ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 152 (2018). С. 3–12

УДК 517.927, 517.923

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЭЙЛЕРА

© 2018 г. **Ю. Ю. БАГДЕРИНА**

Аннотация. Рассматривается асимптотическое решение задачи о собственных значениях оператора Эйлера в окрестности регулярной особой точки. Найдено условие отсутствия логарифмов в асимптотическом разложении. Собственные значения, выражающиеся в элементарных функциях в форме конечной суммы квазиполиномов, получены для операторов Эйлера третьего порядка и для коммутирующих операторов Эйлера шестого и девятого порядков. Исследуется задача о совместной собственной функции коммутирующих операторов Эйлера. В случае операторов ранга 2 и 3 дифференциальной подстановкой она сводится к уравнению Бесселя второго и третьего порядка.

Ключевые слова: собственная функция, оператор Эйлера, фуксова особенность.

AMS Subject Classification: 47E05, 34L10, 34B30

1. Введение. Основным предметом исследования в данной работе является линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), которое можно назвать уравнением Бесселя n-го порядка (см. [2, 3])

$$E_n w = \mu^n w, \quad \mu = \text{const} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

т.е. задача о собственных значениях оператора Эйлера

$$E_n = D_z^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{a_k}{z^k} D_z^{n-k}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad C_n^k = \binom{k}{n}, \quad D_z = \frac{d}{dz}. \tag{2}$$

Уравнение (1) нефуксово, поскольку для него только $z = 0$ является регулярной особой точкой, а $z = \infty$ — иррегулярная особенность. К нему применим метод Фробениуса (см. раздел 2, а также [1, 8]), который позволяет построить решение уравнения (1) в окрестности регулярной особой точки.

В разделе 3 найдены условия на коэффициенты оператора (2), при которых ряд, определяющий решение уравнения (1), не содержит логарифмических членов. В частном случае, описанном в [2], общее решение уравнения (1) представимо в виде конечной суммы квазиполиномов. В разделе 3 все такие решения вычислены для уравнений Бесселя третьего порядка, а также для уравнений (1) шестого и девятого порядка, в которых соответствующие операторы E_6 и E_9 коммутируют.

В разделе 4 рассматривается задача о совместной собственной функции $\psi(z)$ коммутирующих операторов Эйлера E_m и E_n ранга l (значение l совпадает с наибольшим общим множителем чисел m и n). В случае операторов ранга 2 и 3 дифференциальная подстановка сводит решение уравнений

$$(E_m - \mu^m)\psi = 0, \quad (E_n - \mu^n)\psi = 0 \tag{3}$$

к интегрированию уравнения Бесселя второго и третьего порядка, соответственно. По-видимому, это справедливо и для произвольного значения l, когда $\psi(z)$ находится интегрированием уравнения Бесселя l-го порядка.

2. Метод Фробениуса. Особенностями решения линейного уравнения

$$L_n w = 0, \quad L_n = D_z^n + B_1(z) D_z^{n-1} + \cdots + B_{n-1}(z) D_z + B_n(z), \tag{4}$$

могут быть только особенности коэффициентов уравнения (см. [1]). Точка z_0 является особой, если в ней нарушаются условия теоремы существования. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$.

Точка $z = 0$ называется *фуксовой особой точкой* уравнения (4), если коэффициенты оператора L_n равны

$$B_k(z) = \frac{b_k(z)}{z^k}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где функции $b_k(z)$ голоморфны в точке $z = 0$ (см. [1, 5]). В случае скалярного линейного ОДУ понятия регулярной и фуксовой особых точек совпадают (см. [5]).

Метод Фробениуса предполагает, что точка $z = 0$ является регулярной особенностью уравнения (4). Пусть аналитическая функция

$$f(z, \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) + \sum_{k=1}^{n-2} \Big[\lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + k + 1) b_k(z)\Big] + \lambda b_{n-1}(z) + b_n(z) \tag{5}$$

в окрестности $z = 0$ разлагается в ряд

$$f(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\lambda) z^k.$$

Определяющим уравнением ОДУ (4) в точке $z = 0$ называется уравнение

$$f_0(\lambda) \equiv \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) + \sum_{k=1}^{n-2} \Big[\lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + k + 1) b_k(0)\Big] + \lambda b_{n-1}(0) + b_n(0) = 0. \tag{6}$$

Заметим, что корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения (6) совпадают с одноименными величинами в факторизации

$$E_n = \frac{1}{z^n}(z D_z - \lambda_1)(z D_z - \lambda_2) \cdots (z D_z - \lambda_n), \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n = \mathrm{const}, \tag{7}$$

оператора Эйлера

$$E_n = D_z^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k(0)}{z^k} D_z^{n-k}, \tag{8}$$

соответствующего уравнению (4) (см. [5]).

В методе Фробениуса решение уравнения (4) ищется в виде формального ряда

$$\varphi(z) = z^\lambda \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k\right), \quad C_k = \mathrm{const}\,. \tag{9}$$

Подстановка (9) в (4) и приравнивание коэффициентов при степенях z приводит к системе

$$f_0(\lambda) = 0, \quad C_1 f_0(\lambda + 1) + f_1(\lambda) = 0, \quad C_2 f_0(\lambda + 2) + C_1 f_1(\lambda + 1) + f_2(\lambda) = 0, \quad \ldots,$$
$$C_\nu f_0(\lambda + \nu) + C_{\nu-1} f_1(\lambda + \nu - 1) + \cdots + C_1 f_{\nu-1}(\lambda + 1) + f_\nu(\lambda) = 0, \quad \ldots.$$

Из ее первого уравнения, совпадающего с (6), находится λ, а из остальных находятся коэффициенты ряда (9):

$$C_\nu = \frac{(-1)^\nu \Delta_\nu(\lambda)}{f_0(\lambda + 1) f_0(\lambda + 2) \cdots f_0(\lambda + \nu)}.$$

Здесь $\Delta_\nu(\lambda)$ — определитель ν-го порядка

$$\Delta_\nu(\lambda)=\begin{vmatrix} f_1(\lambda+\nu-1) & f_2(\lambda+\nu-2) & f_3(\lambda+\nu-3) & \cdots & f_{\nu-1}(\lambda+1) & f_\nu(\lambda)\\ f_0(\lambda+\nu-1) & f_1(\lambda+\nu-2) & f_2(\lambda+\nu-3) & \cdots & f_{\nu-2}(\lambda+1) & f_{\nu-1}(\lambda)\\ 0 & f_0(\lambda+\nu-2) & f_1(\lambda+\nu-3) & \cdots & f_{\nu-3}(\lambda+1) & f_{\nu-2}(\lambda)\\ 0 & 0 & f_0(\lambda+\nu-3) & \cdots & f_{\nu-4}(\lambda+1) & f_{\nu-3}(\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_0(\lambda+1) & f_1(\lambda) \end{vmatrix}.$$

Если помимо $z=0$ уравнение (4) имеет еще только одну особую точку $z=\infty$, то степенной ряд в скобках в правой части (9) сходится внутри некоторого произвольно большого круга $|z|=R$ (см. [1]). В случае, когда все корни $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ уравнения (6) просты и отличаются друг от друга на нецелое число, получаются n независимых решений вида (9), образующих фундаментальную систему решений уравнения (4).

Пусть уравнение (6) имеет $r+1$ корней $\lambda_0,\dots,\lambda_r$ кратностей $\rho_0,\dots,\rho_r$ соответственно, причем $\lambda_j-\lambda_k\in\mathbb{N}$, $j<k$. Тогда часть фундаментальной системы решений уравнения (4), соответствующая корням $\lambda_0,\dots,\lambda_r$, состоит из $\rho_0+\dots+\rho_r$ функций (см. [8])

$$\begin{gathered}\Phi_0=\varphi\Big|_{\lambda=\lambda_0},\quad \Phi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0},\quad \dots,\quad \Phi_{\rho_0-1}=\frac{\partial^{\rho_0-1}\varphi}{\partial\lambda^{\rho_0-1}}\Big|_{\lambda=\lambda_0},\\ \Phi_{k_j}=\frac{\partial^{k_j}\varphi}{\partial\lambda^{k_j}}\Big|_{\lambda=\lambda_j},\quad k_j=\rho_0+\dots+\rho_{j-1},\quad \dots,\quad \rho_0+\dots+\rho_j-1,\quad j=1,\dots,r,\end{gathered}\tag{10}$$

т.е. из самой функции (9) и $\rho_0+\dots+\rho_r-1$ ее последовательных производных по λ, первые ρ_0 из которых вычислены в точке $\lambda=\lambda_0$, следующие ρ_1 — в точке $\lambda=\lambda_1$, и т. д., последние ρ_r — в точке $\lambda=\lambda_r$. Нетрудно видеть, что дифференцирование функции (9) по λ может приводить к появлению $\ln z$ в функциях (10). Имеет место следующее утверждение (см. [1, гл. 16]).

Теорема 1. *Фундаментальная система решений уравнения* (4) *в окрестности регулярной особой точки $z=0$ не содержит логарифмических членов тогда и только тогда, когда уравнение* (6) *не имеет кратных корней и для каждого подмножества корней $\lambda_0,\dots,\lambda_r$, удовлетворяющих условиям $\nu_j=\lambda_0-\lambda_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\dots,r$, и $\lambda_j>\lambda_k$, $j<k$, выполняются $r(r+1)/2$ соотношений*

$$\Delta_{\nu_1}(\lambda_0)=0,\quad \Delta_{\nu_j}(\lambda_0)=0,\quad \frac{\partial^{k_j}\Delta_{\nu_j}}{\partial\lambda^{k_j}}\Big|_{\lambda=\lambda_0}=0,\quad k_j=1,\dots,j-1,\quad j=2,\dots,r.\tag{11}$$

3. Задача о собственных значениях оператора Эйлера. Решение уравнения Бесселя (1) может быть сведено к интегрированию уравнения относительно G-функции Мейера. Пусть оператор (2) факторизуется в форме (7). Тогда замена независимой переменной $t=\kappa(\mu n^{-1}z)^n$, где $\kappa=\pm1$, приводит (1) к виду

$$\left[\kappa t-\left(tD_t-\frac{\lambda_1}{n}\right)\left(tD_t-\frac{\lambda_2}{n}\right)\cdots\left(tD_t-\frac{\lambda_n}{n}\right)\right]w=0,$$

т.е. к частному случаю уравнения

$$\left[(-1)^{p-M-N}t\prod_{j=1}^{p}\left(tD_t-\alpha_j+1\right)-\prod_{j=1}^{q}bb(tD_t-\beta_j)\right]w=0,$$

которому удовлетворяет G-функция Мейера $w(t)=G_{pq}^{MN}\begin{pmatrix}\alpha_1,\dots,\alpha_p\\ \beta_1,\dots,\beta_q\end{pmatrix}$ (здесь при $p=0$ или $q=0$ соответствующее пустое произведение в уравнении равно 1). Определение функции G и некоторые соотношения, связывающие ее с другими специальными функциями, см. в [4, гл. 5].

Найдем условия, при которых решение уравнения (1), построенное в окрестности $z=0$ методом Фробениуса, не содержит логарифмических членов. В данном случае $L_n=E_n-\mu^n$, и функция (5) равна

$$f(\lambda,z)=f_0(\lambda)+f_n(\lambda)z^n,$$

где

$$f_n(\lambda) = -\mu^n = \text{const},$$

$$f_0(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + \sum_{k=1}^{n-2}\Big[\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+k+1)C_n^k a_k\Big] + \lambda C_n^{n-1}a_{n-1} + a_n.$$

При такой функции $f(\lambda, z)$ определители $\Delta_\nu(\lambda)$ равны нулю, если $\nu \neq kn$, $k \in \mathbb{N}$. В случае значений ν, кратных n, имеем

$$\Delta_n(\lambda) = (-1)^{n+1}f_n(\lambda)f_0(\lambda+1)\cdots f_0(\lambda+n-1) = (-1)^n\mu^n\prod_{j=1}^{n-1}f_0(\lambda+j)$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}\Delta_{kn}(\lambda) = (-1)^{k(kn+1)}f_n(\lambda)f_0(\lambda+1)\cdots f_0(\lambda+n-1)f_n(\lambda+n)\times\\ \times f_0(\lambda+n+1)\,\cdots\, f_0(\lambda+2n-1)f_n(\lambda+2n)\,\cdots\, f_0(\lambda+kn-1) =\\ = (-1)^{k^2n}\mu^{kn}\prod_{j=1}^{n-1}f_0(\lambda+j)\prod_{j=n+1}^{2n-1}f_0(\lambda+j)\cdots\prod_{j=(k-1)n+1}^{kn-1}f_0(\lambda+j), \quad k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Предполагается, что λ_0 — наибольший из подмножества корней $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ уравнения $f_0(\lambda) = 0$, отличающихся на ненулевое целое число. Следовательно, величины $f_0(\lambda + (m-1)n + 1)$, …, $f_0(\lambda + mn - 1)$ в точке $\lambda = \lambda_0$ отличны от нуля при любом $m \in \mathbb{N}$ и, таким образом, $\Delta_{kn}(\lambda_0) \neq 0$. Это означает, что условия (11) для уравнения (1) нарушаются, если $\nu_j = kn$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Фундаментальная система решений уравнения* (1) *в окрестности* $z = 0$ *не содержит логарифмических членов тогда и только тогда, когда определяющее уравнение* $f_0(\lambda) = 0$ *не имеет кратных корней и все элементы каждого подмножества корней, отличающихся друг от друга на целое число, различны по модулю* n.

Пусть корни определяющего уравнения $f_0(\lambda) = 0$ равны

$$\lambda_1 = -a_1 - q_1, \quad \lambda_2 = -a_1 - q_2, \quad \dots, \quad \lambda_n = -a_1 - q_n, \tag{12}$$

$$q_1 + \cdots + q_n = -\frac{n(n-1)}{2} \tag{13}$$

(ср. с соотношением Фукса на левелевские показатели фуксова уравнения, см. [5]). В (12) n величин λ_j задаются с помощью $n+1$ параметров. Поэтому один параметр «лишний», что дает возможность наложить условие (13), означающее, что в операторе E_n коэффициент при D_z^{n-1} равен na_1z^{-1}.

Если при этом числа $q_1, \dots, q_n$ целые и различны по модулю n, то общее решение уравнения (1) выражается в элементарных функциях. А именно, с некоторыми параметрами

$$m_0, \dots, m_M \in \mathbb{Z}, \quad m_0 + \cdots + m_M = 0, \quad M = \max\{q_1, \dots, q_n\}$$

оно представимо в форме

$$w(z) = z^{m_0 - a_1}D_z\Big(z^{m_M}D_z\Big(z^{m_{M-1}}D_z\big(\cdots\big(z^{m_2}D_z(z^{m_1}v(z))\big)\cdots\big)\Big)\Big) \tag{14}$$

где $v(z)$ удовлетворяет линейному ОДУ с постоянными коэффициентами

$$(D_z^n - \mu^n)v = 0. \tag{15}$$

При $n = 2$ формула (14) дает известное общее решение

$$w(z) = z^{M+1-a_1}\big(z^{-1}D_z\big)^M\big(z^{-1}v(z)\big)$$

ОДУ второго порядка

$$\frac{1}{z^2}\big(zD_z + a_1 + M\big)\big(zD_z + a_1 - M - 1\big)w - \mu^2 w = 0, \quad M \in \mathbb{Z}_+,$$

которое преобразованием растяжения сводится к уравнению Бесселя в стандартной форме с полуцелым параметром.

Каждая функция (14) допускает $M!$ эквивалентных представлений с различными наборами значений $m_0, \dots, m_M$. Процедура вычисления одного из возможных вариантов таких наборов, а также алгоритм нахождения оператора E_m, коммутирующего с данным E_n, представлены в [2]. Там же перечислены собственные функции вида (14) коммутирующих операторов Эйлера 4, 6, 8 и 10 порядков, при этом из 196 пар операторов 8 и 10 порядков приведена только 21 пара (где $E_8 = E_4^2$ или E_8, E_{10} дополнительно коммутируют с E_6). Некоторые примеры операторов Эйлера, соответствующих решениям (14) задачи (1), имеются в [3, 7].

Ниже в таблице 1 перечислены собственные функции вида (14) коммутирующих операторов Эйлера 6 и 9 порядков. В п. 0.1 содержатся все решения такого вида уравнений Бесселя третьего порядка. Что касается уравнений (1) шестого и девятого порядка, то существуют и другие, не коммутирующие друг с другом, операторы Эйлера E_6 и E_9, имеющие собственную функцию вида (14). Для каждого из операторов E_n, $n = 3, 6, 9$, функция $v(z)$ удовлетворяет уравнению (15) с соответствующим значением n. Здесь $M, K \in \mathbb{Z}$, причем $M \geqslant M_0$, $K = M_0, \dots, M$, параметр M_0 указан как первая цифра в двойной нумерации, используемой в первом столбце таблицы 1. Для оператора Эйлера (2), факторизованного в форме (7) с величинами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, задаваемыми выражениями (12), (13), используется обозначение $E_n = \Lambda_n\{q_1, \dots, q_n\}$.

4. Совместная собственная функция коммутирующих операторов Эйлера. В множестве линейных обыкновенных дифференциальных операторов операторы Эйлера образуют замкнутое подмножество (см. [6]), т.е. линейный оператор L_m и оператор Эйлера E_n коммутируют,

$$[L_m, E_n] \equiv L_m E_n - E_n L_m = 0,$$

при условии, что L_m является линейной комбинацией операторов Эйлера, коммутирующих с E_n. Совместная собственная функция $\psi(z)$ пары коммутирующих операторов L_m, L_n является решением системы

$$(L_m - \mu^m)\psi = 0, \quad (L_n - \mu^n)\psi = 0. \tag{16}$$

Если $m = lm'$, $n = ln'$, где l, m', $n' \in \mathbb{N}$ и числа m', n' взаимно просты, ранг пары операторов L_m, L_n равен l. Операторы в уравнениях (16) факторизуются в форме

$$L_m - \mu^m = M_{m-l} L_l, \quad L_n - \mu^n = N_{n-l} L_l$$

с некоторыми линейными операторами L_l, M_{m-l}, N_{n-l} так, что функция $\psi(z)$ является решением линейного ОДУ l-го порядка

$$L_l \psi = 0. \tag{17}$$

В случае, когда L_m и L_n в системе (16) являются операторами Эйлера, оказывается, что дифференциальной подстановкой вида

$$\psi = D_z^{M_0} w + \sum_{k=1}^{M_0} \frac{c_k}{z^k} D_z^{M_0 - k} w, \quad c_k = \mathrm{const}, \tag{18}$$

уравнение (17) сводится к интегрированию задачи о собственных значениях некоторого оператора Эйлера l-го порядка,

$$E_l w = \mu^l w, \tag{19}$$

с тем же параметром μ, что и в системе (3).

Алгоритм нахождения для данного оператора E_m коммутирующего с ним оператора E_n описан в [2]. Его применение к операторам шестого и девятого порядка дает следующие 4 пары коммутирующих операторов Эйлера (g, $G \in \mathbb{C}$, $l = 3$):

I. $E_6 = \Lambda_6\Big\{g,\ g-3,\ G,\ G-3,\ -g-G-3,\ -g-G-6\Big\} = E_3^2,$

$E_9 = \Lambda_9\Big\{g,\ g-3,\ g-6,\ G,\ G-3,\ G-6,\ -g-G-3,\ -g-G-6,\ -g-G-9\Big\} = E_3^3,$

$L_3 = E_3 - \mu^3, \quad E_3 = \Lambda_3\{g,\ G,\ -g-G-3\};$

Таблица 1. Коммутирующие операторы порядков 6 и 9 и их собственные функции

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
0.1	$\Lambda_6\{M, M-3, M-3K-1, M-3K-4, 3K-2M-2, 3K-2M-5\} = E_3^2$, $\Lambda_9\{M, M-3, M-6, M-3K-1, M-3K-4, M-3K-7, 3K-2M-2, 3K-2M-5, 3K-2M-8\} = E_3^3$, $E_3 = \Lambda_3\{M, M-3K-1, 3K-2M-2\}$, $w = z^{3K-M+1-a_1}(z^{-2}D_z)^K z^{3M-3K+1}(z^{-2}D_z)^{M-K}(vz^{-2})$
1.1	$\Lambda_6\{M, M-3, M-3K+2, M-3K-1, 3K-2M-2, 3K-2M-11\}$, $\Lambda_9\{M, M-3, M-6, M-3K+2, M-3K-1, M-3K-4, 3K-2M-2, 3K-2M-8, 3K-2M-14\}$ $w = z^{2M-3K+6-a_1}D_z(z^{6K-3M-7}(z^{-2}D_z)^{K-1}z^{3M-3K+1}(z^{-2}D_z)^{M-K}(vz^{-2}))$
1.2	$\Lambda_6\{M, M-3, M-3K+2, M-3K-7, 3K-2M-2, 3K-2M-5\}$, $\Lambda_9\{M, M-3, M-6, M-3K+2, M-3K-4, M-3K-10, 3K-2M-2, 3K-2M-5, 3K-2M-8\}$ $w = z^{3K-M+2-a_1}D_z(z^{-3}(z^{-2}D_z)^{K-1}z^{3M-3K+1}(z^{-2}D_z)^{M-K}(vz^{-2}))$
1.3	$\Lambda_6\{M, M-9, M-3K+2, M-3K-1, 3K-2M-2, 3K-2M-5\}$, $\Lambda_9\{M, M-6, M-12, M-3K+2, M-3K-1, M-3K-4, 3K-2M-2, 3K-2M-5, 3K-2M-8\}$ $w = z^{4-M-a_1}D_z(z^{3K-5}(z^{-2}D_z)^{K-1}z^{3M-3K+1}(z^{-2}D_z)^{M-K}(vz^{-2}))$
2.1	$\Lambda_6\{M, M-3, M-3K+5, M-3K-4, 3K-2M-2, 3K-2M-11\}$, $\Lambda_9\{M, M-3, M-6, M-3K+5, M-3K-1, M-3K-7, 3K-2M-2, 3K-2M-8, 3K-2M-14\}$ $w = z^{2M-3K+6-a_1}D_z(z^{6K-3M-6}D_z(z^{-3}(z^{-2}D_z)^{K-2}z^{3M-3K+1}(z^{-2}D_z)^{M-K}(vz^{-2})))$
2.2	$\Lambda_6\{M, M-9, M-3K+5, M-3K+2, 3K-2M-2, 3K-2M-11\}$, $\Lambda_9\{M, M-6, M-12, M-3K+5, M-3K+2, M-3K-1, 3K-2M-2, 3K-2M-8, 3K-2M-14\}$ $w = z^{4-M-a_1}D_z(z^{3K-4}D_z(z^{-3}(z^{-2}D_z)^{K-2}z^{3M-3K+1}(z^{-2}D_z)^{M-K}(vz^{-2})))$
2.3	$\Lambda_6\{M, M-9, M-3K+5, M-3K-4, 3K-2M-2, 3K-2M-5\}$, $\Lambda_9\{M, M-6, M-12, M-3K+5, M-3K-1, M-3K-7, 3K-2M-2, 3K-2M-5, 3K-2M-8\}$ $w = z^{4-M-a_1}D_z(z^{3M-3K+3}D_z(z^{6K-3M-10}(z^{-2}D_z)^{K-2}z^{3M-3K+1}(z^{-2}D_z)^{M-K}(vz^{-2})))$
3.1	$\Lambda_6\{M, M-9, M-3K+8, M-3K-1, 3K-2M-2, 3K-2M-11\}$, $\Lambda_9\{M, M-6, M-12, M-3K+8, M-3K+2, M-3K-4, 3K-2M-2, 3K-2M-8, 3K-2M-14\}$ $w = z^{4-M-a_1}D_z(z^{3M-3K+3}D_z(z^{6K-3M-9}D_z(z^{-3}(z^{-2}D_z)^{K-3}z^{3M-3K+1}(z^{-2}D_z)^{M-K}(vz^{-2}))))$

II. $$E_6 = \Lambda_6\Big\{g,\ g-9,\ G,\ G-3,\ -g-G,\ -g-G-3\Big\},$$
$$E_9 = \Lambda_9\Big\{g,\ g-6,\ g-12,\ G,\ G-3,\ G-6,\ -g-G,\ -g-G-3,\ -g-G-6\Big\},$$
$$\begin{aligned}L_3 = D_z^3 &+ \left(\frac{3a_1}{z} + \frac{3\delta}{z(\delta-\mu^3z^3)}\right)D_z^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{z^2}\Big(3a_1^2 - 3a_1 - g^2 - gG - G^2 + 3g - 11\Big) + \frac{3\delta(2a_1 - g + 4)}{z^2(\delta-\mu^3z^3)}\right)D_z \\ &+ \frac{1}{z^3}\Big(a_1^3 - 3a_1^2 + \big(3g - g^2 - gG - G^2 - 9\big)a_1 + G(3-g)(g+G) + 9(2g-3)\Big) + \\ &+ \frac{3\delta\big(a_1^2 + (3-g)a_1 - G(g+G) + 3(3-2g)\big)}{z^3(\delta-\mu^3z^3)} - \mu^3,\end{aligned}$$

$$\delta = 3(g-G-3)(2g+G-3), \quad \psi = D_z w + (a_1+g-4)z^{-1}w,$$
$$E_3 = \Lambda_3\{g-1,\ G-1,\ -g-G-1\}.$$

III. $$E_6 = \Lambda_6\Big\{g,\ g-3,\ G,\ G-9,\ 3-g-G,\ -g-G-6\Big\},$$
$$E_9 = \Lambda_9\Big\{g,\ g-3,\ g-6,\ G,\ G-6,\ G-12,\ 3-g-G,\ -g-G-3,\ -g-G-9\Big\},$$
$$L_3 = D_z^3 + \left(\frac{3a_1}{z} + \frac{3\varepsilon(2\delta-\mu^3z^3)}{z(\varepsilon(\delta-\mu^3z^3)+\mu^6z^6)}\right)D_z^2 +$$
$$+\left(\frac{1}{z^2}\big(3a_1^2-3a_1-g^2-gG-G^2+3G-20\big)+\right.$$
$$\left.+\frac{3\varepsilon\big(\delta(4a_1+g+8)-2(a_1+g+2)\mu^3z^3\big)}{z^2\big(\varepsilon(\delta-\mu^3z^3)+\mu^6z^6\big)}\right)D_z+$$
$$+\frac{1}{z^3}\Big(a_1^3-3a_1^2+(3G-g^2-gG-G^2-18)(a_1+g)+g^2(g+3)\Big)+$$
$$+\frac{3\varepsilon\Big(\delta\big(2a_1^2+(g+6)a_1+g(6-g)\big)-\big(a_1^2+(2g+3)a_1+g(g+12)\big)\mu^3z^3\Big)}{z^3\big(\varepsilon(\delta-\mu^3z^3)+\mu^6z^6\big)}-\mu^3,$$
$$\delta = 3(G-g-3)(2g+G), \quad \varepsilon = 3(g+2G)(g+2G-6),$$
$$\psi = D_z^2 w + (2a_1-g-6)z^{-1}D_z w + (a_1-g-G-2)(a_1+G-5)z^{-2}w,$$
$$E_3 = \Lambda_3\{g-2,\ G-2,\ 1-g-G\}.$$

IV. $$E_6 = \Lambda_6\Big\{g,\ g-9,\ G,\ G-9,\ 6-g-G,\ -g-G-3\Big\},$$
$$E_9 = \Lambda_9\Big\{g,\ g-6,\ g-12,\ G,\ G-6,\ G-12,\ 6-g-G,\ -g-G,\ -g-G-6\Big\},$$
$$L_3 = D_z^3 + \left(\frac{3a_1}{z} + \frac{9(\varepsilon-3\delta\mu^6z^6)}{z(\varepsilon-9\delta\mu^6z^6+\mu^9z^9)}\right)D_z^2 + \left(\frac{1}{z^2}\big(3a_1^2-3a_1-\delta-35\big)+\right.$$
$$\left.+\frac{\big(9\varepsilon(2a_1+5)-54\delta(a_1+1)+81(g-2)(G-2)(4-g-G)\big)\mu^6z^6}{z^2\big(\varepsilon-9\delta\mu^6z^6+\mu^9z^9\big)}\right)D_z+$$
$$+\frac{1}{z^3\big(\varepsilon-9\delta\mu^6z^6+\mu^9z^9\big)}\Big(3\varepsilon\big(3a_1^2+12a_1-\delta-15\big)+\varepsilon\mu^3z^3+$$
$$+9\Big(3\delta(20-a_1^2-a_1)-\delta^2+9(g-2)(G-2)(4-g-G)(a_1+5)\Big)\mu^6z^6\Big)+$$
$$+\frac{1}{z^3}\Big(a_1^3-3a_1^2-(\delta+33)a_1+(g-3)(G-3)(3-g-G)+27\Big)-\mu^3,$$
$$\delta = g^2+gG+G^2-6g-6G+3,$$
$$\varepsilon = 27(g-G+3)(g-G-3)(g+2G-3)(g+2G-9)(2g+G-3)(2g+G-9),$$
$$\psi = D_z^3 w + 3(a_1-3)z^{-1}D_z^2 w + \big(3a_1^2-21a_1-\delta+28\big)z^{-2}D_z w+$$
$$+(a_1+g-6)(a_1+G-6)(a_1-g-G)z^{-3}w,$$
$$E_3 = \Lambda_3\{g-3,\ G-3,\ 3-g-G\}.$$

Здесь для каждой пары E_6, E_9 приведены оператор L_3 из уравнения (17), дифференциальная подстановка, приводящая (17) к виду $E_3w=\mu^3w$, и сам оператор E_3. Перечисленные операторы E_6, E_9 коммутируют также с операторами $E_{6k+6}=E_6^{k+1}$, $E_{6k+9}=E_6^kE_9$, $k\in\mathbb{N}$, ранга 3. При этом случай I тривиален: E_6 и E_9 являются степенями одного оператора третьего порядка и для них условие коммутирования выполняется всегда.

Можно заметить, что операторы E_6, E_9 пункта 0.1 таблицы 1 принадлежат случаю I, пунктов 1.1, 1.2 и 1.3 — случаю II, пунктов 2.1, 2.2 и 2.3 — случаю III, пункта 3.1 — случаю IV. В таблице 1 $M \geqslant M_0$ и параметр M_0 определяет число дифференцирований в подстановке (18), приводящей уравнение $L_3\psi = 0$ к уравнению Бесселя третьего порядка. То же справедливо и для операторов ранга 2. Так, например, 9 пар операторов E_4 и E_{10} из [2], имеющих собственную функцию вида (14), являются частными случаями следующих шести пар коммутирующих операторов ($c \in \mathbb{C}$, $l = 2$):

I. $E_4 = \Lambda_4\Big\{c,\ c-2,\ -c-1,\ -c-3\Big\} = E_2^2$,

$$E_{10} = \Lambda_{10}\Big\{c,\ c-2,\ c-4,\ c-6,\ c-8,\ -c-1,\ -c-3,\ -c-5,\ -c-7,\ -c-9\Big\} = E_2^5;$$

здесь $E_2 = \Lambda_2\{c, -c-1\}$, в уравнении (17) $L_2 = E_2 - \mu^2$.

II. $E_4 = \Lambda_4\big\{c,\ c-2,\ 1-c,\ -c-5\big\}$,

$$E_{10} = \Lambda_{10}\Big\{c,\ c-2,\ c-4,\ c-6,\ c-8,\ 1-c,\ -c-3,\ -c-5,\ -c-7,\ -c-11\Big\},$$

уравнение (17) с оператором

$$L_2 = D_z^2 + \left(\frac{2a_1}{z} + \frac{2\varepsilon}{z(\varepsilon - \mu^2 z^2)}\right) D_z + \frac{1}{z^2}\big(a_1^2 - a_1 - c^2 - c - 4\big) + \frac{2\varepsilon(a_1 + c + 2)}{z^2(\varepsilon - \mu^2 z^2)} - \mu^2,$$

где $\varepsilon = 2(2c+1)$, подстановкой

$$\psi = D_z w + (a_1 - c - 2) z^{-1} w$$

сводится к уравнению (19), где $E_2 = \Lambda_2\{c-1, -c\}$.

III. $E_4 = \Lambda_4\big\{c,\ c-6,\ 3-c,\ -c-3\big\}$,

$$E_{10} = \Lambda_{10}\Big\{c,\ c-4,\ c-6,\ c-8,\ c-12,\ 3-c,\ -c-1,\ -c-3,\ -c-5,\ -c-9\Big\},$$

уравнение (17) с оператором

$$L_2 = D_z^2 + \left(\frac{2a_1}{z} + \frac{4\varepsilon}{z(\varepsilon - \mu^4 z^4)}\right) D_z + \frac{1}{z^2}(a_1^2 - a_1 - c^2 + 3c - 10) + \frac{\varepsilon(4a_1 + 10 + \mu^2 z^2)}{z^2(\varepsilon - \mu^4 z^4)} - \mu^2,$$

где $\varepsilon = 4(2c-1)(2c-5)$, подстановкой

$$\psi = D_z^2 w + 2(a_1 - 2) z^{-1} D_z w + (a_1 - c - 1)(a_1 + c - 4) z^{-2} w$$

сводится к уравнению (19), где $E_2 = \Lambda_2\{c-2, 1-c\}$.

IV. $E_4 = \Lambda_4\big\{c,\ c-2,\ 3-c,\ -c-7\big\}$,

$$E_{10} = \Lambda_{10}\Big\{c,\ c-2,\ c-4,\ c-6,\ c-8,\ 3-c,\ -c-1,\ -c-5,\ -c-9,\ -c-13\Big\},$$

уравнение (17) с оператором

$$L_2 = D_z^2 + \left(\frac{2a_1}{z} + \frac{4\varepsilon - 2\delta\mu^2 z^2}{z(\varepsilon - \delta\mu^2 z^2 + \mu^4 z^4)}\right) D_z + \\ + \frac{1}{z^2}\big(a_1^2 - a_1 - c^2 - c - 12\big) + \frac{4\varepsilon(a_1 + c + 3) - 2\big(\delta a_1 + 6(2c^2 + 5c + 6)\big)\mu^2 z^2}{z^2(\varepsilon - \delta\mu^2 z^2 + \mu^4 z^4)} - \mu^2,$$

где $\delta = 6(2c+1)$, $\varepsilon = 12(2c-1)(2c+3)$, подстановкой

$$\psi = D_z^2 w + (2a_1 - 2c - 5) z^{-1} D_z w + (a_1 - c - 1)(a_1 - c - 5) z^{-2} w$$

сводится к уравнению (19), где $E_2 = \Lambda_2\{c-2, 1-c\}$.

V. $E_4 = \Lambda_4\{c,\ c-6,\ 5-c,\ -c-5\}$,

$$E_{10} = \Lambda_{10}\Big\{c,\ c-4,\ c-6,\ c-8,\ c-12,\ 5-c,\ 1-c,\ -c-3,\ -c-7,\ -c-11\Big\},$$

уравнение (17) с оператором

$$L_2 = D_z^2 + \left(\frac{2a_1}{z} + \frac{6\varepsilon - 2\delta\mu^4 z^4}{z\big(\varepsilon - \delta\mu^4 z^4 + \mu^6 z^6\big)}\right) D_z + \frac{1}{z^2}\big(a_1^2 - a_1 - c^2 + 3c - 18\big) + \\ + \frac{2\varepsilon(3a_1 + c + 9) + \varepsilon\mu^2 z^2 - \delta(2a_1 + 4c - 3)\mu^4 z^4}{z^2(\varepsilon - \delta\mu^4 z^4 + \mu^6 z^6)} - \mu^2,$$

где $\delta = 4(2c-3)$, $\varepsilon = 24(2c+1)(2c-3)(2c-7)$, подстановкой

$$\psi = D_z^3 w + (3a_1 - c - 6)z^{-1} D_z^2 w + \Big(3a_1^2 - (2c+15)a_1 - c^2 + 9c + 12\Big) z^{-2} D_z w + \\ + (a_1 - c)(a_1 - c - 4)(a_1 + c - 5) z^{-3} w$$

сводится к уравнению (19), где $E_2 = \Lambda_2\{c-3,\ 2-c\}$.

VI. $E_4 = \Lambda_4\{c,\ c-10,\ 7-c,\ -c-3\}$,

$$E_{10} = \Lambda_{10}\Big\{c,\ c-4,\ c-8,\ c-12,\ c-16,\ 7-c,\ 3-c,\ -c-1,\ -c-5,\ -c-9\Big\},$$

уравнение (17) с оператором

$$L_2 = D_z^2 + \left(\frac{2a_1}{z} + \frac{8\varepsilon - 4\delta\mu^4 z^4}{z\big(\varepsilon - \delta\mu^4 z^4 + \mu^8 z^8\big)}\right) D_z + \\ + \frac{1}{z^2}\big(a_1^2 - a_1 - c^2 + 7c - 36\big) + \frac{4\varepsilon(2a_1 + 9) + \varepsilon\mu^2 z^2 - 2\delta(2a_1 + 5)\mu^4 z^4 - \delta\mu^6 z^6}{z^2\big(\varepsilon - \delta\mu^4 z^4 + \mu^8 z^8\big)} - \mu^2,$$

где $\delta = 12(2c-5)(2c-9)$, $\varepsilon = 144(2c-1)(2c-5)(2c-9)(2c-13)$, подстановкой

$$\psi = D_z^4 w + 4(a_1 - 3)z^{-1} D_z^3 w + \\ + 2\big(3a_1^2 - 21a_1 - c^2 + 7c + 21\big) z^{-2} D_z^2 w + 4(a_1 - 4)\big(a_1^2 - 8a_1 - c^2 + 7c\big) z^{-3} D_z w + \\ + (a_1 - c + 1)(a_1 - c - 3)(a_1 + c - 6)(a_1 + c - 10) z^{-4} w$$

сводится к уравнению (19), где $E_2 = \Lambda_2\{c-4,\ 3-c\}$.

Здесь операторы E_4, E_{10} коммутируют также с операторами $E_{4k+4} = E_4^{k+1}$, $E_{4k+10} = E_4^k E_{10}$, $k \in \mathbb{N}$, ранга 2, а в первых трех случаях — еще и с оператором шестого порядка.

5. Заключение. Данная работа посвящена в основном коммутирующим операторам Эйлера ранга 3. Для всех таких операторов шестого и девятого порядка описаны случаи, когда соответствующая задача о собственных значениях имеет общее решение, выражающееся в элементарных функциях. При этом получены все операторы Эйлера третьего порядка с собственной функцией такого вида. Показано, что уравнение для совместной собственной функции коммутирующих операторов Эйлера ранга l может быть сведено к интегрированию уравнения Бесселя l-го порядка.

Операторы Эйлера относятся к одному из простых видов линейных дифференциальных операторов. Однако они играют важную роль в теории фуксовых уравнений. Как отмечено в [5], фуксово уравнение (4) можно рассматривать как голоморфную деформацию соответствующего уравнения Эйлера с оператором (8), при которой числа $b_k(0)$ заменяются на голоморфные функции $b_k(z)$. При этом корни определяющего уравнения (6) совпадают с показателями асимптотик решений уравнения (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков: ГНТИУ, 1939.
2. *Багдерина Ю. Ю.* Уравнения Бесселя высоких порядков, интегрируемые в элементарных функциях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2017. — *140*. — С. 3–17.
3. *Байчорова Ф. Х.* Об аналогах функций Бесселя третьего порядка// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 1. — С. 12–17.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1965.
5. *Болибрух А. А.* Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. — М.: МЦНМО, 2000.
6. *Соколов В. В.* Примеры коммутативных колец дифференциальных операторов// Функц. анал. прилож. — 1978. — *12*, № 1. — С. 82–83.
7. *Шабат А. Б., Эльканова З. С.* О коммутирующих дифференциальных операторах// Теор. мат. физ. — 2010. — *162*, № 3. — С. 334–344.
8. *Forsyth A. R.* Theory of differential equations. Part III. Ordinary linear equations. — Cambridge: At the University Press, 1902.

Ю. Ю. Багдерина
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, Уфа, Россия
E-mail: bagderinayu@yandex.ru