научные сочинения Алексея Федоровича привлекательны тем, что они отличаются прозрачностью идей, простотой рассуждений, а результаты, по признанию многих, поражают глубиной и законченностью. Сказанное вряд ли полно, ибо они обладают еще одним важным достоинством — красотой, главным критерием, без которого, по словам Г. Харди, «в мире нет места... математике» [8, с. 67 – 68]. Это, прежде всего, исключительно тонкая и изящная «теорема о стирании особенностей»; удивительные по красоте теоремы о «квазианалитической продолжаемости и непродолжаемости» и др. Конечно, присущие теоремам Алексея Федоровича легкость и простота только кажущиеся, а изысканность, изящество достигнуты благодаря таланту и повседневному рутинному труду ученого. Возможно, «определить математическую красоту очень трудно, но то же самое можно сказать и о красоте любого рода: мы не знаем с абсолютной точностью, что подразумевается под красивой поэмой, но это не мешает нам распознать ее при чтении» [8, с. 68]. И еще: «Математики, подобно художнику или поэту, создают образы, они состоят из идей. Создаваемые математиками образы, подобно образам художника и поэта, должны обладать красотой; подобно краскам и словам, идеи должны [обладать] внутренней гармонией» [8, с. 67]. Нельзя не согласиться и с мнением Г. Харди о том, что математические образы долговечнее, ибо они основаны на более существенных идеях. Эти наблюдения и выводы известного английского математика как нельзя лучше подходят при оценке работ Алексея Федоровича: они актуальны до сих пор и, как правило, имеют эстетическую привлекательность, а подробное изучение его даже самых глубоких в идейном плане теорем и конструкций, хотя и требуют немалых усилий, непременно вызывают истинное чувство восхищения красотой. Сам он трепетно относился и к произведениям искусства, любил классическую музыку, восхищался Ф.И. Шаляпиным, обожал творчество И.С. Козловского.

Приведем высказывание еще одного участника симпозиума по теории функций 1987 г. Б.Я. Левина, профессора Харьковского университета, крупнейшего специалиста по теории целых функций: «Уфимская математическая школа — молодая. Алексей Федорович обладал притягательной силой для молодых, он настолько увлек их своей любимой наукой, что уже через несколько лет после появления Леонтьева в Уфе заговорили о большой серьезной группе математиков: результаты исследований с самого начала были удивительными. И хотя Леонтьев работал, главным образом, в области теории функций, он дал мощный толчок развитию в республике математики вообще... Думаю, настало время, когда в Уфе можно открыть математический институт» [7, с. 3].

Ю.Н. Фролов: «Математический институт — давняя мечта Алексея Федоровича, и будет просто замечательно, если она сбудется»[1] [7, с. 3].

[1]В своем письме от 24 ноября 1986 г., адресованном в Башкирский обком партии, аргументируя необходимость создания в Уфе института математики, А.Ф. Леонтьев особо подчеркивает

И мечта его сбылась: в тот же год на базе ОФМ был образован математический институт, а в феврале 1988 г. официально открыт Институт математики с вычислительным центром, первым директором которого был избран профессор В.В. Напалков, ученик А.Ф. Леонтьева. Он и руководил институтом до конца 2015 г.

Все помнят слова первого секретаря Башкирского обкома М.З. Шакирова на церемонии прощания с Алексеем Федоровичем: «Дело моей чести выполнить последнюю волю Леонтьева». Он, очевидно, имел в виду обращение А.Ф. Леонтьева о целесообразности создания столь важного для республики академического института математики. Дело еще и в том, что 13 апреля Алексей Федорович был принят в обкоме партии, где ему, ровеснику Октября, был вручен орден Октябрьской революции. Мидхат Закирович оказал ему теплый прием, где в непринужденной обстановке состоялся разговор и о создании института. Алексей Федорович был, очевидно, тронут вниманием со стороны высшего руководства и взволнован... На следующий день его не стало.

Первый секретарь был человеком дела, слова на ветер не бросал. Вскоре появилось постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР (от 26 сентября 1987 г.), которое фактически и решало вопрос об учреждении Института математики с вычислительным центром в составе Башкирского научного центра.

С тех пор прошло 30 лет. Математики Уфы, представляющие несколько ведущих направлений, внесли серьезный вклад не только в развитие математической науки, но создали и солидный научный потенциал для республики. Представителями школы А.Ф. Леонтьева были полностью решены ряд крупных задач мирового уровня: проблемы Эренпрайса и Полиа, проблема, связанная с «фундаментальным принципом Эйлера» и др. Эти достижения получили известность в научном мире. Все это благодаря наличию в Уфе серьезной и авторитетной школы по комплексному анализу, которую создал и поднял на высокий международный уровень выдающийся математик А.Ф. Леонтьев. Это — знаковая фигура для всей уфимской математики, с которой связана целая эпоха становления и развития математической мысли, представляющей собой естественное переплетение всех ее направлений.

Заключая рассказ о нашем учителе, хочется сказать еще о том, что

значение фундаментальных исследований по математике для успешного развития промышленности, НИИ, вузов и втузов республики. «Имеющийся в Отделе коллектив математиков фактически уже выполняет функции института», — пишет он. Это письмо основывалось на решении комиссии Отделения математики АН СССР, возглавляемой академиком С.М. Никольским, которая еще в мае 1986 г. дала высокую оценку работе математических подразделений ОФМ.

Алексей Федорович добросовестно относился и к своим общественным обязанностям. Многие годы он был членом и заместителем председателя экспертной комиссии при ВАК. Работал в специализированных советах, более пятнадцати лет состоял членом редколлегии журнала «Математические заметки», был членом редколлегии советско-венгерского журнала «Analysis Mathematica», работал заместителем председателя правления Башкирского отделения общества «Знание».

Алексей Федорович обладал редкими человеческими качествами. Исключительно скромный, деликатный, доброжелательный, неутомимый труженик, он был примером внимательного и доброго отношения к окружающим.

В конце мая 2017 г. в Уфе будет проходить Международная конференция по теории функций, посвященная столетию со дня рождения А.Ф. Леонтьева. Самым естественным и логическим завершением дела его памяти было бы присвоение имени А.Ф. Леонтьева и ныне успешно действующему в Уфе Институту математики. Это, прежде всего, нужно молодому, подрастающему поколению исследователей как символ почти полувековой, самой светлой эпохи уфимской математики. В духе времени было бы и создание в Башкирском госуниверситете совместной научно-исследовательской лаборатории по теории функций (или теории приближений) его же имени, где продолжительное время руководили базовой кафедрой Института математики А.Ф. Леонтьев и его ближайший ученик В.В. Напалков.

А.М. Гайсин *Уфа, 2017 г.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Алексей Федорович Леонтьев // Успехи математических наук. 1987. Т. 42. Вып. 5 (257). С.177 – 182.

[2] Филиппов В.Н. Математик тоже художник // Нижегородский университет (газета). 2007. № 2 (2051). С. 22.

[3] Филиппов В.Н. Алексей Федорович Леонтьев // В кн.: Выдающиеся ученые / под ред. проф. А.Д. Зорина. Горький: Волго-Вятское кн. изд-во, 1988. С. 102 – 112.

[4] НА УНЦ РАН. Ф. 4. Оп. 5. Ед. хр. 1707. Личное дело А. Ф. Леонтьева. Л. 1 – 57. 1971 – 1987 гг.

[5] Улин В. Портрет учителя // Вечерняя Уфа. 1987. №115 (5534), 21 мая. С. 3; см. также: Улин В. Формулы Учителя // Наука Урала. 1988, 25 февраля. С. 6.

[6] Гиндикин С.Г. Леонард Эйлер // Квант. 1983. № 10. С. 17 – 24.

[7] Курбангалеева Р. Восторг чистого разума // Вечерняя Уфа. 1987. № 137 (5556), 16 июня. С. 3.

[8] Харди Г.Г. Апология математика (перевод с английского Ю.А. Данилова). М.: Едиториал УРСС, 2005. С. 67 – 69.

ВАЖНЕЙШИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ А. Ф. ЛЕОНТЬЕВА

Перейдем теперь к научным исследованиям Алексея Федоровича и укажем наиболее важные направления комплексного анализа, в разработке которых он добился выдающихся результатов.

Еще в своей диссертации «О классе функций, определенных рядами полиномов Дирихле» (М., 1947) и работе [10] он рассматривал общие ряды Дирихле, последовательности полиномов Дирихле и связанные с ними функциональные уравнения. Как он отмечает, первой работой, в которой изучался вопрос об аппроксимации линейными комбинациями степеней $\left\{z^{\lambda_n}\right\}$ ($0 < \lambda_n \uparrow \infty$; λ_n, вообще говоря, нецелые) в области комплексной плоскости была, видимо, работа Карлемана «Об аппроксимации аналитических функций посредством линейных комбинаций заданных степеней» (1923). В данной работе было показано, что эта система полна в угле с вершиной в начале координат раствора $2\pi K$, где

$$K = \varlimsup_{R\to\infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{\lambda_n<R} \frac{1}{\lambda_n}.$$

«Статья Карлемана в свое время не привлекла внимания математиков. Интерес к вопросам полноты разных систем аналитических функций начал проявляться лишь с 1938 г. — с момента появления в “Математическом сборнике” работы А. О. Гельфонда “О полноте системы аналитических функций”, в которой устанавливается полнота системы $\{f(\lambda_n z)\}$ в той или иной области» [125, с. 308]. Эта статья А. О. Гельфонда и дала толчок к многочисленным исследованиям по данной проблеме.

1. Общая проблема исследований. В связи с вопросами полноты естественно возникла следующая *общая проблема* (о ней говорится в монографии [10]).

Пусть $\{f_k(z)\}$ — система функций, аналитических в области D и пусть эта система не полна в D. Требуется описать свойства функций $P(z)$, которые в D представляются в виде

$$P(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{p_n} a_\nu^{(n)} f_\nu(z), \quad z \in D \tag{1}$$

(сходимость — равномерная внутри D).

Решению этой проблемы в случае системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ посвящены монографии [10], [107]. В тесной связи с указанной проблемой оказалась проблема представления аналитических функций в выпуклых областях рядами экспонент. Освещению этой второй проблемы посвящена работа [102].

Отметим, что предположение неполноты системы $\{f_k(z)\}$ позволяет рассчитывать на то, что те функции, которые в области D могут быть представлены в виде пределов типа (1), должны выделяться среди других аналитических в D функций некоторыми отличительными особенностями. Что здесь можно ожидать, Алексей Федорович демонстрирует на следующем примере.

Рассмотрим разностное уравнение

$$a_1 P(z+h_1) + ... + a_s P(z+h_s) = 0,$$

где $a_1,\ ...,\ a_s$— постоянные коэффициенты, а $h_1,\ ...,\ h_s$ ($h_1 < h_2 < ... < h_s$) — постоянные разности. Частными решениями этого уравнения являются экспоненты $e^{\lambda_k z}$ ($k = 1,\ 2,\ ...$), где λ_k — корни уравнения

$$a_1 e^{h_1 \lambda} + ... + a_s e^{h_s \lambda} = 0.$$

Образуем агрегаты

$$P_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} a_\nu^{(n)} e^{\lambda_\nu z} \quad (n = 1,\ 2,\ ...). \tag{2}$$

Если последовательность (2) равномерно сходится в прямоугольнике $\mathcal{D}$:

$$b_1 < \operatorname{Im} z < b_2, \quad c_1 < \operatorname{Re} z < c_2, \quad c_2 - c_1 > h_s - h_1,$$

то предельная функция $P(z)$ регулярна в $\mathcal{D}$ и будет удовлетворять разностному уравнению. Но из самого разностного уравнения непосредственно можно усмотреть, что если его решение регулярно в $\mathcal{D}$, то тогда оно регулярно и во всей полосе $b_1 < \operatorname{Im} z < b_2$. Таким образом, в качестве одного из свойств последовательности (2) можно отметить следующее: если она равномерно сходится внутри указанного прямоугольника $\mathcal{D}$, то предельная функция непременно будет аналитической в некоторой горизонтальной полосе.

По аналогии с этим примером, Алексей Федорович и в общем случае ставит задачу найти такое функциональное уравнение, решениями которого были бы функции $f_1(z),\ f_2(z),\ ...$ и их линейные комбинации $P_n(z)$. При таком подходе к изучению последовательностей (2) общая проблема естественным образом разделяется на две: первая состоит в построении по заданной системе $\{f_k(z)\}$ соответствующего функционального уравнения, вторая — в изучении общего решения построенного функционального уравнения.

Функциональные уравнения. В работах [56], [57] построение функционального уравнения проводится в весьма общем случае, когда $f_k(z) = A(z,\ \lambda_k) \quad (k \geq 1)$, где λ_k — комплексные числа, а $A(z,\ \lambda)$ — некоторая функция двух переменных z и λ, целая по λ, когда z принадлежит некоторому множеству D.

Пусть $\{p_m(z)\}$ — система функций, обладающая на D свойством единственности,

$$A(z,\ \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(z)\lambda^m, \quad z \in D, \quad |\lambda| < \infty.$$

Обозначим через M класс функций $F(z)$ вида

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m p_m(z)$$

(ряд сходится в D или в части G множества D). Положим

$$\mathrm{D}^m F = \sum_{n=m}^{\infty} b_n p_{n-m}(z) \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Наконец, пусть $L(\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m \lambda^m$ — какая-нибудь целая функция, обращающаяся в нуль в точках λ_k $(k \geqslant 1)$. Функциональное уравнение, о котором идет речь, имеет в рассматриваемом случае вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathrm{D}^m F = 0. \tag{3}$$

В качестве частных решений оно имеет функции $A(z,\ \lambda_k)$ и их линейные комбинации.

В частном случае, когда $A(z,\ \lambda) = e^{\lambda z}$, класс M есть класс аналитических функций, $\mathrm{D}^m F = F^{(m)}(z)$, и уравнение (3) есть *линейное дифференциальное уравнение бесконечного порядка*

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m F^{(m)}(z) = 0. \tag{4}$$

Если $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, то уравнение (4) можно представить также в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \gamma(t)F(t+z)dt = 0, \tag{5}$$

где $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, C — замкнутый контур, охватывающий все особенности $\gamma(t)$. Уравнение (5) — *уравнение свертки.*

Относительно уравнений (3) – (5) и соответствующих им последовательностей вида (2) Алексеем Федоровичем получен большой цикл выдающихся результатов. Ряд из них отмечен в первой работе [1], а затем — в монографии [10], а также в работах [56], [57], [70], где им разработаны мощные методы исследований данных уравнений. Сопоставляя по определенному правилу решениям $F(z)$ ряды по элементарным решениям, он доказал, что вполне определенные последовательности частичных сумм этих рядов сходятся к $F(z)$ в подходящей области (зависящей от функции $L(\lambda)$). В том случае, когда решение регулярно в бесконечной области с определенными свойствами, например, в выпуклой области, им указан способ суммирования ряда из элементарных решений к самому решению.

Уравнение свертки на оси. Частным случаем уравнения (5) является уравнение

$$\int\limits_a^b f(x+t)d\sigma(t) = 0, \tag{6}$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $[a,\ b]$ (непрерывные на всей оси функции, удовлетворяющие уравнению (6), называются *периодическими в среднем*). Частными решениями уравнения (6) являются функции

$$e^{\lambda_\nu x},\quad xe^{\lambda_\nu x},\ \ldots,\ x^{m_\nu - 1}e^{\lambda_\nu x}\quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

где λ_ν — нули характеристической функции

$$L(\lambda) = \int\limits_a^b e^{\lambda t}\, d\sigma(t).$$

Алексей Федорович указал правило, согласно которому функции $f(x)$, непрерывной на $(\alpha,\ \beta) \supset [a,\ b]$ и удовлетворяющей уравнению

(6) в интервале $(\alpha - a,\ \beta - b)$, сопоставляется ряд по элементарным решениям (7)

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(x) e^{\lambda_\nu x}, \quad deg\ P_j \le m_j - 1, \tag{8}$$

где $P_\nu(x)$ — многочлены. Относительно ряда (8) и решений уравнения (6) им получен цикл глубоких и законченных результатов. Например, он показал, что ряд (8) суммируется методом Абеля к $f(x)$ на всем интервале $(\alpha,\ \beta)$.

Частный случай уравнения свертки (6) — разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Применяя остроумный прием, Алексей Федорович построил пример разностного уравнения и его аналитического в некоторой горизонтальной полосе решения, для которого соответствующий ряд вида (8) всюду расходится, а некоторая подпоследовательность частичных сумм этого ряда сходится к решению во всей полосе [107, с. 340 – 344].

Теперь более подробно остановимся на некоторых наиболее легко формулируемых результатах Алексея Федоровича, характеризующих как ширину его научных результатов, так и его огромный талант исследователя.

2. Последовательности полиномов из экспонент. Важнейшим аналитическим инструментом Алексея Федоровича была введенная им интерполирующая функция [107], которая систематически и широко использовалась для исследования свойств последовательностей полиномов из экспонент.

В [10] показано, что если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} n/\lambda_n = \sigma$, и последовательность $P_n(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{nj} e^{-\lambda_j z} + b_{nj} e^{\lambda_j z}) \quad (n \ge 1)$ равномерно сходится внутри области D, содержащей замкнутый вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$ с центром в z_0, то последовательности

$$Q_n(z) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} e^{-\lambda_j z}, \qquad R_n(z) = \sum_{j=1}^{n} b_{nj} e^{\lambda_j z} \tag{9}$$

равномерно сходятся внутри полуплоскостей $\operatorname{Re} z > a$, $\operatorname{Re} z < b$ $(a < \operatorname{Re} z_0 < b)$ соответственно, в силу чего исходная последовательность равномерно сходится внутри вертикальной полосы $a < \operatorname{Re} z < b$ (если последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет только конечную верхнюю плотность, сходимость каждой из последовательностей (9) будет в бесконечных областях, отличных от $\mathbb{C}$, границы которых допускают асимптотическое описание [107]). При этом существуют пределы $a_j = \lim\limits_{n\to\infty} a_{nj}$, $b_j = \lim\limits_{n\to\infty} b_{nj}$, но в общем случае ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j z}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} b_j e^{\lambda_j z} \tag{10}$$

вообще расходятся. Класс A функций, представимых в виде предела последовательностей (9), шире класса B функций, представимых рядами

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j e^{-\lambda_j z}, \tag{11}$$

но, тем не менее, как показал Алексей Федорович [107, с. 101 – 102, 123], многие свойства, присущие функциям (11), остаются присущими и функциям класса A. Например, если $\mathrm{Re}\ z > a$ — полуплоскость голоморфизма функции $F \in A$, то в каждом отрезке длины $2\pi\sigma$ прямой $\mathrm{Re}\ z = a$ у функции $F(z)$ имеются особенности. Класс A — естественное и широкое обобщение класса функций (10), изучавшегося многими математиками.

Алексей Федорович исследовал также более общий случай, когда λ_n — комплексные нули целой функции экспоненциального типа, имеющей вполне регулярный рост [107].

Отметим, что в приведенной в самом начале теореме из [10] длина отрезка $2\pi\sigma$ не может быть заменена меньшей, поскольку, как показал Алексей Федорович [18], в любой криволинейной полосе вида $g(x) < y < g(x) + 2\pi\sigma \quad (x \in \mathbb{R},\ z = x + iy), \quad g \in C(\mathbb{R})$, система $\{e^{\lambda_j z}\}$ полна.

Использование последовательностей полиномов из экспонент позволило Алексею Федоровичу получить целый ряд тонких теорем по теории интерполирования, по уравнениям свертки, в вопросах полноты и единственности. Для примера сначала приведем его изящный и редкой красоты результат [83], примыкающий к классической теореме Фабри:

Если в степенном ряде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{\lambda_n}, \quad \lambda_n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

с положительным радиусом сходимости показатели λ_n таковы, что $\sum\limits_n \lambda_n^{-1} < \infty$, то функция $f(z)$ не продолжается квазианалитически вдоль лучей $\arg z = \mathrm{const}$ за пределы круга сходимости. Если же $\sum\limits_n \lambda_n^{-1} = \infty$, то существуют ряды (12), продолжающиеся квазианалитически по некоторому лучу за пределы круга сходимости (ниже будут приведены результаты Алексея Федоровича и более общего характера).

Использование последовательностей полиномов из экспонент породило целый цикл и других превосходных теорем. Они имеют ряд важных применений.

Во-первых, отметим следующую *теорему единственности* [107, с. 184]:

Пусть λ_n $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — нули целой функции $L(\lambda)$ экспоненциального типа, такой, что

$$|L(iy)| \le Be^{A|y|}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Пусть, далее, последовательность $\{R_n(z)\}$ вида (9) равномерно сходится в любой ограниченной области к $R(z)$. Если в любой горизонтальной полосе $|\mathrm{Im}\, z| < \gamma$

$$|R(z)| \le \exp\,[o(e^{\frac{\pi}{2A}x})], \quad x \to +\infty, \quad z = x + iy,$$

а на вещественной оси $|R(x)| \le e^{\mu x}$ при $x > x_0$, то

$$R(z) = \sum_{\lambda_j \le \mu} b_j e^{\lambda_j z}, \quad b_j = \lim_{n\to\infty} b_{nj},$$

а при $\mu < \lambda_1$ имеем: $R(z) \equiv 0$.

Сильное впечатление производит *«теорема о стирании особенностей»* [107, с. 224]:

Пусть Γ — гладкая дуга, такая, что в каждой своей точке $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ она пересекается с лучом $\arg z = \varphi_0$ под углом, меньшим $\pi/4$, $R_0 = \min\limits_{z\in\Gamma} |z|$, $R = \max\limits_{z\in\Gamma} |z|$. Пусть, далее,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-p_n}, \quad |z| > R,$$

где p_n — целые положительные числа, и пусть $\{\mu_n\} = \{n\}_1^\infty \setminus \{p_n\}$. Если $\sum\limits_n \mu_n^{-1} = \infty$, а функция $f(z)$ регулярна и ограничена при $|z| > R_0$ вне дуги Γ, то она регулярна при $|z| > R_0$.

Другие применения связаны с полнотой систем экспонент. Любопытно, что неполные системы успешно используются Алексеем Федоровичем для доказательства полноты других систем. Например, используя свойства последовательностей полиномов из экспонент и соображения квазианалитичности классов функций на дугах, им получено *обобщение классической теоремы Мюнца*:

Пусть γ — непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких дуг $\gamma_s: \ y = f_s(x)$, причем $|f_s{}'(x)| < 1$. Если $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0$, $\sum\limits_n \lambda_n^{-1} = \infty$, то система $\{e^{\lambda_n z}\}$ полна на γ в метрике $C(\gamma)$ [107, с. 243]. Замечательные идеи доказательства данной теоремы нашли успешное применение в дальнейшем в многочисленных работах как российских, так и зарубежных математиков, в том числе Я. Коревара и М. Диксона, Ж. Сиддики, Р. Зейнстра и др.

Вопросы интерполирования в исследованиях Алексея Федоровича также тесно связаны с последовательностями полиномов из экспонент. Пусть E — класс целых функций экспоненциального типа и пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n/\lambda_n = \sigma$. Ставится задача отыскания функции $f \in E$, обладающей свойством:

$$f(\lambda_n) = a_n \quad (n \ge 1). \tag{13}$$

Оказалось, что для существования функции $f \in E$ со свойством (13) необходимо и достаточно, чтобы внутри некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z < b$ равномерно сходилась последовательность

$$P_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{a_\nu L_n(\lambda_\nu)}{L_1{}'(\lambda_\nu)} e^{\lambda_\nu z} \ (n \ge 1), \qquad L_n(\lambda) = \prod_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Этот результат был обобщен затем на случай произвольных узлов λ_n интерполирования и функций произвольного конечного порядка.

Отметим еще одно применение данного направления исследований, связанное с выяснением структуры *замкнутых подпространств* функций, аналитических в заданной области, *инвариантных относительно дифференцирования* [107, с. 374]. Это область, в которой Алексей Федорович получил прекрасные результаты, описывающие их структуру.

Пусть функции (7) — это все экспоненциальные одночлены, входящие в данное инвариантное подпространство V, отличное от всех функций, аналитических в области G. Каждой функции $f \in V$ сопоставляется ряд (8) из функций (7). Оказалось, что результаты о суммируемости последовательностей полиномов из экспонент позволяют показать, что если область G — бесконечная, то этот ряд суммируется к $f(z)$ в области G, причем область G не обязательно выпукла.

Другой большой цикл исследований Алексея Федоровича относится к представлению произвольных аналитических функций рядами экспонент.

3. Представление аналитических функций в выпуклых областях рядами экспонент и их обобщениями. С 1965 г. работой [51] начинается новый большой цикл исследований Алексея Федоровича, относящийся к представлению произвольных аналитических функций рядами экспонент и другими более общими рядами. Это — новое и исключительно важное направление в теории функций, созданное им. Оно является центральным в творчестве Алексея Федоровича. Результаты по представлению функций рядами экспонент собраны в монографии [102], и они в наиболее полной мере характеризуют его исследовательский талант.

Существо построенной Алексеем Федоровичем теории состоит в следующем [71].

Пусть D — конечная выпуклая область, $K(\varphi)$ — ее опорная функция, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $L(\lambda)$ — какая-нибудь целая функция экспоненциального типа, такая, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\left|L(re^{i\varphi})\right|}{r} = h(\varphi),$$

т.е. $h(\varphi)$ — индикатриса роста $L(\lambda)$, λ_1, λ_2, ... — нули $L(\lambda)$ (считаем, что они пронумерованы в порядке неубывания модулей, и все они простые). Положим

$$\psi_k(t) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int\limits_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (k \geq 1).$$

Функции $\psi_k(t)$ регулярны вне $\overline{D}$ (замыкания D), $\psi_k(\infty) = 0$, и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \psi_k(t) e^{\lambda_m t} dt = \delta_{km} \quad (k \geq 1,\ m \geq 1),$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$. Иными словами, система $\{\psi_k(t)\}$ биортогональна к системе экспонент $\{e^{\lambda_n t}\}$. На этом основании произвольной функции $f(z)$, аналитической на $\overline{D}$, сопоставляется ряд экспонент

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^\infty a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(t)\psi_k(t) dt. \tag{14}$$

Этот ряд, вообще говоря, не сходится. Тем не менее, имеет место следующая *теорема единственности*:

Если все коэффициенты a_k равны нулю, то $f(z) \equiv 0$.

При условии, что функция $L(\lambda)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$|L(re^{i\varphi})| < A\frac{e^{h(\varphi)r}}{r^{\mu}}, \quad \mu > 1, \tag{15}$$

функции $\psi_k(t)$ непрерывны вплоть до границы $\partial\overline{D}$, и тогда ряд (14) можно сопоставить функции $f(z)$, регулярной в D и непрерывной в $\overline{D}$ (в этом случае в формуле для коэффициентов считаем $C = \partial\overline{D}$).

Существо теории заключается в изучении свойств ряда (14), в частности, в выяснении того, когда ряд (14) сходится в области D и сходится к своей функции $f(z)$.

Получены необходимые и достаточные условия на функцию $L(\lambda)$ для того, чтобы ряд всегда сходился в D к своей функции $f(z)$. Имеется несколько форм таких условий. Вот одна из таких условий [84]:

1) $|L'(\lambda_k)| > e^{(h(\varphi_k)-\varepsilon)|\lambda_k|}$, $\varphi_k = \arg\ \lambda_k$, $k > k_0(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — любое;

2) $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста.

Важно отметить, что для любой конечной выпуклой области D найдется функция $L(\lambda)$ со свойствами (15) и 1), 2). Поэтому верна теорема:

Какова бы ни была конечная выпуклая область D, существует система экспонент (она зависит только от D), что любую функцию, аналитическую в D и непрерывную в $\overline{D}$, можно разложить в области D в ряд (14).

Этот удивительный результат оказался не только неожиданным, но и необычным для многих специалистов, ибо в связи с привычными представлениями о классическом ряде Дирихле казалось, что в такой ряд разлагается не каждая аналитическая функция.

Дальнейшие исследования показали, что любую функцию, аналитическую лишь в области D, можно представить в D рядом экспонент[1].

В случае аналитической границы формулу для коэффициентов удается так преобразовать, что для любой функции $F(z)$, аналитической лишь в D, при подходящем выборе $L(\lambda)$ оказалось возможным сконструировать ряд из экспонент и доказать его сходимость в D к $F(z)$. В случае произвольной границы вопрос о разложении в ряд экспонент

[1]По словам Алексея Федоровича, идея доказательства «основного результата» пришла ему в голову в тот момент, когда... стоял в очереди за молоком. Скорее всего, он имел в виду именно этот результат. — *А.Г.*

функций, аналитических лишь в D, решается на основании следующей замечательной и безусловно красивой теоремы, поражающей окончательностью [74]:

Пусть $F(z)$ регулярна в конечной выпуклой области D. Тогда имеются функция $f(z)$, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, и целая функция $M(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$ с ростом не выше первого порядка минимального типа, такие, что

$$M(D)f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n f^{(n)}(z) = F(z).$$

Представив $f(z)$ рядом (14), в силу этой теоремы получим:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n M(\lambda_n) e^{\lambda_n z}, \quad z \in D.$$

В статьях [77], [98] речь идет о представлении аналитических функций рядами экспонент в бесконечных областях. Отметим следующую очень интересную теорему:

Пусть D — левая полуплоскость $\mathrm{Re}\ z < 0$. Каково бы ни было $\rho > 1$, имеется последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} k/\lambda_k^{\rho} = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$, такая, что любую функцию $f(z)$, аналитическую в D, можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z} + g(z),$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция.

В случае, когда D — произвольная выпуклая бесконечная область, отличная от всей плоскости (случай плоскости рассмотрим отдельно), Алексеем Федоровичем была построена общая схема доказательства теоремы о разложении в ряд экспонент — совершенно аналогичная случаю ограниченной области (ранее другими методами разложимость в указанных областях была установлена Ю. Ф. Коробейником, а затем — В. В. Напалковым).

В работах [86], [88] рассматривается вопрос о представлении функций рядами экспонент в «замкнутой выпуклой области», если функции регулярны в «открытой области» и имеют определенную гладкость в «замкнутой области». Вместе с тем Алексеем Федоровичем был рассмотрен и вопрос о разложении в конечной выпуклой области D функций $f(z)$, аналитических в D, имеющих при приближении к границе

∂D определенный рост, например: для всякого $\varepsilon > 0$

$$|f(z)| \le \exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\varepsilon}\right], \quad r = \mathrm{dist}(z, \partial D), \quad r \le r_0(\varepsilon).$$

В [109] доказана теорема о том, что любая такая функция $f(z)$ в области D представляется рядом экспонент $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z}$, причем ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n e^{\lambda_n z}|$ при $z \to \partial D$ имеет тот же рост, что и функция $f(z)$.

Весьма интересны результаты Алексея Федоровича, относящиеся к представлению целых функций рядами экспонент. Было показано, что любую целую функцию $f(z)$ можно представить во всей плоскости рядом экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \tag{16}$$

причем показатели λ_n можно выбрать лежащими на трех лучах (на одном или двух лучах их выбрать принципиально нельзя). При этом функция

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}|$$

имеет, вообще говоря, больший рост, чем $f(z)$ [71]. Далее было показано [103], что если $f(z)$ имеет порядок $\rho > 1$ и тип σ $(0 \le \sigma \le \infty)$, то существуют λ_n, такие, что имеет место представление (16), причем $\Phi(z)$ имеет порядок ρ и тот же тип σ. В связи с этим возник вопрос о существовании разложений, при которых сумма ряда из модулей учитывал бы рост исходной функции и вдоль лучей. Отметим, что степенной ряд этим свойством не обладает, ибо сумма ряда из модулей членов степенного ряда имеет одинаковый рост вдоль всех лучей.

Алексей Федорович доказал следующий весьма тонкий результат [111]:

Если $H(\varphi)r^\rho$ $(\rho > 1)$ — выпуклая функция от $z = re^{i\varphi}$, а $f(z)$ — целая функция порядка ρ с индикатрисой роста $h(\varphi) < H(\varphi)$, то ее можно представить во всей плоскости рядом (16), таким, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\Phi(re^{i\varphi})}{r^\rho} \le H(\varphi), \quad \Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\lambda_k z}|.$$

С помощью этого результата выделен класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho > 1$ конечного типа, представимых рядами (16), обладающих следующим замечательным свойством: индикатриса роста $h(\varphi)$ функции $f(z)$ из этого класса может быть вычислена через модули коэффициентов ряда.

Приведенные выше результаты, относящиеся к последовательностям полиномов из экспонент и вопросам разложения в ряды экспонент, в той или иной степени были обобщены на такой важный случай, когда вместо $e^{\lambda_n z}$ берется $f(\lambda_n z)$, где $f(z)$ — целая функция конечного порядка (например, функция Миттаг–Леффлера) [110]. Таким образом, наряду с теорией представления функций рядами экспонент Алексей Федорович одновременно разрабатывал теорию представления функций более общими рядами в ρ-выпуклых областях. И здесь им получен ряд фундаментальных результатов.

В своих последних работах Алексей Федорович занимался исследованием следующей задачи:

Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

— целая функция экспоненциального типа. При каких условиях на $f(z)$ произвольные аналитические функции $F(z)$ в выпуклых областях можно представлять рядами обобщенных экспонент

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(\lambda_n z) \ ? \tag{17}$$

Алексей Федорович доказал (1986) [122], [127], что если $f(z)$ — функция вполне регулярного роста,

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{t^{k+1}},$$

а особенности $\gamma(t)$ лежат в круге $\{t : |t| \leq 1\}$, причем $t = 1$ — особая точка для $\gamma(t)$, то для возможности представления в произвольной выпуклой области D, $\quad 0 \in D$, аналитических функций рядами (17), необходимо и достаточно, чтобы все $a_k \neq 0$, и особенности функций $\gamma(t)$ и

$$\gamma_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k t^{k+1}}$$

лежали только на отрезке $[0,\ 1]$.

Ограниченность объема публикации и трудности изложения не позволяют в данном обзоре коснуться других, еще многих прекрасных достижений Алексея Федоровича. Остановимся лишь на его результатах, связанных с *квазианалитическим продолжением*, которым были посвящены и самые последние его публикации 1987 г. ([123], [124], а также [125, 3. п. 3]).

В случае, когда функция $L(\lambda)$ не удовлетворяет ни одному из приведенных выше условий 1) и 2), то, на основании теоремы единственности, возникает задача о восстановлении $f(z)$ по коэффициентам a_k ряда (14). Рассмотрим лишь случай, когда λ_n — вещественны, $L(\lambda)$ имеет вещественные значения на вещественной оси, причем $\lim\limits_{n\to\infty} n/\lambda_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^{-1} = \infty$. В этом случае $\overline{D}$ — отрезок вещественной оси, и существуют $r_k,\ 0 < r_k \uparrow \infty$, такие, что [107]

$$\ln|L(\lambda)| > -h|\lambda|, \quad 0 \le h < \infty, \quad |h| = r_k \ (k \ge 1).$$

Возьмем функцию $f(z)$, аналитическую на отрезке $\overline{D}$, которая не удовлетворяет уравнению свертки вида (5). Положим

$$f^+(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{0<\lambda_v<r_k} a_v e^{\lambda_v z}, \qquad f^-(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{0<-\lambda_v<r_k} a_v e^{\lambda_v z}.$$

Функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$ регулярны, соответственно, в полуплоскостях $\operatorname{Re} z < \alpha^+$, $\operatorname{Re} z > \alpha^-$, а поскольку $f(z)$ не удовлетворяет уравнению свертки, то $\alpha^+ \le \alpha^-$, и прямые $\operatorname{Re} z = \alpha^+$, $\operatorname{Re} z = \alpha^-$ — естественные границы для $f^+(z)$ и $f^-(z)$. Алексеем Федоровичем показано, что функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$ продолжаются из соответствующих полуплоскостей квазианалитически на отрезок $\overline{D}$, и на этом отрезке

$$f(x) = f^+(x) + f^-(x)$$

(в $\overline{D}$ нет внутренней точки, в некоторую окрестность которой функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$ продолжались бы аналитически из соответствующих полуплоскостей ([102, с. 412 – 416], [125, с. 322, 323])).

Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n/\lambda_n = 0$. Известно, что если последовательность

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e^{\lambda_k z} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{18}$$

равномерно сходится в некоторой области к функции $P(z)$, то эта функция или целая, или регулярна в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z < \gamma$ (голоморфизма), все точки прямой $\operatorname{Re} z = \gamma$ (голоморфизма) для нее —

особые. При дополнительном условии $\sum\limits_n \lambda_n^{-1} < \infty$ верно более сильное утверждение [107, с. 319]:

Пусть $a < \gamma < b$ и $C(m_n)$ — какой-нибудь квазианалитический класс на отрезке $[a,\ b]$. Тогда любая функция $P(z)$ указанного вида не продолжается квазианалитически через прямую голоморфизма; если $\lim\limits_{n\to\infty} n/\lambda_n = 0,\ \sum\limits_n \lambda_n^{-1} = \infty$, то существует функция $P(z)$ того же вида, которая квазианалитически продолжается через прямую голоморфизма.

Данный результат привел к следующей, такой же замечательной теореме [124]:

Пусть $\lambda_n \in \mathbb{C},\ 0 < |\lambda_n| \uparrow \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} n/|\lambda_n| = 0,\ \sum\limits_n |\lambda_n|^{-1} < \infty$. Если последовательность вида (18) сходится в некоторой области к функции $P(z)$, D — область существования $P(z)$ (она выпукла [107, с. 312]), $D \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in [a,\ b] \cap \partial D$ ($a \in D$, b лежит вне $\overline{D}$), $C(m_n)$ — некоторый квазианалитический класс на $[a,\ b]$, то в $C(m_n)$ нет функции $f(z)$, такой, что $P(z) \equiv f(z)$, $z \in [a,\ z_0]$.

Эта теорема доказана Алексеем Федоровичем совершенно другим, отличным от случая $\lambda_n > 0$ способом.

Наконец, в [123] исследуются вопросы о квазианалитической непродолжаемости предельной функции $P(z)$ через прямую голоморфизма $\operatorname{Re} z = 0$ в случае, когда λ_n $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ подчинены более сильному требованию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho}} = \tau < \infty \quad (\rho < 1), \tag{19}$$

чем $\sum\limits_n \lambda_n^{-1} < \infty$. Предполагается при этом, что

$$\sup_{a \le x \le 0} |P^{(k)}(x)| \le A c^k k^{\frac{k}{p}} \quad (k \ge 0,\ p > \rho),\ a < 0. \tag{20}$$

Доказано, например, что при условиях (19), (20):

1) в любом угле $|\pi - \arg z| \le \varphi_0 < \pi/2$

$$|P^{(k)}(z)| \le B\beta^k k^{\frac{k}{p}} \quad (k \ge 0);$$

2) существует функция $f(z)$, аналитическая в угле $E = \{z :\ |\arg z| < \psi_0 < \frac{\pi}{2}(\frac{1}{p} - 1)\}$, $f \in C^\infty(\overline{E} \setminus \{\infty\})$, такая, что

$$\sup_E |f^{(k)}(z)| \le C\gamma^k k^{\frac{k}{p}}, \quad P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)\ (k \ge 0).$$

Учитывая известную теорему Р. Салинаса, показано, что при $p = \rho$ функция $P(x)$ может быть квазианалитически продолжена на $[0, \infty)$.

Завершая краткий обзор творческого наследия Алексея Федоровича, еще раз подчеркнем, что его исследования внесли существенный вклад в теорию приближений функций комплексного переменного. Созданную им теорию представления аналитических функций рядами экспонент, без всякого сомнения, следует считать его главным достижением. Именно в этой области он добился выдающихся результатов, превратив ряды экспонент в исключительно эффективный аппарат аппроксимации функций. В то же самое время все направления исследований Алексея Федоровича воспринимаются как единое целое, а большинство его важнейших результатов поражают окончательностью выводов, а доказательства теорем — глубиной и оригинальностью идей, стройностью доказательств и конструкций. Таким образом, если воспользоваться формулировкой Г. Харди, налицо все признаки высокого математического творчества. Как подтверждение сказанному могут служить, например, следующие замечательные утверждения: исключительно тонкая и изящная теорема о стирании особенностей; глубокая и эффектная теорема о конструкции дифференциального оператора бесконечного порядка, на которой основана теорема о разложении аналитических в «открытой области» функций в ряды экспонент; удивительные по красоте теоремы о квазианалитической продолжаемости и непродолжаемости; теоремы об оценках квазиполиномов через максимум модуля в областях и на отрезках неполноты заданной системы экспонент; весьма тонкие примеры, показывающие точность всякого рода оценок для рядов Дирихле в полосе, на луче и т. д.

Масштабные исследования по комплексному анализу и научно-организационные мероприятия, развернутые в 1970 – 1980-х гг. Алексеем Федоровичем и группой его учеников, сыграли, без всякого преувеличения, решающую роль в том, что Уфа превратилась в крупный математический центр. В настоящее время здесь успешно работает Институт математики Российской академии наук, инициатором создания которого был сам Алексей Федорович[1].

Несмотря на постоянную занятость, он честно и добросовестно вы-

[1]Под его руководством в Уфе к тому времени сформировалась сильная научная школа по комплексному анализу. В создании академического института математики особую роль сыграл его непререкаемый научный авторитет, а также активная поддержка со стороны руководства Башкирии и Математического института имени В.А. Стеклова. Следует отметить, что при этом Алексей Федорович не занимал по сути никакой руководящей должности, наоборот, всячески избегал этого. Как известно, он даже отклонил предложение возглавить Отдел физики и математики в составе Башкирского филиала АН СССР, созданный в 1971 г. специального для него.

полнял все свои общественные обязанности, а их было немало — о них частично было уже упомянуто во вступительной статье[1].

Кроме высокого профессионализма, Алексей Федорович обладал редкими человеческими качествами. Исключительно скромный, деликатный, доброжелательный, неутомимый труженик, он был примером внимательного и доброго отношения к окружающим.

А. М. Гайсин, Ю. Ф. Коробейник, А. С. Кривошеев,
С. Г. Мерзляков, И. Х. Мусин, В. В. Напалков,
А. М. Седлецкий, А. Г. Сергеев, С. А. Теляковский,
Ю. Н. Фролов, Б. Н. Хабибуллин, Р. С. Юлмухаметов

[1] Любопытна и следующая запись в характеристике от 12 апреля 1971 г., подписанной академиком И.М. Виноградовым: «А.Ф. Леонтьев принимает активное участие в общественной жизни Института (имени В.А. Стеклова — *А.Г.*). Он работал секретарем экспертной комиссии по присуждению премии имени П.Л. Чебышева. В настоящее время является членом группы народного контроля МИАН и членом Методического совета по математике при Министерстве высшего образования (см. в вступ. ст.: [4, л. 37]).

В характеристике от 7 сентября 1977 г., выданной Башкирским филиалом АН СССР, в частности, сказано: «Тов. Леонтьев проводит большую работу по развитию математики в республике. Он является председателем секции математики Башкирского координационного совета по физико-математическим наукам, член ученого совета общества школьников Уфимского Дворца пионеров. Тов. Леонтьев большое внимание уделяет распространению математических знаний среди трудящихся» (см.: Там же. Л. 44, 45)».

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВА

[1] "О классе функций, определенных рядами полиномов Дирихле", *УМН*, **3**:4 (1948), 176–180.

[2] "Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка", *ДАН*, **61** (1948), 785–787.

[3] "О целых функциях экспоненциального типа, принимающих в заданных точках заданные значения", *Изв. АН, сер. матем.*, **13** (1949), 33–44.

[4] "О классе функций, определенных рядами полиномов Дирихле", *Уч. зап. МГУ, математика*, **3** (1949), 3–58.

[5] "О функциях определенных рядами полиномов Дирихле", *Изв. АН, сер. матем.*, **13** (1949), 221–230.

[6] "Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка, нормального типа", *ДАН*, **66** (1949), 153–156.

[7] "Об одной интерполяционной задаче", *ДАН*, **66** (1949), 331–334.

[8] "Дифференциально-разностные уравнения", *Матем. сб.*, **24** (1949), 347–374.

[9] "Об одной последовательности полиномов", *ДАН*, **72** (1950), 621–624.

[10] "Ряды полиномов Дирихле и их обобщения", *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **39** (1951), 1–215.

[11] "Об одном обобщении ряда Фурье" (совм. с А. О. Гельфондом), *Матем. сб.*, **29** (1951), 477–500.

[12] "Дифференциально-разностные уравнения с линейными коэффициентами", *Труды Пед. ин-та, физ. матем. фак.*, **14** (1951), Горький, 3–30.

[13] "Обобщение теоремы Лиувилля", *Матем. сб.*, **31** (1952), 201–208.

[14] "О полноте одной системы аналитических функций", *Матем. сб.*, **31** (1952), 381–414.

[15] "К вопросу о представлении целых функций последовательностями линейных агрегатов", *Матем. сб.*, **33** (1953), 453–462.

[16] "Об области ограниченности последовательности полиномов Дирихле", *Матем. сб.*, **35** (1954), 175–186.

[17] "О сверхсходимости одного ряда", *ДАН* **94** (1954), 381–384.

[18] "О полноте системы показательных функций в криволинейной полосе", *Матем. сб.*, **36** (1955), 555–568.

[19] "Об области регулярности предельной функции одной последовательности аналитических функций", *Матем. сб.*, **39** (1956), 405–422.

[20] “О свойствах последовательностей линейных агрегатов, сходящихся в области, где порождающие линейные агрегаты система функций не является полной”, *УМН*, **11**:5 (1956), 26–37.

[21] “О сходимости последовательности полиномов Дирихле”, *ДАН*, **108** (1956), 23–26.

[22] “Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка”, *Труды III Всесоюзного матем. съезда*, **1** (1956), 86–87.

[23] “Последовательности полиномов Дирихле”, *Труды III Всесоюзного матем. съезда*, **2** (1956), 32–33.

[24] “К вопросу об интерполировании в классе целых функций конечного порядка”, *Матем. сб.*, **41** (1957), 81–96.

[25] “Новое доказательство одной теоремы о сходимости последовательности полиномов Дирихле”, *УМН*, **12**:3 (1957), 165–170.

[26] “О значениях целой функции конечного порядка в заданных точках”, *Изв. АН, сер. матем.*, **22**:3 (1958), 387–394.

[27] “О некоторых решениях линейного разностного уравнения с линейными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **45**:3 (1958), 323–332.

[28] “О последовательности линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений”, *Изв. АН, сер. матем.*, **22**:2 (1958), 201–242.

[29] “О полноте системы $\left\{z^{\lambda_n}\right\}$ на кривых в комплексной плоскости”, *ДАН*, **121**:5 (1958), 797–800.

[30] “О последовательностях полиномов Дирихле”, *Труды III Всесоюзного матем. съезда*, **3** (1958), 218–226.

[31] “К вопросу о последовательностях линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **48**:2 (1959), 129–136.

[32] “О лакунарных рядах Тейлора функций многих комплексных переменных”, *Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, матем.*, **5** (1959), 99–109.

[33] “О полноте некоторых систем полиномов в областях комплексной плоскости”, *ДАН*, **126**:5 (1959), 939–942.

[34] “О свойствах последовательностей линейных агрегатов, образованных из полиномов Якоби, и их применение к вопросу о полноте системы полиномов Якоби”, *Изв. АН, сер. матем.*, **23**:4 (1959), 565–594.

[35] “О выпуклости области регулярности решения дифференциального уравнения бесконечного порядка”, *ДАН*, **132**:5 (1960), 1019–1022.

[36] “О последовательностях линейных агрегатов, составленных из решений $y(z, \lambda_j)$ обыкновенного дифференциального уравнения $Dy = \lambda_j y$”, *Сб. «Исследов. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного»*, Физматгиз, М., 1960, 195–206.

[37] “Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применения к некоторым вопросам теории функций”, *СМЖ*, **1**:3 (1960), 456–487.

[38] “О применении дифференциальных уравнений бесконечного порядка к вопросам полноты систем аналитических функций”, *Сб. «Исследов. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного»*, Физматгиз, М., 1961, 41–49.

[39] “Распространение свойств целых функций порядка меньше половины на некоторые другие функции”, *Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **64** (1961), 126–146.

[40] “К вопросу о полноте системы степеней на полуоси”, *Изв. АН, сер. матем.*, **26**:5 (1962), 781–792.

[41] “Об одном свойстве подпоследовательности полиномов Фабера”, *Труды Энергетич. ин-та*, **42** (1962), Москва, 75–97.

[42] “On incomplete systems of Faber polynomials and some other functions”, *Abstracts of short communications, Intern. Congress. Math.*, **3** (1962), Stockholm, 10.

[43] “О некоторых теоремах единственности для рядов Дирихле”, *Изв. АН, сер. матем.*, **27**:6 (1963), 1251–1280.

[44] “О полноте системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в замкнутой полосе”, *ДАН*, **152**:2 (1963), 266–268.

[45] “О свойствах функций, аппроксимируемых линейными комбинациями заданных функций, близких к степенным”, *Изв. АН, сер. матем.*, **27**:2 (1963), 397–434.

[46] “О теоремах типа Фрагмена – Линделефа для гармонических функций в цилиндре”, *Изв. АН, сер. матем.*, **27**:3 (1963), 661–676.

[47] “Об аналитичности ядра одного интегрального преобразования”, *Матем. сб.*, **62**:1 (1963), 31–38.

[48] “Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и их применения”, *Труды IV Всесоюзного матем. съезда*, **2** (1964), 648–660.

[49] “К вопросу о росте функций, определенных рядами Дирихле и некоторыми другими более общими рядами”, *Матем. сб.*, **63**:2 (1964), 227–237.

[50] “О некоторых исследованиях по теории функций комплексного переменного”, *Доклады научно-технич. конф. Москов. энергетич. ин-та, секция матем.*, Москва, 1965, 42–79.

[51] “О представлении произвольных функций рядами Дирихле”, *ДАН*, **164**:1 (1965), 40–42.

[52] “О представлении произвольных целых функций рядами Дирихле”, *ДАН*, **165**:4 (1965), 759–762.

[53] “О преобразовании одного функционального уравнения к более простому виду”, *Матем. сб.*, **67**:4 (1965), 541–560.

[54] “О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси”, *Изв. АН, сер. матем.*, **29**:2 (1965), 269–328.

[55] “О сравнении по росту линейных комбинаций функций из двух близких систем”, *СМЖ*, **6**:2 (1965), 364–382.

[56] “Об одном функциональном уравнении”, *Изв. АН, сер. матем.*, **29**:4 (1965), 725–756.

[57] “Построение функционального уравнения с данной системой частных решений”, *ДАН*, **160**:1 (1965), 36–39.

[58] “О последовательностях некоторых функций, рассматриваемых на полуоси”, *СМЖ*, **7**:1 (1966), 129–145.

[59] “О представлении произвольных аналитических функций рядами Дирихле и некоторыми более общими рядами”, *Сб. «Соврем. пробл. теории аналит. функций»*, Москва, 1966, 209–216.

[60] “О представлении функций некоторыми общими рядами”, *Тезисы кр. научн. сообщений Междунар. конгресса математиков, секция 4*, Москва, 1966, 66.

[61] “О представлении целых функций некоторыми общими рядами”, *Матем. сб.*, **71**:1 (1966), 3–13.

[62] “О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле”, *Матем. сб.*, **70**:1 (1966), 132–144.

[63] “Функции, периодические в среднем”, *Сб. «Третья летняя матем. школа»*, Киев, 1966, 84–134.

[64] “К вопросу о представлении произвольных функций некоторыми общими рядами”, *Матем. заметки*, **1**:6 (1967), 689–698.

[65] “О суммировании ряда Дирихле с действительными показателями для произвольной аналитической функции”, *Изв. АН, серия матем.*, **31**:1 (1967), 87–102.

[66] “Об одном свойстве единственности”, *Матем. сб.*, **72**:2 (1967), 237–249.

[67] “К вопросу о представлении произвольных целых функций рядами Дирихле и другими более общими рядами”, *Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. н.*, **2**:5 (1967), 295–317.

[68] “Об асимптотике коэффициентов разложения произвольных функций в ряды Дирихле”, *Доклады научно-техн. конф. Моск. Энергет. ин-та по итогам научно-исслед. работ за 1966–1967 гг., секция матем.*, Москва, 1967, 3–11.

[69] “О представлении аналитических в открытом круге функций рядами Дирихле”, *Матем. заметки*, **3**:2 (1968), 113–124.

[70] “Об одном способе решения уравнения бесконечного порядка”, *Изв. АН, сер. матем.*, **32**:3 (1968), 687–708.

[71] “Представление функций обобщенными рядами Дирихле”, *УМН*, **24**:2 (1969), 97–164.

[72] “К вопросу о представлении целых функций конечного порядка рядами Дирихле”, *Доклады научн.–техн. конференции по итогам научно–исслед. работ за 1968–69 гг., секция матем.*, МЭИ, Москва, 1969, 35–41.

[73] “К вопросу о представлении аналитических функций рядами Дирихле”, *Матем. сб.*, **80**:1 (1969), 117–156.

[74] “О представлении аналитических функций в открытой области рядами Дирихле”, *Матем. сб.*, **81** (1970), 552–579.

[75] “О способах решения уравнения бесконечного порядка в действительной области”, *Изв. АН, серия матем.*, **34**:4 (1970), 849–880.

[76] “Об аппроксимации в областях посредством различных систем аналитических функций”, *Сб. «Специальные вопросы дифференциальных уравнений и теории функций»*, Баку, 1970, 77–88.

[77] “О представлении функций, аналитических в полуплоскости, рядами Дирихле”, *Матем. сб.*, **85**:4 (1971), 563–580.

[78] “Об уравнениях бесконечного порядка с аналитическими решениями”, *Матем. заметки*, **10**:3 (1971), 269–278.

[79] “К вопросу о полноте системы экспонент на интервале”, *Изв. АН Арм. ССР, математика*, **6**:2–3 (1971), 195–209.

[80] “О суммировании ряда Дирихле с комплексными показателями и его применении”, *Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **112** (1971), 300–326.

[81] “О восстановлении функции по коэффициентам ее ряда Дирихле”, *Изв. АН, серия матем.*, **35**:1 (1971), 125–153.

[82] “К вопросу о восстановлении функции по известным коэффициентам ее ряда Дирихле”, *Proc. of the Conference on Constructive Theory of Functions*, Изд-во АН Венгрии, 1971, 273–288.

[83] “Об одном дополнении к теореме Адамара”, *ДАН*, **206**:5 (1972), 1049–1051.

[84] “Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле”, *Изв. АН, серия матем.*, **36**:6 (1972), 1282–1295.

[85] “О представлении целых функций многих переменных рядами Дирихле”, *Матем. сб.*, **89**:4 (1972), 586–598.

[86] “О представлении аналитических функций в замкнутой выпуклой области рядами Дирихле”, *Изв. АН, серия матем.*, **37**:3 (1973), 577–592.

[87] “Об оценке полинома Дирихле и ее некоторых применениях”, *Матем. сб.*, **91**:4 (1973), 554–564.

[88] “О представлении аналитических функций в многоугольной выпуклой замкнутой области рядами Дирихле”, *Изв. АН, серия матем.*, **38**:1 (1974), 127–137.

[89] “О представлении аналитических функций в виде суммы периодических”, *Матем. сб.*, **95**:4 (1974), 512–528.

[90] “О полноте системы экспонент на кривой”, *СМЖ*, **15**:5 (1974), 1103–1114.

[91] “О представлении аналитических функций рядами Дирихле”, *Международн. конгресс математиков*, Ванкувер, 1974; *Abstracts of communications*, 1974, 21.

[92] “О представлении аналитических функций рядами Дирихле”, *Труды Международного конгресса математиков*, Ванкувер, 1974; *Canadian Mathematical Congress*, 1975, 207–212.

[93] “О росте целой функции экспоненциального типа на последовательности точек”, *Матем. сб.*, **96**:4 (1975), 601–613.

[94] “Об однозначности сопоставления функции ее ряда Дирихле”, *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **134** (1975), 161–179.

[95] “Об области сходимости ряда Дирихле с комплексными показателями”, *Теория функций и применение методов Монте–Карло, Сб. статей Отдела физики и математики Башкирского филиала АН СССР*, 1975, 4–12.

[96] “Ряды Дирихле, последовательности полиномов Дирихле и связанные с ними функциональные уравнения”, *Итоги науки и техники. Матем. анализ, ВИНИТИ*, **13** (1975), 5–55.

[97] “Об одном применении интерполяционного метода”, *Матем. заметки*, **18**:5 (1975), 735–752.

[98] “К вопросу о представлении аналитических функций в бесконечной выпуклой области рядами Дирихле”, *ДАН*, **225**:5 (1975), 1013–1015.

[99] “Об одном представлении аналитической функции в бесконечной выпуклой области”, *Anal. Math.*, **2** (1976), 125–148.

[100] “Об эквивалентных условиях представления аналитических функций рядами экспонент”, *Матем. заметки*, **20**:1 (1976), 91–104.

[101] “О представлении аналитических функций рядами экспонент в полицилиндрической области”, *Матем. сб.*, **100(142)** (1976), 364–383.

[102] *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.

[103] “К вопросу о представлении целых функций рядами экспонент”, *Мат. сб.*, **104**:3 (1977), 371–389.

[104] “Об условиях представимости целых функций некоторыми общими рядами” (совм. с Ю. Н. Фроловым), *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **42**:4 (1978), 763–772.

[105] “Решение обобщенного уравнения свертки”, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **43**:2 (1979), 342–366.

[106] “О представлении целых функций из линейной оболочки системы экспонент рядами”, *Исследования по теории аппроксимации функций, Сб. статей Отдела физики и математики Башкирского филиала АН СССР*, Уфа, 1979, 3–17.

[107] *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980.

[108] “О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент” (совм. с
Ю. Ф. Коробейником), *Мат. заметки*, **28**:2 (1980), 243–254.

[109] “Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы”, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **44**:6 (1980), 1308–1328.

[110] *Обобщения рядов экспонент*, Наука, М., 1981.

[111] “Представление целых функций рядами экспонент”, *Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, **157** (1981), 68–89.

[112] “Представление целых функций рядами по функциям Миттаг–Леффлера”, *ДАН СССР*, **264**:6 (1982), 1313–1315.

[113] *Целые функции. Ряды экспонент*, Наука, М., 1983.

[114] “Представление функций в выпуклых областях обобщенными рядами экспонент”, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **45** (1983), 305–315.

[115] “Представление целых функций рядами по функциям Миттаг-Леффлера”, *Anal. Math.*, **9**:3 (1983), 177–205.

[116] “Теория приближения и представления аналитических функций”, *Очерки развития математики в СССР*, Наукова думка, Киев, 1983, 252–277.

[117] “Область сходимости рядов обобщенных экспонент”, *Мат. сб.*, **123**:1 (1984), 3–10.

[118] “Ряды типа рядов экспонент”, *Мат. структуры. Вычисл. мат. Мат. моделир.*, София, 1984, 50–54.

[119] “Условия представимости функций в выпуклых областях обобщенными рядами экспонент”, *Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, **167** (1985), 216–235.

[120] “Представление целых функций рядами обобщенных экспонент”, *Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, **172** (1985), 215–234.

[121] “Применение разложений целых функций в ряды экспонент”, *Мат. сб.*, **126**:2 (1985), 147–171.

[122] “К вопросу о представлении аналитических функций рядами обобщенных экспонент”, *Anal. Math.*, **12**:3 (1986), 213–228.

[123] “О квазианалитической непродолжаемости функции, заданной рядом экспонент”, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **51**:2 (1987), 270–286.

[124] “О квазианалитической продолжаемости функции, представленной рядом экспонент”, *Мат. заметки*, **41**:2 (1987), 185–193.

[125] “Ряды и последовательности полиномов из экспонент”, *Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова*, **176** (1987), 308–325.

[126] “О системе, биортогональной системе обобщенных экспонент”, *Актуальные вопросы теории функций*, Ростовский ун-т, Ростов-на-Дону, 1987, 11–18.

[127] “Представление функций рядами обобщенных экспонент”, *Мат. сб.*, **134**:4 (1987), 496–510.

[128] “Представление функций рядами экспонент”, Диалог, Уфа, 2017[1].

[1]Данная обзорная работа А. Ф. Леонтьева не была опубликована при его жизни. Рукопись и машинопись хранятся в Научном архиве УНЦ РАН: *НА УНЦ РАН. Ф. 76. Оп. 1. Ед. хр. 1 (на 160 листах). Рукопись; Там же. Ед. хр. 2 (на 161 листах). Машинопись.* На л. 5 рукописи в правом верхнем углу почерком автора — помета: «2 сент. 86». Над отдельными трудночитаемыми словами рукописи карандашом сделаны пояснения. Судя по почерку, они сделаны секретарем-машинисткой кафедры теории функций и функционального анализа БашГУ М. Г. Мироновой. Текст работы, очевидно, напечатан ей на машинке осенью 1986 г. Предположительно рукопись составлена автором летом 1986 г., видимо, по обыкновению, на даче. — *Примечание А. М. Гайсина.*

ИЗДАНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖИЗНИ И ТРУДАХ А. Ф. ЛЕОНТЬЕВА

[1] *Большая советская энциклопедия, 3-е изд.*, **14** (1973), 1014.

[2] *Советский энциклопедический словарь*, 1980, 711.

[3] "Алексей Федорович Леонтьев", *Успехи матем. наук*, **32**:3 (1977), 185–195; **42**:5 (1987), 177–182.

[4] "Алексей Федорович Леонтьев", *Математические заметки*, **21**:5 (1977), 594; **42**:4 (1987), 483–493.

[5] А. Н. Боголюбов, *Математика и механика: Библиографический справочник*, Наукова думка, Киев, 1983, 282.

[6] *Горьковский государственный университет: Выдающиеся ученые*, (под ред. проф. А. Д. Зорина), Волго-Вятское кн. изд-во, Горький, 1988, 102–112.

[7] *Башкортостан: Краткая энциклопедия*, Научное издательство «Башкирская энциклопедия», Уфа, 1996, 371.

[8] А. М. Гайсин, "Основоположник уфимской математической школы", *Вестник Академии наук Республики Башкортостан*, **22**:1 (2017), 94–101.

Научное издание

ГАЙСИН Ахтяр Магазович

ЛЕОНТЬЕВ АЛЕКСЕЙ ФЕДОРОВИЧ

(1917 – 1987)

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И ВКЛАД В НАУКУ

К столетию со дня рождения

В авторской редакции

Компьютерная верстка: *Р. А. Гайсин*
Дизайн обложки: *Н. Х. Халисов*
Компьютерный набор: *Г. А. Гайсина, А. И. Рахимова*