ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 3–17

УДК 517.927, 517.923

УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

© 2017 г. Ю. Ю. БАГДЕРИНА

Аннотация. Задача о собственной функции скалярного оператора Эйлера приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, являющемуся аналогом уравнения Бесселя высокого порядка. Его решение выражается в терминах элементарных функций, когда соответствующий оператор Эйлера факторизуется определенным образом. Получена формула, описывающая такие решения. Рассматривается задача о совместной собственной функции двух операторов Эйлера. Приводятся коммутирующие операторы Эйлера порядков 4, 6, 10 и формула, задающая их собственную функцию, а также коммутирующие операторы порядков 6 и 9.

Ключевые слова: оператор Эйлера, собственная функция, коммутирующие операторы.

AMS Subject Classification: 47E05, 34L10, 34B30

СОДЕРЖАНИЕ

1. Коммутирующие дифференциальные операторы

Два линейных скалярных дифференциальных оператора

$$A = D^n + \sum_{k=1}^{n} A_k(x) D^{n-k}, \quad B = D^m + \sum_{j=1}^{m} B_j(x) D^{m-j}, \quad D = \frac{d}{dx} \tag{1}$$

коммутируют, если выполнено соотношение

$$[A, B] \equiv AB - BA = 0.$$

Алгебраические свойства коммутативных колец дифференциальных операторов описаны в [6, 9]. Они нашли свое применение в теории интегрирования нелинейных уравнений типа Кортевега—де Фриза методами алгебраической геометрии (см. [2]). Эта проблема связана с задачей об описании операторов (1), имеющих совместную собственную функцию, и построении такой функции. В случае взаимно простых порядков m и n этих операторов она решена в [2]. Согласно [6], если операторы (1) удовлетворяют соотношению $AB = BA$, то существует такой ненулевой полином $Q(\lambda, \mu)$, что $Q(A, B) = 0$. В случае общего положения для точки T кривой Γ, заданной уравнением $Q(\lambda, \mu) = 0$, существует такая совместная собственная функция $\psi(T, x)$ операторов A и B, что $A\psi = \lambda\psi$, $B\psi = \mu\psi$. Число l линейно независимых совместных собственных функций, отвечающих общей точке $T \in \Gamma$, называется рангом пары A, B. Ранг совпадает с наибольшим общим множителем чисел m и n. При взаимно простых m, n ранг пары операторов A, B равен единице.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда.

В частном случае, когда $A_k = \alpha_k x^{-k}$, $B_j = \beta_j x^{-j}$ с некоторыми постоянными α_k, β_j, операторы (1) принято называть операторами Эйлера. Справедливо следующее утверждение (см. [4]).

Теорема 1.1. *Если порядки n и m операторов Эйлера* (1)*, удовлетворяющих соотношению*
$$A^m = B^n, \tag{2}$$
взаимно просты, то существуют такие полином P с ненулевым свободным членом и постоянная $\gamma \in \mathbb{C}$, что функция
$$\psi(\lambda, x) = (\lambda x)^\gamma P(\lambda x) \mathrm{e}^{\lambda x} \tag{3}$$
является общим решением уравнений $A\psi = \lambda^n \psi$ и $B\psi = \lambda^m \psi$.

Множество линейных операторов, коммутирующих с A, является коммутативным кольцом, образованным всеми полиномами от A с постоянными коэффициентами (см. [9]). В рассматриваемом здесь частном случае операторов Эйлера отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Оператор Эйлера A коммутирует со всеми операторами $B = A^k$, $k \in \mathbb{N}$.*

Более интересным и нетривиальным представляется изучение операторов B, коммутирующих с оператором Эйлера A и не совпадающих с A^k. В случае произвольного ранга $l > 1$ коммутирующие операторы (1) с полиномиальными коэффициентами описаны в [8]. Если $n = 2l$, $m = (2g+1)l$, $g \in \mathbb{N}$, то соотношение $Q(A, B) = 0$ задается в форме
$$B^2 = A^{2g+1} + c_{2g} A^{2g} + \dots + c_1 A + c_0, \quad c_0, \dots, c_{2g} = \text{const}\,.$$
Нетрудно видеть, что в частном случае операторов Эйлера должно выполняться условие $c_0 = \ldots = c_{2g} = 0$ и имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Коммутирующие операторы Эйлера* (1) *порядков $n = ln'$ и $m = lm'$, где l, m', $n' \in \mathbb{N}$, удовлетворяют соотношению*
$$A^{m'} = B^{n'}. \tag{4}$$

В разделе 4 данной работы разрабатывается практический подход к проверке условий (2), (4) теорем 1.1, 1.3. В разделе 3 предлагается процедура построения общего решения задачи о собственных функциях оператора Эйлера, разрешимой в элементарных функциях. Необходимые обозначения вводятся в разделе 2.

2. Уравнение Бесселя n-го порядка

Собственной функцией оператора Эйлера n-го порядка
$$L_n = D^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{a_k}{x^k} D^{n-k} = D^n + n\frac{a_1}{x} D^{n-1} + \dots + n\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} D + \frac{a_n}{x^n}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \tag{5}$$
называется функция $y(x)$, являющаяся решением обыкновенного дифференциального уравнения
$$L_n y = \lambda y, \quad \lambda = \text{const} \neq 0. \tag{6}$$
Уравнение (6) будем называть уравнением Бесселя n-го порядка, поскольку при $n = 2$ оно совпадает с обычным уравнением Бесселя
$$L_2 y \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2a_1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{a_2}{x^2} y = \lambda y. \tag{7}$$
Уравнение (7) имеет решение, выражающееся в элементарных функциях, тогда и только тогда, когда коэффициент a_2 равен
$$a_2 = (a_1 + M)(a_1 - M - 1), \quad M \in \mathbb{Z}_+.$$
В этом случае уравнение (7) представимо в виде
$$(xD + a_1 + M)(xD + a_1 - M - 1)y = \lambda x^2 y, \tag{8}$$

а соответствующий оператор Эйлера в левой части (7) факторизуется:

$$L_2 = \left(D + \frac{a_1 - M}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 + M}{x}\right) = \left(D + \frac{a_1 + M + 1}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 - M - 1}{x}\right). \tag{9}$$

Отметим, что множители в левой части уравнения (8) перестановочны, а в обеих факторизациях (9) они имеют фиксированный порядок. Решением уравнения (7) с оператором (9) является функция

$$y = x^{M+1-a_1}\left(\frac{1}{x}D\right)^M \frac{w(x)}{x}, \tag{10}$$

где $w(x)$ удовлетворяет линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \lambda w = 0.$$

Нетрудно видеть, что функция (10) является комбинацией квазиполиномов вида (3),

$$y = x^{-M-a_1}\sum_{j=1}^{2} c_j P_M(\lambda_j x)\mathrm{e}^{\lambda_j x}, \quad c_1, c_2 = \mathrm{const},$$

где λ_1, λ_2 — корни квадратного уравнения $k^2 = \lambda$, $P_M(z)$ — некоторый многочлен степени M.

Изучая аналогичным образом уравнение Бесселя n-го порядка, можно заметить, что для каждого $M \in \mathbb{Z}_+$ имеется $C^M_{M+n-2} = \dfrac{(M+n-2)!}{M!(n-2)!}$ наборов коэффициентов a_k оператора (5), когда решением уравнения (6) является функция вида

$$y = x^{m_0 - a_1} D\Big(x^{m_M} D\Big(x^{m_{M-1}} D\Big(\dots\big(x^{m_2} D\big(x^{m_1} w(x)\big)\big)\dots\Big)\Big)\Big) \tag{11}$$

с некоторыми параметрами $m_i \in \mathbb{Z}$, $m_0 + \dots + m_M = 0$, где $w(x)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{d^n w}{dx^n} - \lambda w = 0. \tag{12}$$

Функция (11) также представима в виде

$$y = x^{-M-a_1}\sum_{j=1}^{n} c_j P_M(\lambda_j x)\mathrm{e}^{\lambda_j x}, \quad c_1, \dots, c_n = \mathrm{const}, \tag{13}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни уравнения $k^n = \lambda$, $P_M(z)$ — некоторый многочлен степени M. Во всех этих случаях уравнение (6) представимо в виде

$$\big(xD + a_1 + q_1\big)\big(xD + a_1 + q_2\big)\cdots\big(xD + a_1 + q_n\big)y = \lambda x^n y, \tag{14}$$

с некоторыми различными по модулю n числами $q_j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющими соотношениям

$$q_1 + \dots + q_n = \frac{n(1-n)}{2}, \quad \max\{q_1, \dots, q_n\} = M$$

(ср. [5, теорема 1]), которые связаны с параметрами соответствующей факторизации оператора (5)

$$L_n = \left(D + \frac{a_1 + r_n}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 + r_{n-1}}{x}\right)\cdots\left(D + \frac{a_1 + r_1}{x}\right), \quad r_j \in \mathbb{Z}, \quad r_1 + \dots + r_n = 0 \tag{15}$$

соотношениями

$$q_j = r_j - j + 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Сомножители в левой части уравнения (14) допускают $n!$ перестановок и, соответственно, оператор (5) имеет $n!$ различных представлений вида (15) (ср. с (9) при $n = 2$). В этом множестве представлений присутствует одна факторизация вида

$$L_n = \left(D + \frac{a_1 + ns_n}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 + ns_{n-1}}{x}\right)\cdots\left(D + \frac{a_1 + ns_1}{x}\right), \quad s_j \in \mathbb{Z}, \quad s_1 + \dots + s_n = 0. \tag{16}$$

Примем ее за базисную для того, чтобы зафиксировать соответствующий ей порядок следования сомножителей в левой части уравнения (14):

$$q_1 = ns_1, \quad q_2 = ns_2 - 1, \quad q_3 = ns_3 - 2, \quad \ldots, \quad q_{n-1} = ns_{n-1} - n + 2, \quad q_n = ns_n - n + 1. \tag{17}$$

3. Формула общего решения уравнения Бесселя с оператором (16)

Необходимо конкретизировать, чему равны числа $m_0, \ldots, m_M$ в формуле (11) для общего решения уравнения (6) с оператором (16). Параметр $M = \max\{q_1, \ldots, q_n\}$ задает число дифференцирований в формуле (11) и, соответственно, степень полинома $P_M(z)$ в (13). При $n = 2$ все значения степеней в формуле (10) для общего решения уравнения Бесселя определяются одним параметром M.

Если $n \geqslant 3$, то пусть σ — циклическая последовательность, образованная числами $q_1, \ldots, q_n$, следующими в порядке, указанном в (17). Помимо M при определении степеней $m_0, \ldots, m_M$ в формуле (11) важную роль играют $n-2$ члена последовательности σ, следующие за M. А именно, M_1 — член σ, следующий за M, и если $n > 3$, то M_{j+1} — член σ, следующий за M_j, $j = 1, \ldots, n-3$.

Заметим, что каждая функция (11) допускает $M!$ равносильных представлений с различными наборами значений $m_0, \ldots, m_M$. Это справедливо и для обычного уравнения Бесселя. Так, например, еще одним представлением функции (10) является

$$y = x^{-M-1-a_1}(x^3 D)^M \frac{w(x)}{x^{2M-1}}.$$

Здесь выбирается тот набор $m_1, \ldots, m_M$, в котором содержится наибольшее количество значений m_i, равных $1-n$ (ср. с (10), где все $m_1, \ldots, m_M$ равны -1).

0) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \ldots, n-2$, то решением уравнения (6) является функция

$$y = x^{(n-1)(M+1)-a_1}(x^{1-n}D)^M (x^{1-n} w(x)), \tag{18}$$

где $w(x)$ удовлетворяет уравнению (12). По этой формуле получается решение (10) уравнения Бесселя (8).

1) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \ldots, n-2$, кроме j_1, то решением уравнения (6) является функция (11), где $m_0 = 1 - n - M_{j_1}$, $m_i = 1 - n$ для всех $i = 1, \ldots, M$, кроме

$$i_1 = n^{-1}((n-1)M + M_{j_1} + j_1 + n),$$

для которого

$$m_{i_1} = (n-1)M + M_{j_1}.$$

2) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \ldots, n-2$, кроме j_1, j_2, то решением уравнения (6) является функция (11), где $m_0 = 1 - n - M_{j_1}$, $m_i = 1 - n$ для всех $i = 1, \ldots, M$, кроме

$$i_1 = n^{-1}((n-2)M + M_{j_1} + M_{j_2} + j_1 + j_2 + n), \quad i_2 = n^{-1}((n-1)M + M_{j_1} + j_1 + n),$$

для которых

$$m_{i_1} = (n-2)M + M_{j_1} + M_{j_2} + j_1, \quad m_{i_2} = M - M_{j_2} - j_1 - n + 1.$$

3) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \ldots, n-2$, кроме j_1, j_2, j_3, то решением уравнения (6) является функция (11), где $m_0 = 1 - n - M_{j_1}$, $m_i = 1 - n$ для всех $i = 1, \ldots, M$, кроме

$$\begin{aligned} i_1 &= n^{-1}((n-3)M + M_{j_1} + M_{j_2} + M_{j_3} + j_1 + j_2 + j_3 + n), \\ i_2 &= n^{-1}((n-2)M + M_{j_1} + M_{j_2} + j_1 + j_2 + n), \\ i_3 &= n^{-1}((n-1)M + M_{j_1} + j_1 + n), \end{aligned}$$

для которых

$$\begin{aligned} m_{i_1} &= (n-3)M + M_{j_1} + M_{j_2} + M_{j_3} + j_1 + j_2, \\ m_{i_2} &= M - M_{j_3} - j_2 - n + 1, \\ m_{i_3} &= M - M_{j_2} - j_1 - n + 1. \end{aligned}$$

Пункты 2), 3) обобщаются на случай произвольного $2 \leqslant k \leqslant n-2$ следующим образом:

k) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \dots, n-2$, кроме $j_1, \dots, j_k$, то решением уравнения (6) является функция (11), где $m_0 = 1 - n - M_{j_1}$, $m_i = 1 - n$ для всех $i = 1, \dots, M$, кроме

$$i_h = n^{-1}\Big((n-k+h-1)M + M_{j_1} + \dots + M_{j_{k-h+1}} + j_1 + \dots + j_{k-h+1} + n\Big), \quad h = 1, \dots, k,$$

для которых

$$m_{i_1} = (n-k)M + M_{j_1} + \dots + M_{j_k} + j_1 + \dots + j_{k-1},$$
$$m_{i_h} = M - M_{j_{k-h+2}} - j_{k-h+1} - n + 1, \quad h = 2, \dots, k.$$

В получаемом таким образом решении (13) уравнения (6) полином $P_M(z)$ имеет вид

$$P_M(z) = \sum_{j=0}^{M} (-1)^{j+M} \pi_j z^j, \quad \pi_j \in N, \quad 1 = \pi_M \leqslant \pi_{M-1} \leqslant \pi_{M-2} \leqslant \ldots \leqslant \pi_0, \tag{19}$$

причем

$$\begin{gathered} \pi_{M-1} \leqslant \frac{1}{2}(n-1)M(M+1), \\ \pi_{M-2} \leqslant \frac{1}{24}(n-1)(M-1)M(M+1)\big(3M(n-1) + 2(n+1)\big) \end{gathered} \tag{20}$$

(точные равенства для π_{M-1}, π_{M-2} достигаются в решениях, получаемых по формуле (18)). Поэтому, если для некоторого полинома (19) выполняется, например, условие

$$\pi_{M-1} > \frac{1}{2}(k-1)M(M+1), \quad k \in \mathbb{N},$$

то такой полином может быть частью собственной функции только операторов L_n порядка $n > k$.

Пример 1. Для оператора Эйлера четвертого порядка, допускающего факторизацию

$$L_4 = \left(D + \frac{a_1 - 4}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 + 4}{x}\right)\left(D + \frac{a_1}{x}\right)^2, \tag{21}$$

числа

$$s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = -1$$

задают последовательность (17) в виде

$$q_1 = 0, \quad q_2 = -1, \quad q_3 = 2, \quad q_4 = -7.$$

Здесь

$$M = 2, \quad M_1 = -7, \quad M_2 = 0$$

и, значит, условие $M = M_j + j$ нарушается для $j_1 = 1$. Следуя пункту l), вычислим

$$i_1 = 1, \quad m_0 = 4, \quad m_1 = -1, \quad m_2 = -3.$$

Подставив эти значения в (11), для уравнения $L_4 y = \lambda y$ получим общее решение

$$y = x^{4-a_1} D\left(\frac{1}{x^3} D \frac{w(x)}{x}\right) = \frac{1}{x^{2+a_1}} \sum_{j=1}^{4} c_j e^{\lambda_j x}\Big((\lambda_j x)^2 - 5\lambda_j x + 5\Big), \quad \frac{d^4 w}{dx^4} = \lambda w, \quad \lambda_j^4 = \lambda.$$

Для оператора Эйлера седьмого порядка

$$L_4 = \left(D + \frac{a_1}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 + 7}{x}\right)\left(D + \frac{a_1}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 - 7}{x}\right)\left(D + \frac{a_1}{x}\right)^3 \tag{22}$$

с

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_5 = s_7 = 0, \quad s_4 = -1, \quad s_6 = 1$$

последовательность (17) имеет вид

$$q_1 = 0, \quad q_2 = -1, \quad q_3 = -2, \quad q_4 = -10, \quad q_5 = -4, \quad q_6 = 2, \quad q_7 = -6.$$

В данном случае

$$M = 2, \quad M_1 = -6, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = -1, \quad M_4 = -2, \quad M_5 = -10$$

и $M \neq M_j + j$ для $j_1 = 1$, $j_2 = 5$. Выполненные в соответствии с пунктом 2) вычисления приводят к

$$i_1 = 1, \quad i_2 = 2, \quad m_0 = 0, \quad m_1 = -5, \quad m_2 = 5.$$

Подстановка этих значений в (11) для уравнения $L_7 y = \mu y$ дает общее решение

$$y = x^{-a_1} D\left(x^5 D\frac{v(x)}{x^5}\right) = \frac{1}{x^{2+a_1}} \sum_{j=1}^{7} c_j e^{\mu_j x}\Big((\mu_j x)^2 - 5\mu_j x + 5\Big), \quad \frac{d^7 v}{dx^7} = \mu v, \quad \mu_j^7 = \mu.$$

Таким образом, операторы (21), (22) имеют совместную собственную функцию (когда $\mu^4 = \lambda^7$).

4. Операторы Эйлера с совместной собственной функцией

Оператор L_n, допускающий факторизацию (15), будем обозначать

$$L_n = \Lambda_n\big[r_1, \dots, r_n\big] = \Lambda_n\big\{q_1, \dots, q_n\big\}, \quad q_j = r_j - j + 1, \quad j = 1, \dots, n. \tag{23}$$

Здесь квадратные скобки указывают на фиксированный порядок в последовательности чисел $\big[r_1, \dots, r_n\big]$, а фигурные скобки — на перестановочность чисел в множестве $\big\{q_1, \dots, q_n\big\}$. Пусть имеется также оператор

$$L_m = \Lambda_m\big[R_1, \dots, R_m\big] = \Lambda_m\big\{Q_1, \dots, Q_m\big\}, \quad Q_i = R_i - i + 1, \quad i = 1, \dots, m. \tag{24}$$

Если l — наибольший общий множитель чисел m и n, т.е. $m = lm'$, $n = ln'$, где m', n' — взаимно простые числа, то по теореме 1.3 операторы L_m и L_n имеют совместную собственную функцию при условии (4). Это условие легко проверяется рассмотрением последовательностей $q_1, \dots, q_n$ и $Q_1, \dots, Q_m$ в (23), (24).

Прежде всего, необходимым условием существования совместной собственной функции у операторов (23), (24) является

$$\max\big\{q_1, \dots, q_n\big\} = \max\big\{Q_1, \dots, Q_m\big\}. \tag{25}$$

Также, как видно из (13), если L_n имеет вид (5), а оператор L_m равен

$$L_m = D^m + \sum_{j=1}^{m} C_m^j \frac{b_j}{x^j} D^{m-j} = D^m + m\frac{b_1}{x} D^{m-1} + \dots + m\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} D + \frac{b_m}{x^m}, \quad b_i \in \mathbb{C},$$

то должно выполняться равенство

$$b_1 = a_1. \tag{26}$$

В равенство (4) входят два оператора порядка $m'n = n'm$, а именно,

$$\begin{aligned} L_n^{m'} &= \Lambda_{m'n}\Big[\underbrace{r_1, \dots, r_n, r_1, \dots, r_n, \dots, r_1, \dots, r_n}_{m' \text{ раз}}\Big] = \\ &= \Lambda_{m'n}\Big\{q_1, \dots, q_n, q_1 - n, \dots, q_n - n, \dots, q_1 - (m'-1)n, \dots, q_n - (m'-1)n\Big\}, \\ L_m^{n'} &= \Lambda_{n'm} = \Big[\underbrace{R_1, \dots, R_m, R_1, \dots, R_m, \dots, R_1, \dots, R_m}_{n' \text{ раз}}\Big] = \\ &= \Lambda_{n'm}\Big\{Q_1, \dots, Q_m, Q_1 - m, \dots, Q_m - m, \dots, Q_1 - (n'-1)m, \dots, Q_m - (n'-1)m\Big\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Если выполнены условия (25), (26) и множества

$$\begin{aligned} \Omega_n^{m'} &= \Big\{q_1, \dots, q_n, q_1 - n, \dots, q_n - n, \dots, q_1 - (m'-1)n, \dots, q_n - (m'-1)n\Big\}, \\ \Omega_m^{n'} &= \Big\{Q_1, \dots, Q_m, Q_1 - m, \dots, Q_m - m, \dots, Q_1 - (n'-1)m, \dots, Q_m - (n'-1)m\Big\} \end{aligned} \tag{28}$$

совпадают, то операторы $L_n^{m'}$, $L_m^{n'}$ равны друг другу и, следовательно, операторы (23), (24) имеют совместную собственную функцию.

Пример 2. Рассмотренные в примере 1 операторы

$$L_4 = \Lambda_4\big[0,\ 0,\ 4,\ -4\big], \quad L_7 = \Lambda_7\big[0,\ 0,\ 0,\ -7,\ 0,\ 7,\ 0\big]$$

имеют совместную собственную функцию, поскольку $L_4^7 = L_7^4$. В этом нетрудно убедиться, сравнив соответствующие множества Ω_4^7 и Ω_7^4 в операторах

$$L_4^7 = \Lambda_{28}\Big\{0,\ -1,\ 2,\ -7,\ -4,\ -5,\ -2,\ -11,\ -8,\ -9,\ -6,\ -15,\ -12,\ -13,$$
$$-10,\ -19,\ -16,\ -17,\ -14,\ -23,\ -20,\ -21,\ -18,\ -27,\ -24,\ -25,\ -22,\ -31\Big\},$$
$$L_7^4 = \Lambda_{28}\Big\{0,\ -1,\ -2,\ -10,\ -4,\ 2,\ -6,\ -7,\ -8,\ -9,\ -17,\ -11,\ -5,\ -13,$$
$$-14,\ -15,\ -16,\ -24,\ -18,\ -12,\ -20,\ -21,\ -22,\ -23,\ -31,\ -25,\ -19,\ -27\Big\}.$$

Изложенный выше подход можно также использовать, если для данного оператора L_n требуется перечислить операторы L_m, имеющие с ним совместную собственную функцию. В частности, такими операторами будут все операторы L_n^k, $k \in \mathbb{N}$. Также, если найден некоторый оператор L_m, имеющий с L_n совместную собственную функцию, то этим свойством будут обладать и все операторы L_m^k, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть порядки оператора L_n и искомого оператора L_m удовлетворяют условию $m = lm'$, $n = ln'$, где m', n' — взаимно простые числа. Возведя оператор L_n в степень m', получим оператор (27). Наибольшее число в множестве (28) равно $\varkappa_1 = \max\{q_1, \ldots, q_n\}$. Составим последовательность длины n'

$$\tau_1 = \Big[\varkappa_1,\ \varkappa_1 - m,\ \varkappa_1 - 2m,\ \ldots,\ \varkappa_1 - (n'-1)m\Big]. \tag{29_1}$$

На каждом следующем шаге $h = 2, \ldots, m$ в множестве (28), из которого исключены числа, входящие в последовательности (29_1), ..., (29_{h-1}), выбирается наибольшее число $\varkappa_h$ и составляется последовательность

$$\tau_h = \Big[\varkappa_h,\ \varkappa_h - m,\ \varkappa_h - 2m,\ \ldots,\ \varkappa_h - (n'-1)m\Big]. \tag{29_h}$$

Если в какую-либо из последовательностей $\tau_1, \ldots, \tau_m$ входит число, не принадлежащее множеству (28), то оператор Эйлера порядка m, имеющий с L_n совместную собственную функцию, не существует. Если множество чисел из всех последовательностей $\tau_1, \ldots, \tau_m$ совпадает с множеством (28), то это означает, что оператор

$$L_m = \Lambda_m\big\{\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \ldots,\ \varkappa_m\big\}$$

имеет с L_n совместную собственную функцию.

Пример 3. Найдем операторы L_m, имеющие совместную собственную функцию с оператором (21). При $M = 2$ условия (20) принимают вид

$$\pi_1 \leqslant 3(n-1), \quad \pi_0 \leqslant (n-1)(2n-1).$$

Для полинома $P_2(z) = z^2 - 5z + 5$ коэффициенты $\pi_0 = \pi_1 = 5$ удовлетворяют этим неравенствам при $n \geqslant 3$. Чтобы найти такой оператор L_3, что $L_3^4 = L_4^3$, вычислим

$$L_4^3 = \Lambda_{12}\Big[0,\ 0,\ 4,\ -4,\ 0,\ 0,\ 4,\ -4,\ 0,\ 0,\ 4,\ -4\Big]$$
$$= \Lambda_{12}\Big\{0,\ -1,\ 2,\ -7,\ -4,\ -5,\ -2,\ -11,\ -8,\ -9,\ -6,\ -15\Big\}$$

и составим последовательности

$$\tau_1 = \Big[2,\ -1,\ -4,\ -7\Big], \quad \tau_2 = \Big[0,\ -3,\ -6,\ -9\Big], \quad \tau_3 = \Big[-2,\ -5,\ -8,\ -11].$$

Нетрудно видеть, что в τ_2 входит число -3, не принадлежащее множеству Ω_4^3. Следовательно, оператор Эйлера третьего порядка, имеющий с L_4 совместную собственную функцию, не существует. Но такую функцию имеет оператор

$$L_6 = \Lambda_6\Big[0,\ 0,\ 0,\ -6,\ 6,\ 0\Big] = \Lambda_6\Big\{0,\ -1,\ -2,\ -9,\ 2,\ -5\Big\},$$

поскольку из чисел, входящих в Ω_4^3, можно составить последовательности

$$\tau_1 = [2,\ -4],\quad \tau_2 = [0,\ -6],\quad \tau_3 = [-1,\ -7],$$
$$\tau_4 = [-2,\ -8],\quad \tau_5 = [-5,\ -11],\quad \tau_6 = [-9,\ -15].$$

Это означает, что выполняется условие $L_4^3 = L_6^2$. Аналогичным образом можно найти оператор

$$L_{10} = \Lambda_{10}\Big[0,\ 0,\ 0,\ -10,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 10,\ 0\Big]$$
$$= \Lambda_{10}\Big\{0,\ -1,\ -2,\ -13,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7,\ 2,\ -9\Big\},$$

имеющий совместную собственную функцию с L_4, составив из множества

$$\Omega_4^5 = \Big\{0,\ -1,\ 2,\ -7,\ -4,\ -5,\ -2,\ -11,\ -8,\ -9,\ -6,\ -15,$$
$$-12,\ -13,\ -10,\ -19,\ -16,\ -17,\ -14,\ -23\Big\}$$

последовательности

$$\tau_1 = [2,\ -8],\quad \tau_2 = [0,\ -10],\quad \tau_3 = [-1,\ -11],\quad \tau_4 = [-2,\ -12],\quad \tau_5 = [-4,\ -14],$$
$$\tau_6 = [-5,\ -15],\quad \tau_7 = [-6,\ -16],\quad \tau_8 = [-7,\ -17],\quad \tau_9 = [-9,\ -19],\quad \tau_{10} = [-13,\ -23],$$

и убедиться, что не существует оператора L_5, обладающего этим свойством, поскольку в первую из последовательностей

$$\tau_1 = \Big[2,\ -3,\ -8,\ -13\Big],\quad \tau_2 = \Big[0,\ -5,\ -10,\ -15\Big],\quad \tau_3 = \Big[-1,\ -6,\ -11,\ -16\Big],$$
$$\tau_4 = \Big[-2,\ -7,\ -12,\ -17\Big],\quad \tau_5 = \Big[-4,\ -9,\ -14,\ -19\Big]$$

входит число -3, не принадлежащее Ω_4^5.

Вопрос о существовании операторов Эйлера L_m и L_n, обладающих совместной собственной функцией, имеет разный ответ, в зависимости от того, являются ли m и n взаимно простыми числами.

1. Если m и n — взаимно простые числа, то операторы L_m и L_n, имеющие совместную собственную функцию (11), могут существовать, только если в (11) параметр M не превосходит некоторого значения. Например, такие операторы L_2 и L_{2k+1} не существуют, если $M > k$, $k \in \mathbb{N}$. Такие операторы L_3 и L_m, $m \neq 3k$ не существуют, если $M \geqslant m$, m, $k \in \mathbb{N}$. Не существуют такие операторы L_4 и L_3, если $M > 3$; L_4 и L_5, если $M > 5$; L_4 и L_7, если $M > 9$; L_4 и L_9, если $M > 12$ и т. д.

2. Для любого оператора L_n, факторизующегося в форме (16), найдется оператор L_{kn}, $k \in \mathbb{N}$, имеющий с L_n совместную собственную функцию, вне зависимости от значения M. Согласно теореме 1.2, это оператор L_n^k.

3. Если $m = lm'$, $n = ln'$, $l > 1$, где m', n' — взаимно простые числа, то при любом M найдутся операторы L_m и L_n с совместной собственной функцией (11), что согласуется с [7]. Если $l = 2$, то начиная с некоторого значения M, таких операторов L_m и L_n имеется фиксированное количество. Например, при $M \geqslant 2g$ найдется $(g+1)^2$ пар операторов L_4 и $L_{2(2g+1)}$, имеющих совместную собственную функцию (11) с данным значением M. При $M \geqslant 6g$ имеется $(g+1)^2(3g+2)^2/4$ пар коммутирующих операторов L_6 и $L_{2(3g+1)}$; при $M \geqslant 6g-4$ имеется $g^2(3g+1)^2/4$ пар коммутирующих операторов L_6 и $L_{2(3g-1)}$, $g \in \mathbb{N}$ с данным значением M.

В частности, при $M \geqslant 2$ имеется четыре пары коммутирующих операторов Эйлера L_4 и L_6, при $M \geqslant 4$ — девять пар операторов L_4 и L_{10}, а при $M \geqslant 8$ — 49 пар операторов L_6 и L_{10}. Они перечислены во втором столбце таблицы 1 вместе со своей собственной функцией. Функция y является решением уравнений Бесселя (6) с соответствующими операторами L_4, L_6 и L_{10}, где $\lambda = \mu^n$, а функция w удовлетворяет уравнениям (12) с соответствующими значениями λ. Коммутирующие операторы существуют, и формула для y справедлива при $M \geqslant M_0$. Число M_0 указано как первая цифра в двойной нумерации, используемой в первом столбце таблицы 1.

Заметим, что здесь рассматривались только такие операторы L_n, для которых факторизация оператора $x^n L_n$ в левой части уравнения (14) не имеет корней, равных по модулю n. Операторы, перечисленные в таблице 1, коммутируют и при произвольных значениях M, а не только $M \in \mathbb{Z}_+$. Но их совместная собственная функция уже не будет представима в виде конечной суммы квазиполиномов. В [1] получены некоторые пары коммутирующих операторов L_4 и L_6, в том числе имеющие кратные корни в своей факторизации. Задача построения совместной собственной функции этих операторов в [1] не ставилась. Обзор результатов о коммутирующих операторах ранга 2 (не только с полиномиальными коэффициентами) можно найти в [3].

Если $l \geqslant 3$, то число операторов Эйлера L_m и L_n, обладающих совместной собственной функцией (11), зависит от M. Например, для каждого значения $M \geqslant 3g-1$ найдется $(M+1-3g/2)(g+1)^3$ пар таких операторов L_6 и $L_{3(2g+1)}$, $g \in \mathbb{N}$. При $g = 1$ список коммутирующих операторов, не имеющих кратных корней в факторизации операторов $x^6 L_6$ и $x^9 L_9$, составляют:

(1) $L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-3,\ A,\ A-3,\ -3-M-A,\ -6-M-A\Big\} = L_3^2,$

$L_3 = \Lambda_3\Big\{M,\ A,\ -3-M-A\Big\},$

$L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-3,\ M-6,\ A,\ A-3,\ A-6,\ -3-M-A,\ -6-M-A,\ -9-M-A\Big\}$
$= L_3^3,$

$A = -m-1, \dots, M-1\ /\{M-3k\}, \quad M \geqslant 0;$

(2) $L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-3,\ B,\ B-9,\ -M-B,\ -3-M-B\Big\},$

$B = 1-2M,\ \dots,\ M-1\ /\{M-3k\},$

$L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-3,\ M-6,\ B,\ B-6,\ B-12,\ -M-B,\ -3-M-B,\ -6-M-B\Big\},$

$M \geqslant 1;$

(3) $L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-9,\ C,\ C-3,\ -M-C,\ -3-M-C\Big\},$

$C = 1-2M, \dots, -m-1\ /\{M-3k,\ k \geqslant m+1\},$

$L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-6,\ M-12,\ C,\ C-3,\ C-6,\ -M-C,\ -3-M-C,\ -6-M-C\Big\},$

$M \geqslant 1;$

(4) $L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-3,\ E,\ E-9,\ 3-M-E,\ -6-M-E\},$

$E = 2-m, \dots, M-1\ /\{M-3k\},$

$L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-3,\ M-6,\ E,\ E-6,\ E-12,\ 3-M-E,\ -3-M-E,\ -9-M-E\Big\},$

$M \geqslant 2;$

(5) $L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-9,\ G,\ G-3,\ 3-M-G,\ -6-M-G\Big\},$

$G = 4-2M, \dots, M-1\ /\{M-3k\},$

$L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-6,\ M-12,\ G,\ G-3,\ G-6,\ 3-M-G,\ -3-M-G,\ -9-M-G\Big\},$

$M \geqslant 2;$

(6) $L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-9,\ H,\ H-9,\ 6-M-H,\ -3-M-H\Big\},$

$H = 7-2M, \dots, 2-m\ /\{M-3k,\ k \geqslant m\},$

$L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-6,\ M-12,\ H,\ H-6,\ H-12,\ 6-M-H,\ -M-H,\ -6-M-H\Big\},$

$M \geqslant 3.$

Здесь $k \in \mathbb{N}$, m — неотрицательное целое число из представления четного $M = 2m$ или нечетного $M = 2m + 1$.

Таблица 1. Коммутирующие операторы порядков 4, 6, 8, 10 и их собственная функция

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
0.1	$L_4 = L_2^2$, $L_6 = L_2^3$, $L_8 = L_2^4$, $L_{10} = L_2^5$, $L_2 = \Lambda_2\{M, -M-1\}$, $y = x^{M+1-a_1}(x^{-1}D)^M w/x$
1.1	$\Lambda_4\{M, M-2, 1-M, -M-5\}$, $\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 1-M, -M-3, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 1-M, -M-3, -M-5, -M-7, -M-11\}$
	$y = x^{M+2-a_1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-1}w/x)$
1.2	$\Lambda_4\{M, M-6, 1-M, -M-1\}$, $\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 1-M, -M-1, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5, -M-7\}$
	$y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M-3}(x^{-1}D)^{M-1}w/x)$
1.3	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 1-M, -M-1, -M-9\}$, $y = x^{M+4-a_1}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-1}w/x)$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-4, M-6, 1-M, -M-1, -M-5, -M-11\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 1-M, -M-1, -M-5, -M-7, -M-13\}$
1.4	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 1-M, -M-1, -M-3\}$, $y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M-5}(x^{-1}D)^{M-1}w/x)$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5, -M-7\}$
2.1	$\Lambda_4\{M, M-6, 3-M, -M-3\}$, $\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 3-M, -M-1, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 3-M, -M-1, -M-3, -M-5, -M-9\}$
	$y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M-2}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.2	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 3-M, -M-1, -M-5, -M-9, -M-13\}$
	$\Lambda_4\{M, M-2, 3-M, -M-7\}$, $y = x^{M+4-a_1}D(x^{-3}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.3	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-8, M-12, M-16, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5\}$
	$\Lambda_4\{M, M-10, 3-M, 1-M\}$, $y = x^{7-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{2M-5}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.4	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 3-M, -M-5, -M-7\}$, $y = x^{M+2-a_1}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-4, M-6, 3-M, -M-3, -M-7, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 3-M, -M-3, -M-5, -M-9, -M-11\}$
2.5	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 3-M, 1-M, -M-1\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{-1}D(x^{2M-5}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.6	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 3-M, -M-1, -M-5\}$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 3-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 3-M, -M-1, -M-3, -M-5, -M-9\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M-4}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.7	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 3-M, 1-M, -M-7\}$, $y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
	$\Lambda_8\{M, M-4, M-6, M-10, 3-M, 1-M, -M-3, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 3-M, 1-M, -M-3, -M-5, -M-11\}$
2.8	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 3-M, 1-M, -M-7\}$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 3-M, 1-M, -M-3, -M-9\}$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 3-M, 1-M, -M-3, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M-2}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.9	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 3-M, -M-1, -M-11\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 3-M, -M-1, -M-3, -M-9, -M-15\}$
	$y = x^{M+6-a_1}D(x^{-5}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.10	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 3-M, 1-M, -M-1\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{2M-5}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
3.1	$\Lambda_4\{M, M-6, 5-M, -M-5\}$, $y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M}D(x^{-3}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 5-M, 1-M, -M-3, -M-7, -M-11\}$
3.2	$\Lambda_4\{M, M-10, 5-M, -M-1\}$, $y = x^{7-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{2M-4}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-8, M-12, M-16, 5-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$
3.3	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 5-M, -M-3, -M-5\}$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 5-M, -M-1, -M-5, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 5-M, -M-1, -M-3, -M-7, -M-9\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M-4}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.4	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 5-M, 3-M, -M-5\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 5-M, 3-M, -M-1, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 5-M, 3-M, -M-1, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{-1}D(x^{2M-2}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.5	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 5-M, -M-3, -M-5\}$
	$\Lambda_8\{M, M-4, M-6, M-10, 5-M, -M-1, -M-5, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 5-M, -M-1, -M-3, -M-7, -M-9\}$
	$y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M-2}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.6	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 5-M, 1-M, -M-3\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 5-M, 1-M, -M-1, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 5-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{-1}D(x^{2M-4}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.7	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 5-M, -M-3, -M-11\}$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-4, M-6, 5-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{M+6-a_1}D(x^{-5}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.8	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 5-M, 3-M, 1-M\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 5-M, 3-M, 1-M, -M-1\}$
	$y = x^{11-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-1}D(x^{2M-7}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.9	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 5-M, -M-5, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 5-M, -M-1, -M-7, -M-9, -M-13\}$
	$y = x^{M+4-a_1}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.10	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 5-M, 3-M, 1-M\}$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 5-M, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-7}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.11	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 5-M, 1-M, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 5-M, 1-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M}D(x^{-5}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.12	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 5-M, 3-M, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 5-M, 3-M, -M-1, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{2M-2}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.13	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 5-M, 1-M, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 5-M, 1-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M+2}D(x^{-5}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.14	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 5-M, 1-M, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 5-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{2M-6}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.11	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 5-M, 1-M, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 5-M, 1-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M}D(x^{-5}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.12	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 5-M, 3-M, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 5-M, 3-M, -M-1, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{2M-2}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.13	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 5-M, 1-M, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 5-M, 1-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M+2}D(x^{-5}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
3.14	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 5-M, 1-M, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 5-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{2M-6}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3}w/x)))$
4.1	$\Lambda_4\{M, M-10, 7-M, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-8, M-12, M-16, 7-M, 3-M, -M-1, -M-5, -M-9\}$
	$y = x^{7-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{2M-2}D(x^{-3}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.2	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 7-M, -M-1, -M-3\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 7-M, 1-M, -M-3, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 7-M, 1-M, -M-1, -M-5, -M-7\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{-1}D(x^{2M-4}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.3	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 7-M, -M-1, -M-9\}$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 7-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{M+4-a_1}D(x^{-5}D(x^{-1}D(x^{10-2M}D(x^{2M-11}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.4	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 7-M, 5-M, -M-3\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 7-M, 5-M, 1-M, -M-5\}$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
	$y = x^{11-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-1}D(x^{2M-4}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.5	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 7-M, -M-1, -M-9\}$
	$\Lambda_8\{M, M-4, M-6, M-10, 7-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{M+4-a_1}D(x^{-5}D(x^{-1}D(x^{8-2M}D(x^{2M-9}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.6	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 7-M, 3-M, -M-1\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 7-M, 3-M, 1-M, -M-3\}$
	$y = x^{11-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-1}D(x^{2M-6}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.7	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 7-M, -M-3, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 7-M, 1-M, -M-5, -M-7, -M-11\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M-2}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.8	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 7-M, 5-M, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 7-M, 5-M, 1-M, -M-1, -M-7\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-4}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.9	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 7-M, -M-3, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 7-M, 1-M, -M-5, -M-7, -M-11\}$
	$y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.10	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 7-M, 3-M, -M-1\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 7-M, 3-M, 1-M, -M-1, -M-5\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-6}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.11	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 7-M, 3-M, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 7-M, 3-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{2M}D(x^{-5}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.12	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 7-M, -M-1, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 7-M, 1-M, -M-1, -M-5, -M-7\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{2M-4}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.13	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 7-M, 3-M, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 7-M, 3-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{-1}D(x^{2M}D(x^{-5}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.14	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 7-M, -M-3, -M-13\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 7-M, 1-M, -M-5, -M-11, -M-17\}$
	$y = x^{M+8-a_1}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
4.15	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 7-M, 5-M, 3-M\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 7-M, 5-M, 3-M, 1-M, -M-1\}$
	$y = x^{15-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-9}(x^{-1}D)^{M-4}w/x))))$
5.1	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 9-M, 1-M, -M-7\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 9-M, 3-M, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{M+2-a_1}D(x^{-5}D(x^{-1}D(x^{12-2M}D(x^{-1}D(x^{2M-11}(x^{-1}D)^{M-5}w/x)))))$
5.2	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 9-M, 1-M, -M-1\}$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 9-M, 3-M, -M-1, -M-3\}$
	$y = x^{11-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{2M-6} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.3	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 9-M, -M-1, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 9-M, 3-M, -M-3, -M-5, -M-9\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{2M-2} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.4	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 9-M, 5-M, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 9-M, 5-M, 3-M, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-2} D(x^{-5} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.5	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 9-M, -M-1, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 9-M, 3-M, -M-3, -M-5, -M-9\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{-1} D(x^{2M-2} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.6	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 9-M, 1-M, -M-1\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 9-M, 3-M, 1-M, -M-3, -M-5\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-6} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.7	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 9-M, -M-1, -M-11\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 9-M, 3-M, -M-3, -M-9, -M-15\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{2M+2} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.8	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 9-M, 7-M, -M-1\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 9-M, 7-M, 3-M, 1-M, -M-5\}$
	$y = x^{15-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-6} D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.9	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 9-M, -M-1, -M-11\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 9-M, 3-M, -M-3, -M-9, -M-15\}$
	$y = x^{3-M-a_1} D(x^{2M+4} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.10	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 9-M, 5-M, 1-M\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 9-M, 5-M, 3-M, 1-M, -M-3\}$
	$y = x^{15-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-8} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
6.1	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 11-M, 3-M, -M-5\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 11-M, 5-M, -M-1, -M-7\}$
	$y = x^{11-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{2M-2} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6} w/x))))))$
6.2	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 11-M, 1-M, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 11-M, 5-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-4} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6} w/x))))))$
6.3	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 11-M, 1-M, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 11-M, 5-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{2M+2} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6} w/x))))))$
6.4	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 11-M, 7-M, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 11-M, 7-M, 5-M, -M-1, -M-7\}$
	$y = x^{15-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-4} D(x^{-5} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6} w/x))))))$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
6.5	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 11-M, 1-M, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 11-M, 5-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{5-M-a_1}D(x^{-1}D(x^{2M+2}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6}w/x))))))$
6.6	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 11-M, 3-M, 1-M\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 11-M, 5-M, 3-M, -M-1, -M-3\}$
	$y = x^{15-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-8}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6}w/x))))))$
7.1	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 13-M, 3-M, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 13-M, 7-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{9-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-7}w/x)))))))$
7.2	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 13-M, 3-M, -M-1\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 13-M, 7-M, 1-M, -M-1, -M-5\}$
	$y = x^{15-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-6}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-7}w/x)))))))$
8.1	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 15-M, 5-M, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 15-M, 9-M, 3-M, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{15-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-2}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-8}w/x))))))))$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Байчорова Ф. Х., Эльканова З. С.* Коммутирующие дифференциальные операторы порядков 4 и 6// Уфимск. мат. ж. — 2013. — *5*, № 3. — С. 12–19.
2. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии// Функц. анал. прилож. — 1977. — *11*, № 1. — С. 15–31.
3. *Миронов А. Е.* Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 4. — С. 155–184.
4. *Соколов В. В.* Примеры коммутативных колец дифференциальных операторов// Функц. анал. прилож. — 1978. — *12*, № 1. — С. 82–83.
5. *Шабат А. Б., Эльканова З. С., Урусова А. Б.* Двусторонние преобразования Дарбу// Теор. мат. физ. — 2012. — *173*, № 2. — С. 207–218.
6. *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Commutative ordinary differential operators// Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1923. — *21*, № 1. — С. 420–440.
7. *Mironov A. E., Zheglov A. B.* Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra// Int. Math. Res. Not. — 2016. — № 10. — С. 2974–2999.
8. *Mokhov O. I.* Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients// Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2. — 2014. — *234*. — С. 323–336.
9. *Schur I.* Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke// Sitzungsber. Berliner Math. Ges. — 1905. — *4*. — С. 2–8.

Ю. Ю. Багдерина
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук (ИМВЦ УНЦ РАН)
E-mail: `bagderinayu@yandex.ru`