О топологических инвариантах дифференциального уравнения $y'' = f(x,y)y'^3 + g(x,y)y'^2 + h(x,y)y' + k(x,y)$

Герхард Томсен, Гамбург [1)]

Г-н А. Тресс в своей конкурсной работе *"Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre*

$$y'' = \omega(x, y, y') \qquad \text{“} \tag{1}$$

(Конкурсные сочинения княжеского общества Лейпцига им. Яблоновского, 1896) привел полную систему топологических инвариантов дифференциального уравнения (1). Он использовал при этом методы Ли.

Посредством дифференциального уравнения (1), в котором мы хотим предполагать функцию ω аналитической по трем ее аргументам, на плоскости декартовых координат x, y дается двухпараметрическая система кривых, через каждый линейный элемент которой, по крайней мере в некоторой определенной области регулярности, проходит в точности одна кривая. Из топологических постановок вопросов, которых касаются эти системы кривых, могут быть интересны следующие: Посредством каких топологических конфигурационных свойств характеризуются те из них, которые можно топологически отобразить на геодезические линии некоторой произвольной поверхности? Наглядно этот вопрос можно понимать так: *Пусть на поверхности некоторого листка из произвольно искривляемого и, кроме того, в своих самых малых частичках произвольно растяжимого материала будет отмечена некоторая двухпараметрическая система кривых указанного типа. Какое свойство должна иметь система кривых для того, чтобы можно было посредством искривления и топологической деформации этот листик трансформировать в поверхность, на которой отмеченные кривые станут геодезическими линиями.* Решения этого вопроса еще нет. Можно еще, насколько мне известно, привести также необходимые и достаточные *аналитические* условия в неявной форме, которым должна удовлетворять функция ω для того, чтобы относящуюся к ней систему кривых можно было отобразить на геодезические линии некоторой поверхности[2)]. Еще дальше, по-видимому, мы отдалены от геометрической характеристики этих систем кривых посредством чисто топологических конфигурационных свойств. Мы хотим те системы кривых (1), для которых возможно описанное топологическое отображение на геодезические линии некоторой поверхности, кратко называть *"геодезическими системами кривых“.*

Одно необходимое условие для геодезических систем кривых оказывается очень простым. Пусть u и v — это произвольные параметры на некоторой поверхности и представим себе кривую на поверхности, данную в представлении $u = u(v)$, следовательно, дифференциальное уравнение геодезических линий имеет, как известно, форму

$$u'' = C(u,v)u'^3 + 3D(u,v)u'^2 - 3A(u,v)u' - B(u,v). \tag{2}$$

При этом функции $A(u,v)$, $B(u,v)$, $C(u,v)$, $D(u,v)$ — это некоторые, образованные из символов Кристоффеля, выражения, которые мы еще приведем в §1 (штрихи обозначают дифференцирования

[1)]Перевод статьи G. Thomsen Über die topologischen Invarianten der Differentialgleichung $y'' = f(x,y)y'^3 + g(x,y)y'^2 + h(x,y)y' + k(x,y)$. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität.* 1929. B. 7. S. 301–328.

[2)]Нужно сказать, что до сих пор еще не установлены явные, содержащие только функцию ω и никаких вспомогательных функций, дифференциальные уравнения, которые характеризуют указанные системы кривых. Ср. также следующую сноску.

по v). Пусть система кривых (1) является "геодезической", следовательно, ее дифференциальное уравнение необходимо должно иметь форму

$$y'' = C(y,x)y'^3 + 3D(y,x)y'^2 - 3A(y,x)y' - B(y,x), \tag{3}$$

так как наиболее общее топологическое соответствие между x, y-плоскостью и поверхностью получается тем, что на поверхности выбран общие параметры u, v и тогда отображение определено посредством

$$y = u; \qquad x = v.$$

Условие, что уравнение (1) имеет частный вид (3), однако еще не является достаточным, как явствует уже из того, что в элементе дуги некоторой поверхности и тем самым в геодезических системах кривых содержатся только три функции двух переменных, в то время как общая форма (3) зависит от четырех таких функций. Поэтому между четырьмя функциями должны еще существовать связи. Эти последние имеют, как выясняется, очень сложную природу. Они зависят от очень высоких производных A, B, C, D и их явное представление до сих пор не достигнуто[3)].

Независимо от этой частной проблемы пусть эта работа занимается топологическими инвариантами дифференциальных уравнений (3) с четырьмя независимыми друг от друга произвольными функциями A, B, C, D и подготавливает подробное геометрическое изучение относящихся к ним систем кривых. Можно легко показать, что дифференциальное уравнение вида (3) посредством топологического отображения всегда переходит в тот же самый тип (ср. §2). Относящиеся к этим уравнениям системы кривых среди более общих уравнений (1) можно охарактеризовать геометрически благодаря следующему свойству: они единственные, у которых окрестность второго порядка каждой точки можно отбразить на окрестность второго порядка в системе кривых всех прямых линий (ср. §4). Мы можем это также выразить таким образом: *Системы кривых (3) в каждой единичной точке до второй производной топологически эквивалентны системе всех прямых линий.* Во всем их распространении системы (3), в противоположность только что сделанному высказыванию, как правило нельзя топологически отобразить на систему прямых линий. Это возможно только если функции A, B, C, D удовлетворяют еще двум дифференциальным уравнениям второго порядка, которые мы приведем в §4.

Системы кривых (3) представляют собой гораздо более важный класс среди более общих систем (1). В рамках более нового рассмотрения, исходящего из римановой геометрии, двумерное топологическое многообразие u, v, заданное в системе кривых (2), называют, как известно, *проективно связным.* Итак, мы хотим заниматься *двумерной геометрией проективной связности.*

Геометрические теоремы, о которых должна идти речь в более поздних разделах, как правило зависят от порядков дифференцирования A, B, C, D, которые много ниже чем порядки условий, которые характеризуют геодезические системы кривых среди систем (3). Поэтому выводимые теоремы имеют смысл сразу и для геодезических систем: система кривых (3) может вплоть до очень высоких порядков дифференцирования быть приближенной посредством некоторой геодезической системы. В этом случае в последующем изложении мы развиваем одновременно теорию инвариантов геодезических систем кривых в противопоставлении с геодезическим отображением поверхностей[4)].

Наряду с цитированной вначале работой, посвященной наиболее общим системам кривых (1), имеется еще другая работа Трecca (Acta mathematica Band 18 [1894] S. 76), в которой он иссле-

[3)] Некоторые вычисляющие рассмотрения делают правдоподобным, что эти связи представляют собой некоторую одновременную систему шести дифференциальных уравнений девятого и десятого порядка по A, B, C, D.

[4)] Как известно, Дини показал, что нетривиальное (неизометрическое) геодезическое отображение существует только для лиувиллевых поверхностей. Annali di matematica III (1869), p. 269.

дует отдельно системы кривых (3)[5]. Весь формальный аппарат принимает более наглядный вид, если вместо методов, использованных Трессом, применить методы исчисления Риччи. Геометрия проективно связных многообразий с методами исчисления Риччи до известной степени была разработана Вейлем[6], Вебленом[7], Т.Й. Томасом[7] и др. Двумерный случай постольку представляет собой сравнительно досадное исключение, поскольку в этом случае так называемый тензор Вейля проективной кривизны[6] обращается в нуль, и нужно подниматься до очень высоких производных для того, чтобы получить первые инварианты.

Мы получим в §5 полную систему инвариантов двумерной проективной связности.

Также могут быть интересны следующие два вопроса:

1. Когда общую систему (1) можно толковать как систему *ангармонических траекторий некоторой сети* из системных кривых? При этом *сетью* мы называем три однопараметрических семейства кривых, из которых через каждую точку проходит по одной из каждого семейства и каждый топологический образ которых является пучком параллелей из прямых. Под ангармонической траекторией мы понимаем кривую, которая в каждой своей точке пересекает три из этих кривых сети при одном и том же ангармоническом отношении. Такую систему кривых мы хотим называть *системой ангармонического отношения.* Можно легко показать, что система ангармонического отношения всегда должна быть специальной формой (3). Здесь отдельного интереса заслуживает вопрос, когда систему кривых *по нескольким существенно различным видам* можно толковать как систему ангармонического отношения, то есть как систему ангармонических траекторий нескольких сетей одновременно, из которых ни одна не состоит из трех семейств ангармонических траекторий другой, относящихся к трем неподвижным ангармоническим отношениям.

   Как мы хотим пояснить в более позднем разделе, единственными системами кривых, являющимися системами ангармонического отношения нескольких видов, являются системы кривых, топологически эквивалентные прямым линиям. В этом случае они являются системами ангармонического отношения ровно ∞^2 существенно различных видов. Ведь прямые линии являются ангармоническими траекториями каждой сети из трех пучков прямых, которые имеют свои центры на одной и той же неподвижной прямой. Таким образом это обстоятельство ведет к простой топологической характеристике "прямых линий".

2. Когда в системе (3) содержится *сеть шестиугольников* и когда их дано несколько? При этом под сетью шестиугольников мы понимаем сеть, которая (в малом) является топологическим образом сети трех пучков параллелей из прямых. Такая сеть будет, как известно, характеризоваться посредством так называемой шестиугольной конфигурации[8].

Эти вопросы можно размножить самым различным способом. Если назовем *дуальным образом* четыре семейства кривых, каждый топологический образ которых является пучком параллелей из прямых, и в точности одна кривая которых проходит через каждую точку каждого семейства, то мы

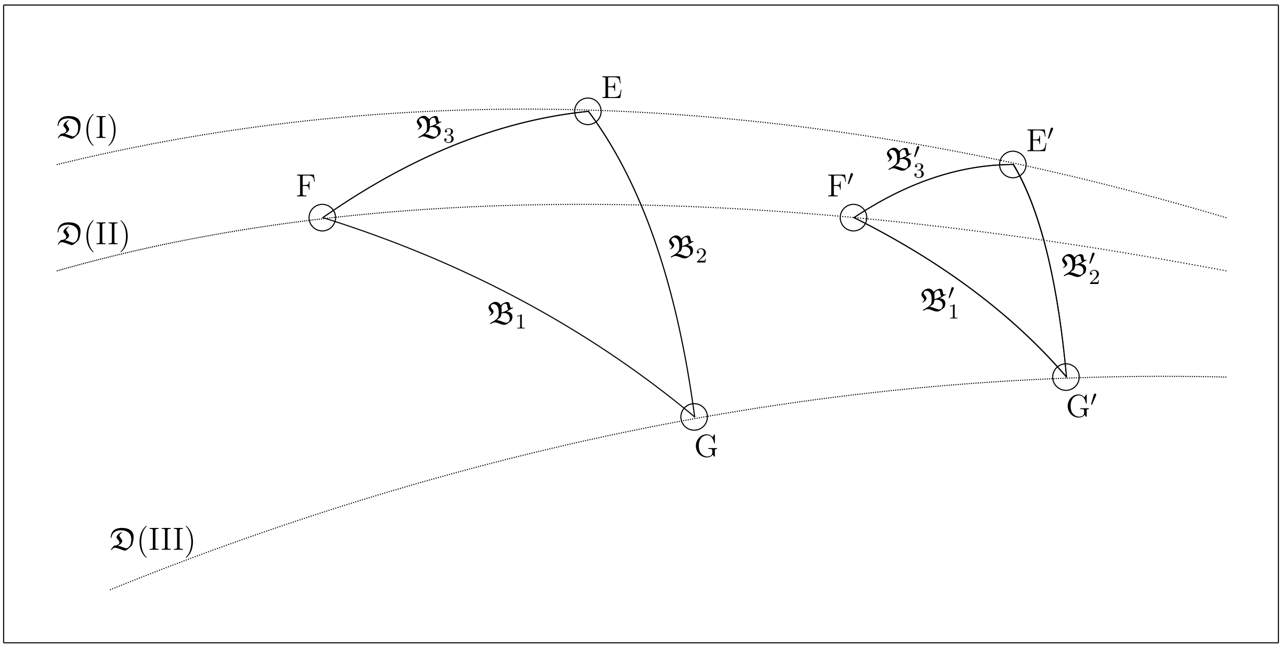
[5] Вычисление инвариантов систем кривых (3) встречается уже в работе Р. Лиувилля: "Sur les invariants de certaines équations différentielles" Journal de l'École Polytechnique. (1889) Cahier 59. Seite 7–76. Там встречаются также многие специальные типы дифференциальных уравнений рассматриваемой формы (3).

[6] H. Weyl, Göttinger Nachrichten 1921 (7) Seite 99.

[7] Veblen und T.Y. Thomas, Annals of Math., vol. 27, p. 279–296. Ср. также учебник Эйзенхарта: Non-Riemannian Geometry (Princeton University Press).

[8] Ср. G. Thomsen, "Un teorema topologico ..." Bolletino dell' Unione matematica italiana, Aprile 1927, и W. Blaschke, Topologische Fragen der Differentialgeometrie I Mathem. Zeitschr. 1928. S. 150–157.

можем интересоваться такими содержащимися в нашей системе (3) дуальными образами, которые обладают определенными конфигурационными свойствами. Например, мы можем потребовать, что для двух треугольников E, F, G и E', F', G' (ср. рисунок), вершины которых расположены на трех кривых некоторого собственного семейства $\mathfrak{D}$ среди четырех семейств дуального образа,выполняется так называемая *малая теорема* Дезарга.



Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ — это три отличных от $\mathfrak{D}$ семейства дуального образа, полагая F и G на некоторой произвольной $\mathfrak{B}_1$-кривой любыми, построив тогда E как пересечение $\mathfrak{B}_2$-кривой, проходящей через G, и $\mathfrak{B}_3$-кривой, проходящей через F, и проведя через E, F и G три $\mathfrak{D}$-кривые I, II и III, таким образом получается: Если положить на I произвольно некоторую точку E', построить F' как пересечение $\mathfrak{B}_3$-кривой, проходящей через E', с II и G' как пересечение $\mathfrak{B}_2$-кривой, проходящей через E', с II, то сами собой F' и G' всегда лежат на одной и той же $\mathfrak{B}_1$-кривой.

Во всех случаях кривые, так же как появляющиеся в (2) функции, ради простоты предполагаются аналитическими.

Разработанные в этой работе формулы могут быть естественным приготовлением ко всем затронутым вопросам.

§1

Представим себе поверхность трехмерного пространства, отнесенную к параметрам поверхности u^1 и u^2. В этом случае элемент дуги задается посредством

$$ds^2 = g_{ik}\, du^i du^k \quad \text{с} \quad g_{ik} = g_{ki} \quad \text{и} \quad g = |g_{ik}| \neq 0. \tag{4}$$

Здесь и далее предполагается суммирование по встречающимся двойным индексам в произведении. Тогда символы Кристоффеля первого и второго рода определяются выражениями

$$\Gamma_{ik,r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ir}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^r}\Big), \tag{5}$$

$$\Gamma^l_{ik} = g^{rl}\Gamma_{ik,r}, \tag{6}$$

где g^{ik} является обратным тензором к g_{ik}:

$$g^{ir}g_{rs} = \delta^i_s = \begin{cases} 1 & i = s, \\ 0 & i \neq s. \end{cases} \tag{6a}$$

Имеют место условия симметрии:

$$\Gamma_{ik,r} = \Gamma_{ki,r}; \qquad \Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{ki}. \tag{7}$$

Представим себе, что посредством $u^i = u^i(s)$ изображена геодезическая линия, отнесенная к вашей длине дуги, тогда дифференциальным уравнением геодезических линий будет:

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{du^k}{ds}\,\frac{du^l}{ds} = 0. \tag{8}$$

Введем посредством $t = t(s)$ вместо длины дуги общий параметр t и положим $\dfrac{dt}{ds} = g$; $\dfrac{d^2t}{ds^2} = g'$, так что справедливо

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{du^i}{dt}\cdot g; \qquad \frac{d^2u^i}{ds^2} = \frac{d^2u^i}{dt^2}\cdot g^2 + \frac{du^i}{dt}\cdot g' \tag{9}$$

и дифференциальным уравнением геодезических линий для представления при помощи произвольного параметра t будет согласно (8)

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{du^k}{dt}\,\frac{du^i}{dt} = -\frac{g'}{g^2}\cdot\frac{du^i}{dt}. \tag{10}$$

Исключив из обоих уравнений (10) функцию $g' : g^2$, получим дифференциальное уравнение геодезических линий в виде:

$$\left(\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma^1_{kl}\frac{du^k}{dt}\,\frac{du^l}{dt}\right)\cdot\frac{du^2}{dt} - \left(\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma^2_{kl}\frac{du^k}{dt}\,\frac{du^l}{dt}\right)\cdot\frac{du^1}{dt} = 0. \tag{11}$$

Допустим специальное t, совпадающее с u^2, то есть представим себе кривую, изображенную посредством $u^1 = u^1(u^2)$, тогда имеем:

$$\frac{du^2}{dt} = 1, \qquad \frac{d^2u^2}{dt^2} = 0.$$

Обозначим еще u^1 за u, а $u^2 = t$ за v и положим $\dfrac{du}{dv} = u'$, $\dfrac{d^2u}{dv^2} = u''$, так что (11) приводится к виду

$$u'' = C(u,v)u'^3 + 3D(u,v)u'^2 - 3A(u,v)u' - B(u,v). \tag{12}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение геодезических линий, как утверждалось во Введении, имеет форму (2), причем функции A, B, C, D связаны с Γ^i_{kl} формулами:

$$\begin{cases} A = \frac{2}{3}\Gamma^1_{12} - \frac{1}{3}\Gamma^2_{22}; & D = \frac{2}{3}\Gamma^2_{12} - \frac{1}{3}\Gamma^1_{11}; \\ B = \Gamma^1_{22}; & C = \Gamma^2_{11}. \end{cases} \tag{13}$$

Формулы (13) можно явно обобщить следующим образом: Объявим к Γ^i_{kl} новые величины Π^i_{kl} с помощью

$$\Pi^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \frac{1}{3}\delta^l_i\Gamma^t_{tk} - \frac{1}{3}\delta^l_k\Gamma^t_{ti}, \tag{14}$$

где δ^l_i имеют значение, указанное в (6a). Допустим, что индексы i и l совпадают, и суммируем по $i = l$, тогда согласно (14) получим

$$\Pi^i_{ik} = 0, \tag{15}$$

то есть

$$\Pi^1_{11} + \Pi^2_{21} = 0 \quad \text{и} \quad \Pi^1_{12} + \Pi^2_{22} = 0. \tag{16}$$

Тогда согласно (14) и (7) справедливо

$$\Pi^l_{ik} = \Pi^l_{ki}, \tag{17}$$

Π_{ik}^{l} вследствие (16) доставляют всего лишь четыре величины, независимые друг от друга. Из (14) получаем

$$\begin{cases} \Pi_{12}^{1} = -\Pi_{22}^{2} = \frac{2}{3}\Gamma_{12}^{1} - \frac{1}{3}\Gamma_{22}^{2}; \quad \Pi_{22}^{1} = \Gamma_{22}^{1}; \\ \Pi_{12}^{2} = -\Pi_{11}^{1} = \frac{2}{3}\Gamma_{12}^{2} - \frac{1}{3}\Gamma_{11}^{1}; \quad \Pi_{11}^{2} = \Gamma_{11}^{2}. \end{cases} \tag{18}$$

Согласно (13) прямо следует:

$$\begin{cases} A = \Pi_{12}^{1} = -\Pi_{22}^{2}; \quad D = \Pi_{12}^{2} = -\Pi_{11}^{1}; \\ B = \Pi_{22}^{1}; \qquad\qquad\quad C = \Pi_{11}^{2}. \end{cases} \tag{19}$$

Следовательно, Π_{ik}^{l} *являются теми связями* Γ_{kl}^{i}*, от которых только и зависит дифференциальное уравнение геодезических линий.* Для того, чтобы данные четыре функции Π_{ik}^{l} согласно (14), (6), (5) соответствовали метрике с тремя функциями g_{ik}, должны, как упомянуто во Введении, существовать определенные дифференциальные уравнения на Π_{ik}^{l} с более высоким порядком производных.

При помощи Π_{ik}^{l} можно теперь дифференциальное уравнение (11) геодезических линий записать также в параметрической форме:

$$\left(\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Pi_{kl}^{1}\frac{du^k}{dt}\frac{du^l}{dt}\right)\cdot\frac{du^2}{dt} - \left(\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Pi_{kl}^{2}\frac{du^k}{dt}\frac{du^l}{dt}\right)\cdot\frac{du^1}{dt} = 0, \tag{19a}$$

ведь если Π заменить через Γ согласно (14), то поднимаются члены, происходящие из обоих последних слагаемых в (14), и (19a) оказывается эквивалентным (11).

§2

Общее топологическое преобразование двумерного многообразия с координатами u^1, u^2 задается посредством

$$u^i = f^i(\overline{u}^1, \overline{u}^2) \qquad (i = 1, 2) \tag{20}$$

с

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial \overline{u}^k}\right| \neq 0.$$

В дальнейшем введем обозначения:

$$a_k^i = \frac{\partial f^i}{\partial \overline{u}^k}; \qquad b_{kl}^i = \frac{\partial^2 f^i}{\partial \overline{u}^k \partial \overline{u}^l}; \qquad c_{kls}^i = \frac{\partial f^i}{\partial \overline{u}^k \partial \overline{u}^l \partial \overline{u}^s}; \tag{21}$$

кроме того, положим для определителя a_k^i:

$$\Delta = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \neq 0, \tag{22}$$

$$\Theta = -\frac{1}{3}\lg\Delta. \tag{23}$$

Введем алгебраическое дополнение a_k^i, поделенное на Δ, величину которого будем обозначать A_k^i, так что справедливо

$$a_k^i A_s^k = \delta_s^i. \tag{24}$$

В этом случае нетрудно доказать тождество:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^k} = -\frac{1}{3} b_{tk}^s A_s^t, \tag{25}$$

формулу, которую используем в §6.

На многообразии u^i задана метрика (4) в римановом смысле, так что g_{ik} преобразуются по закону:

$$\overline{g}_{ik} = g_{rs} a_i^r a_k^s. \tag{26}$$

То есть установление метрики равнозначно введению симметричного тензорного поля $g_{ik}(u^1, u^2)$ в римановом пространстве. g^{ik} преобразуются согласно

$$\overline{g}^{ik} = g^{rs} A^i_r A^k_s. \tag{27}$$

Для $\Gamma_{ik,r}$ и Γ^l_{ik} (5), (6) получаются с помощью дифференцирования формул преобразования

$$\overline{\Gamma}_{ik,r} = \Gamma_{ls,t} a^l_i a^s_k a^t_r + g_{st} a^s_r b^t_{ik} \tag{28}$$

и

$$\overline{\Gamma}^l_{ik} = b^r_{ik} A^l_r + \Gamma^r_{st} a^s_i a^t_k A^l_r. \tag{29}$$

Здесь бросается в глаза следующее: В то время как в формулах (28) для $\Gamma_{ik,r}$ возникают g_{ls}, согласно (29) Γ^l_{ik} преобразуются только между собой. Следовательно, они играют вполне самостоятельную и с точки зрения метрики g_{ik} в определенном смысле независимую роль. Этот факт, как известно, привел Вейля[9)] при построении общей геометрии к тому, что в топологическом пространстве задаются только (в двумерном случае шесть) функции Γ^l_{ik} без того, чтобы имелась какая-либо метрика g_{ik}. Геометрическая природа Γ^l_{ik} проявляется тогда в том, что требуют: Γ^l_{ik} образуют систему величин, которая при топологическом отображении преобразуется согласно (29). Многообразие, в котором введены такие Γ^l_{ik}, Вейль назвал *аффинно связным многообразием.* Γ^l_{ik} будут при этом предполагаться (в двумерном случае) шестью независимыми друг от друга функциями, без постановки в этом случае специального требования, что их можно вычислять только согласно (6), (5) по трем функциям g_{ik}. Как известно, посредством только Γ^l_{ik} можно построить значительную часть римановой геометрии. Таким образом, можно сказать, например, как в *Parallelismus* Леви-Чивиты: Семейство векторов $\xi(t)$ назовем параллельным вдоль кривой $u^i(t)$, если для него выполняется закон

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^i_{kl} \xi^k \frac{dx^l}{dt} = 0. \tag{30}$$

Кроме того, риманов тензор кривизны

$$K^r_{iks} = \frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial u^s} - \frac{\partial \Gamma^r_{is}}{\partial u^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^l_{is}\Gamma^r_{lk} \tag{31}$$

определяется только по Γ^i_{kl}.

В двух измерениях риманов тензор кривизны K^r_{iks} некоторой общей аффинной связности имеет только четыре независимые друг от друга компоненты, содержащиеся все уже в сокращенном тензоре:

$$K_{is} = K^r_{irs}. \tag{32}$$

Тогда можно ограничиться рассмотрением тензора K_{is}. Тензор K^r_{iks}, как нетрудно показать, получается по сокращенному посредством:

$$K^r_{iks} = \delta^r_k K_{is} - \delta^r_s K_{ik}. \tag{33}$$

Геодезические линии согласно (8), (11) также зависят только от Γ^l_{ik}, то есть их можно опеределить в виде общего аффинно связного многобразия. Согласно (11), (12), (13), (14) для выделения геодезических линий существенны не все функции Γ^l_{ik}, а это достигается только по их сочетаниям Π^l_{ik}. Как нетрудно показать, Γ^l_{ik} можно изменять еще согласно закону

$$\hat{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} + \delta^l_i \psi_k + \delta^l_k \psi_i \tag{34}$$

[9)] Weyl, Raum, Zeit, Materie. J. Springer, Berlin. 3. Aufl. (1919), Seite 100.

без того, чтобы изменились Π^l_{ik}, и это также является наиболее общим подобным возможным изменением. Здесь в случае размерности два ψ_i — это две вполне произвольные функции ортов. Уравнение (11) геодезических линий дает в себе закон параллельного или "самого прямого" переноса направлений и, следовательно, являет частный случай законов (30) параллельного переноса векторов вдоль произвольного направления распространения, не обязательно совпадающим с векторным направлением. Из (30) нетрудно увидеть, что *нельзя* изменить Γ^l_{ik} без того, чтобы изменить закон для общего векторного переноса. Поэтому говорят согласно Вейлю: Четверки Π^l_{ik} достаточно для установления *проективного свойства многообразия* (для которого можно определять в себе только самые прямые линии и перенос направлений, но не параллельные векторы вообще), для установления же аффинного свойства необходимы Γ^l_{ik} все вместе. Как теперь преобразуются Π^l_{ik}? Согласно (29) имеем

$$\overline{\Gamma}^t_{tk} = b^r_{tk}A^t_r + \Gamma^t_{ts}a^s_k \tag{35}$$

и, следовательно, согласно (14)

$$\overline{\Pi}^l_{ik} = b^r_{ik}A^l_r + \Pi^r_{st}a^s_i a^t_k A^l_r - \frac{1}{3}\delta^l_i b^s_{tk}A^t_s - \frac{1}{3}\delta^l_k b^s_{ti}A^t_s. \tag{36}$$

То есть Π^l_{ik} преобразуются также между собой, без появления еще, например, Γ^l_{ik}. Мы можем тогда согласно Вейлю построить самостоятельную геометрию проективной связности, вводя только четыре функции Π^l_{ik} в топологическом пространстве, для которых потребуем закона преобразования (36).

Геодезические линии проективно связного многообразия в таком случае находятся или в виде (12), где A, B, C, D задаются по Π согласно (19), или представимы в эквивалентной параметрической форме (19a). То есть мы можем определить геодезические линии также для нашей общей неметрической геометрии четырьмя совершенно произвольными функциями Π.

Теперь мы можем легко доказать установленное во Введении утверждение, что дифференциальное уравнение типа (12) под действием топологического отображения всегда переходит в тот же самый тип. Нам нужно только взять на место уравнений (12) относящиеся к ним параметрические представления, которые ведь могут быть написаны в произвольной форме (11) с шестью функциями Γ, связанными только четырьмя условиями (13). Затем мы должны только показать, что уравнение вида (11) топологическим отображением снова будет переведено в ту же самую форму с новыми коэффициентами $\overline{\Gamma}$. Но это сразу вытекает из выводимых из (20) соотношений

$$\frac{du^i}{dt} = a^i_k\frac{d\overline{u}^k}{dt}; \qquad \frac{d^2u^i}{dt^2} = b^i_{kl}\frac{d\overline{u}^k}{dt}\frac{d\overline{u}^l}{dt} + a^i_k\frac{d^2\overline{u}^k}{dt^2} \tag{37}$$

посредством постановки в (11), и тогда для новых коэффициентов $\overline{\Gamma}$ имеют место как раз отношения (29).

Теперь определение инвариантов дифференциального уравнения (12) относительно топологических отображений выходит на то, чтобы для четырех функций Π^l_{ik}, которые подставляются при преобразовании (20) согласно закону (36), установить полную систему инвариантов.

§3

Теперь мы хотим получить полный обзор по всем топологическим инвариантам, которые можно образовать из Π^l_{ik} и их производных до произвольно высокого порядка. Мы можем посредством дифференцирования легко вывести из (36) формулы преобразования для $\dfrac{\partial\Pi^l_{ik}}{\partial u^p}$. Мы должны продифференцировать обе части по $\overline{u}^p$ и понять, что согласно (21) имеет место

$$\frac{\partial b^r_{ik}}{\partial\overline{u}^p} = c^r_{ikp}; \qquad \frac{\partial a^s_i}{\partial\overline{u}^p} = b^s_{ip}; \qquad \frac{\partial\delta^l_i}{\partial\overline{u}^p} = 0; \qquad \frac{\partial\Pi^r_{st}}{\partial\overline{u}^p} = \frac{\partial\Pi^r_{st}}{\partial u^q}a^q_p, \tag{38}$$

и, кроме того, мы должны принять во внимание тождество

$$\frac{\partial A_r^l}{\partial \overline{u}^p} = -b_{kp}^i A_i^l A_r^k \tag{39}$$

которое легко следует из (24) посредством дифференцирования. Продолжая так действовать, мы можем написать формулы преобразования для произвольно высоких производных Π_{ik}^l. Так как A_k^i — это просто выражения, образованные по одним a_k^i, то мы можем сказать: В формулах преобразования для Π_{ik}^l возникают, согласно (36), a_k^i и b_{ik}^l, то есть первые и вторые производные обеих функций f^i в (20), в формулах преобразования для $\dfrac{\partial \Pi_{ik}^l}{\partial u^p}$ кроме того еще появляются c_{iks}^l, то есть и третьи производные функций f^i, в общем случае у производных Π_{ik}^l n-го порядка в формулах преобразования возникают производные функций f^i $(n+2)$-го порядка. Здесь выполняется только так называемая дифференциальная геометрия в малом, то есть через свойства нашей проективной связности в окрестности некоторой единственной точки, мы должны обращаться с a_k^i, b_{ik}^l, c_{iks}^l и т.д. как с полностью независимыми друг от друга постоянными коэффициентами преобразования. Тогда нашей задачей является образовать такие выражения из

$$\Pi_{ik}^l, \quad \frac{\partial \Pi_{ik}^l}{\partial u^p}, \quad \frac{\partial^2 \Pi_{ik}^l}{\partial u^p \partial u^q} \quad \text{и т.д.,}$$

что в их формулах преобразования последовательные коэффициенты

$$a_k^i, \quad b_{kl}^i, \quad c_{kls}^i \quad \text{и т.д.}$$

оказываются исключенными. Мы можем посредством вычисления приблизительно уяснить себе, сколько мы должны ожидать независимых друг от друга инвариантов, если продвинемся в Π_{ik}^l до n-го порядка. a_k^i представляют собой 4, b_{kl}^i — 6, а производные r-го порядка обеих функций f^i — $2r+2$ независимых величин. При дифференцированиях функций f^i с первого по r-й порядок появляются

$$4+6+8+\cdots+2r+2 = r^2+3r \tag{39a}$$

независимых величин. Далее теперь имеется 8 первых производных Π_{ik}^l, и в общем случае $4t+4$ различных производных Π_{ik}^l t-го порядка, тем самым в общем случае появляется $2t^2+6t+4$ независимых величин среди самих Π_{ik}^l и их производных до t-го порядка. Итак, выпишем формулы преобразования для

$$2n^2+6n+4$$

независимых величин, которые дают Π_{ik}^l и их производные до n-го порядка, так что в них встречаются производные f^i порядка от 1 до $n+2$, то есть вследствие вышеупомянутой формулы (39a) в целом

$$(n+2)^2+3(n+2) = n^2+7n+10$$

независимых коэффициентов преобразования. Если мы действуем до порядка n, следовательно, мы должны исключить $n^2+7n+10$ коэффициентов из $2n^2+6n+4$ равенств преобразования, чтобы образовать инварианты. Ожидаемым числом независимых инвариантов будет разность

$$d = (2n^2+6n+4) - (n^2+7n+10) = n^2-n-6.$$

Так как d выпадает меньше или равной 0 для $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, но равной $+6$ для $n=4$, то поскольку нас не обманет наш только приблизительно сделанный расчет, можно будет ожидать прежде всего от инвариантов с производными Π_{ik}^l четвертого порядка ровно 6 инвариантов этого порядка. Так как для $n = 5$ оказывается $d = 14$, то в этом случае добавятся 8 новых независимых инвариантов пятого порядка. Далее получается, что в случае n-го порядка $[n > 4]$ к тем более низкого порядка всегда добавляется еще

$$n^2 - n - 6 - [(n-1)^2 - (n-1) - 6] = 2n - 2 \tag{40}$$

новых независимых инвариантов.

И вот более подробное исследование показывает, что независимые инварианты нашей проективной связности действительно возникают в точности в том количестве, как это позволил предположить наш расчет.

Уточним еще один способ выражения: Когда благодаря заданию Π^l_{ik} в некоторой точке, начинающиеся из нее системные кривые определяются элементами кривой второго порядка, мы можем сказать: Посредством дифференцирования Π 0-го порядка определена система кривых в окрестности некоторой точки до второго порядка, в общем случае посредством дифференцирования Π в некотором месте до n-го порядка определена некоторая окрестность $(n+2)$-го порядка системы кривых.

§4

Если двигаться только до третьих производных Π^l_{ik}, то никаких абсолютных инвариантов, согласно вышеизложенному, еще не имеется, хотя можно указать две инвариантные линейные формы, которые в третьем порядке связаны с проективной связностью. Оба коэффициента инвариантной линейной дифференциальной формы, как известно, образуют ковариантный вектор, то есть являются величинами, в формулах преобразования которых встречаются только a^i_k, но не "более высокие" коэффициенты преобразования b^i_{kl}, c^i_{kls} и т.д. Посредством подсчета, который мы здесь не хотим приводить в деталях, можно снова сделать правдоподобным, что до третьего порядка в Π^l_{ik} должно быть четыре независимых выражения, в формулах преобразования которых встречаются только a^i_k, в то время как все более высокие коэффициенты исключены. Действительно, более подробное исследование в этом случае показывает, что в качестве простейшей системы представителей нужно взять такие четыре выражения $2 \cdot 2$ коэффициентов обеих упомянутых линейных форм, и что не существует никаких других независимых выражений до третьего порядка, которые обладают подобными свойствами преобразования.

В этом отрывке мы хотим сначала сравнить только результаты, т.е. мы хотим указать, как обе дифференциальные формы и все абсолютные инварианты явно определяются по Π^l_{ik}. Доказательства утверждаемых свойств инвариантности мы даем в §6.

Положим:

$$P_{is} = -\frac{\partial \Pi^t_{is}}{\partial u^t} + \Pi^l_{it}\Pi^t_{ls}. \tag{41}$$

Здесь P_{ik} — это выражения, которые так же формально составлены из Π, как тензор кривизны K_{is} из Γ в (31) и (32), причем еще принимая во внимание условие (15). (Однако здесь P_{is}, как мы увидим в §6, не образуют никакого тензора.) Теперь положим

$$H_{ijk} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial P_{ik}}{\partial u^j} + \Pi^l_{ij}P_{lk} - \Pi^l_{ik}P_{lj}. \tag{42}$$

В этом случае оказывается, что H_{ijk} является тензором третьей степени[10)], который является кососимметрическим по обоим последним индексам

$$H_{ijk} + H_{ikj} = 0, \tag{43}$$

[10)]Этот тензор появляется уже у С. Ли, в записи тензорного исчисления он встречается у Веблена и Томаса (в указанном месте).

так что он имеет только две независимые компоненты. *Обращение в нуль этого тензора*, который по Π^l_{ik} зависит от вторых производных, *характеризует, как мы увидим, систему кривых, которую топологически можно отобразить на прямые линии плоскости.* Так как это условие — второго порядка, в первом порядке по Π^l_{ik}, то есть в *третьем* порядке по кривым системы, все системы кривых (12) топологически эквивалентны системе всех прямых линий, тем самым одно из утверждений Введения строго доказано. Далее теперь мы образуем

$$B_{ijks} = \frac{\partial H_{ijk}}{\partial u^s} - \Pi^h_{is} H_{hjk} - \Pi^h_{js} H_{ihk} - \Pi^h_{ks} H_{ijh}. \tag{44}$$

B_{ijks} образованы из H_{ijk} с помощью Π^l_{ik} таким образом, каким обычно образуют с помощью Γ^l_{ik} вместо Π^l_{ik} в некотором аффинно связном многообразии ковариантную производную тензора H_{ijk}. Так как здесь стоят Π, B_{ijks} не оказывается тензором. Вследствие (43) справедливо

$$B_{ijks} + B_{ikjs} = 0, \tag{45}$$

так что B_{ijks} имеет только четыре независимые компоненты.

Обозначим E^{ik} кососимметрическую систему величин

$$\begin{cases} E^{11} = 0, \quad E^{12} = +1, \quad E^{21} = -1, \quad E^{22} = 0, \\ \qquad\qquad E^{ik} + E^{ki} = 0 \end{cases} \tag{46}$$

и положим

$$T_i = \frac{1}{2} E^{jk} H_{ijk}, \tag{47}$$

$$R_{is} = \frac{1}{2} E^{jk} B_{ijks}, \tag{48}$$

$$G_i = E^{rk} T_r (R_{ik} - 4R_{ki}), \tag{49}$$

$$W = \frac{1}{3} E^{ik} T_i G_k, \tag{50}$$

так что T_i оказывается так называемой векторной плотностью веса 1 (ср. §6), *G_i векторной плотностью веса 3 и W скалярной плотностью веса 5. Тогда в качестве таковой W оказывается* — все это мы объясним более подробно в §6 — *единственным относительным инвариантом проективной связности, который зависит от производных третьего порядка*[11]. Нулевые линии

$$T_i du^i = 0, \qquad\qquad [\text{или} \quad H_{ijk} du^i = 0] \tag{51}$$

"главные линии проективной связности", образуют во втором порядке инвариантное семейство кривых. Их геометрический смысл следующий: У общей системы кривых (12) окрестность третьего порядка отдельных точек может в смысле окончания §3 всегда топологически отображаться на соответствующую окрестность в системе всех прямых линий плоскости, для окрестности четвертого порядка как правило это более невозможно (а только для $T_i \equiv 0$ или $H_{ijk} \equiv 0$). Однако, в общем случае для каждой точки имеется в точности одно направление распространения, вдоль которого две последовательные окрестности третьего порядка могут одновременно отображаться из соответствующей бесконечно малой области в систему все прямых линий, и эти главные направления принадлежат как раз (51).

[11] Относительный инвариант W и геометрический смысл его обращения в нуль были открыты уже Р. Лиувиллем. Ср. работу, цитируемую в сноске на странице 3.

$W=0$ характеризует системы кривых, у которых главные линии совпадают с системными кривыми (являются "геодезическими")[11]. Образуем теперь при ограничительном предположении $W\neq 0$ (в дальнейшем мы исключаем системы кривых с $W=0$; они должны будут обсуждаться отдельно):

$$\hat{T}_i=\frac{T_i}{W^{1/5}};\qquad \hat{G}_i=\frac{G_i}{W^{3/5}}, \tag{52}$$

тогда $\hat{T}_i$, $\hat{G}_i$ будут векторными плотностями веса 0, то есть векторы и

$$\hat{T}_i du^i;\qquad \hat{G}_i du^i \tag{53}$$

являются обеими упомянутыми инвариантными линейными дифференциальными формами третьего порядка. Из этих форм мы можем составить квадратичную дифференциальную форму

$$(\hat{T}_i\hat{G}_k+\hat{T}_k\hat{G}_i)du^i du^k, \tag{54}$$

которая индуцирует риманову метрику в проективной связности. Далее образуем

$$M_i=\frac{1}{45}\cdot\frac{1}{W}\{E^{rk}G_r(R_{ik}-4R_{ki})\}, \tag{54}$$

тогда выражения

$$\Lambda^l_{ik}=\Pi^l_{ik}+\delta^l_i M_k+\delta^l_k M_i \tag{55}$$

представляют собой систему величин с точно теми же самыми свойствами преобразования, как у компонент Γ^l_{ik} аффинной связности. Мы можем сказать, аффинная связность определена через Λ^l_{ik}. Если образована проективная связность, относящаяся к Λ^l_{ik} согласно (14), то снова получается в точности первоначальная проективная связность Π^l_{ik}. *Итак, в Λ^l_{ik} мы имеем нашу проективную связность, продолженную на аффинную.*

В заключение этого параграфа приведем еще одно замечание для случая, когда наша проективная связность Π^l_{ik} возникает из некоторой метрики g_{ik} согласно (14), (6) и (5), то есть для случая, когда наша система кривых является "геодезической" в смысле Введения. Для системы геодезических линий поверхности $H_{ijk}\equiv 0$ является характерным условием для геодезической отображаемости на прямые линии плоскости, то есть, согласно теореме Бельтрами[12], вместо этого условием, что поверхность имеет постоянный показатель кривизны. Если мы исключим этот случай, то оказывается, *что на поверхности главные линии (51) системы геодезических линий совпадают с ортогональными траекториями кривых с постоянным показателем кривизны.* Итак, заслуживает внимания, что эти кривые инвариантны при геодезическом отображении, в то время как сами кривые с постоянным показателем кривизны в принципе не остаются инвариантными.

§5

Перейдем теперь к определению шести инвариантов четвертого порядка.

Для компонент Λ^l_{ik} нашей найденной в (55) аффинной связности в соответствии с (31), (32) составим тензор кривизны K_{is}, то есть положим

$$K_{is}=\frac{\partial\Lambda^r_{ir}}{\partial u^s}-\frac{\partial\Lambda^r_{is}}{\partial u^r}+\Lambda^l_{ir}\Lambda^r_{ls}-\Lambda^l_{is}\Lambda^r_{lr}. \tag{56}$$

Затем посредством подстановки правой части (55) получается тензор:

$$K_{is}=P_{is}+2\frac{\partial M_i}{\partial u^s}-\frac{\partial M_s}{\partial u^i}-\Pi^l_{is}M_l-M_iM_s. \tag{57}$$

[12] E. Beltrami 1866. Opere I. S. 262–280.

Два другие тензора, являющиеся специально кососимметрическими (т.е. имеющие одну существенную компоненту) — это следующие:

$$\frac{\partial \hat{T}_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \hat{T}_k}{\partial u^i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \hat{G}_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \hat{G}_k}{\partial u^i}. \tag{57a}$$

Установим теперь еще из обоих линейных уравнений

$$\hat{T}^i \hat{T}_i = 0; \qquad \hat{T}^i \hat{G}_i = 3 \tag{58}$$

две величины $\hat{T}^i$ с верхними индексами, что вследствие (50) и предположения $W \neq 0$ всегда однозначно возможно, и так же установим из

$$\hat{G}^i \hat{G}_i = 0; \qquad \hat{G}^i \hat{T}_i = -3 \tag{59}$$

две величины $\hat{G}^1$ и $\hat{G}^2$. В этом случае $\hat{T}^i$ образуют контравариантный вектор, так же как и $\hat{G}^i$. *Тогда шесть независимых инвариантов четвертого порядка получаются посредством*

$$\begin{cases} \mathrm{I} = \hat{G}^i \hat{G}^s K_{is}, \\ \mathrm{II} = \hat{G}^i \hat{T}^s K_{is}, \\ \mathrm{III} = \hat{T}^i \hat{G}^s K_{is}, \\ \mathrm{IV} = \hat{T}^i \hat{T}^s K_{is}, \end{cases} \tag{60}$$

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{9} \hat{T}^i \hat{G}^k \Big(\dfrac{\partial \hat{T}_i}{\partial u^k} - \dfrac{\partial \hat{T}_k}{\partial u^i} \Big), \\ \overline{q} = \dfrac{1}{9} \hat{G}^i \hat{T}^k \Big(\dfrac{\partial \hat{G}_i}{\partial u^k} - \dfrac{\partial \hat{G}_k}{\partial u^i} \Big). \end{cases} \tag{61}$$

Мы хотим сохранить q, $\overline{q}$, а вместо I, II, III, IV лучше ввести следующие комбинации:

$$\begin{cases} r = \frac{5}{3}(\mathrm{IV} + \overline{q}), \\ s = \frac{1}{3}(2 \cdot \mathrm{II} - \mathrm{III}), \\ t = \frac{5}{9}(\mathrm{II} - \mathrm{III}), \\ p = -\frac{5}{9}[\mathrm{I} + (5\overline{q} + 2 \cdot \mathrm{IV})^2]. \end{cases} \tag{62}$$

Перейдем теперь к абсолютным инвариантам пятого порядка: При помощи контравариантных векторов $\hat{T}^i$ и $\hat{G}^i$ мы можем легко по уже полученному абсолютному инварианту, который мы пока обозначаем I, посредством дифференцирования получить два новых инварианта I_1 и I_2. Мы должны только положить:

$$I_1 = -\frac{1}{3} \hat{G}^i \frac{\partial I}{\partial u^i}; \qquad I_2 = +\frac{1}{3} \hat{T}^i \frac{\partial I}{\partial u^i}. \tag{63}$$

Назовем I_1 и I_2 двумя инвариантными производными I. Теперь мы можем инвариантно продифференцировать наши шесть абсолютных инвариантов четвертого порядка и получить таким образом двенадцать инвариантов пятого порядка:

$$q_1,\ q_2,\ \overline{q}_1,\ \overline{q}_2,\ r_1,\ r_2,\ s_1,\ s_2,\ t_1,\ t_2,\ p_1,\ p_2.$$

Однако теперь согласно §3 только восемь из них следует ожидать независимыми. В действительности оказывается, что между ними существуют следующие четыре отношения (ср. §6):

$$5(q_1 + q\overline{q}) - (r_2 + qr) - t = 0, \tag{64}$$

$$15 s_2 + 5\overline{q}_1 + 2r_1 + p + 10\overline{q}^2 + 60qs + 9r\overline{q} + 2r^2 = 0, \tag{65}$$

$$3t_2 - r_1 - 6s_2 - 3qt - 9qs - 2\overline{q}r = 0, \tag{66}$$

$$\begin{aligned} 4(t_1 + 3t\overline{q} + tr) + 3(p_2 + 2pq) - 5(s_1 + 3s\overline{q} - 1) = \\ = 3(5\overline{q} + 2r)(q_1 - 2\overline{q}_2 - r_2 - q\overline{q} - qr). \end{aligned} \tag{67}$$

Восемь независимых инвариантов пятого порядка мы теперь можем в свою очередь инвариантно продифференцировать и таким образом прийти к инвариантам шестого порядка. Если мы снова инвариантно продифференцируем инвариантные производные I_1 и I_2 некоторой величины I, то мы хотим это просто указать посредством последующего приложения соответствующего индекса дифференцирования 1 или 2. То есть мы пишем, например,

$$I_{21} = -\frac{1}{3}\hat{G}^i \frac{\partial I_2}{\partial u^i} = -\frac{1}{9}\hat{G}^i \hat{T}^k \frac{\partial^2 I}{\partial u^i \partial u^k} - \frac{1}{9}\hat{G}^i \frac{\partial \hat{T}^k}{\partial u^i}\frac{\partial I}{\partial u^k}.$$

При образовании четырех вторых инвариантных производных I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22} некоторой величины I следует обратить внимание, что между I_{12} и I_{21} существует условие интегрируемости

$$I_{12} + qI_1 = I_{21} + \overline{q}I_2, \tag{68}$$

которое, если вернуться к обычному дифференцированию, идентично известному условию

$$\frac{\partial^2 I}{\partial u^i \partial u^k} = \frac{\partial^2 I}{\partial u^k \partial u^i}.$$

При этом q и $\overline{q}$ являются как раз инвариантами, определенными в (61). То есть если образовать для какого-то из шести инвариантов четвертого порядка четыре вторые инвариантные производные, то согласно (68) можно вычислить одну из них по остальным и по инвариантам более низкого порядка. Итак, прежде всего для каждого из наших шести инвариантов мы получаем три существенно независимые вторые инвариантные производные, то есть $6 \cdot 3 = 18$ инвариантов шестого порядка. Однако между ними существует восемь соотношений, которые получаются благодаря тому, что мы каждое из уравнений (64)–(67) инвариантно дифференцируем по обоим индексам. То есть к инвариантам более низкого порядка добавляется как раз десять новых независимых инвариантов. В этом случае подсчет (40) позволяет предположить, что уже они представляют собой полную систему независимых инвариантов пятого порядка, что и фактически оказывается верным. В общем случае, если мы обратимся к инвариантам n-го порядка, то прежде всего посредством $(n-4)$-кратного дифференцирования шести инвариантов четвертого порядка получим $6(n-3)$ инвариантов n-го порядка, между которыми однако существует $4(n-4)$ условий, которые получаются посредством дифференцирования (64)–(67). Тогда в n-м порядке у независимых инвариантов, которые можно получить посредством инвариантного дифференцирования шести инвариантов четвертого порядка, $6(n-3)-4(n-4) = 2n-2$ добавляются к прежним. Как позволяет ожидать сопоставление с (40), в этом случае вытекает *основная теорема*: *Полная система абсолютных инвариантов двумерной проективной связности дается посредством только шести инвариантов (61), (62) и их инвариантных производных, образованных при помощи неоднократного применения процесса (63).*

§6

Для того, чтобы провести математическое доказательство того, что введенные в §§4–5 величины преобразуются в указанный там способ, перепишем формулу (36) с помощью введенной в (23) величины Θ в виде

$$\overline{\Pi}^l_{ik} = b^r_{ik}A^l_r + \Pi^r_{st}a^s_i a^t_k A^l_r + \delta^l_i \frac{\partial \Theta}{\partial \overline{u}^k} + \delta^l_k \frac{\partial \Theta}{\partial \overline{u}^i}, \tag{68}$$

что является возможным согласно тождеству (25). Тогда вычисление для заданных в (41) величин P_{ik}, принимая во внимание выводимое из (25) посредством дифференцирования тождество

$$-c^r_{ikt}A^t_r = 3\frac{\partial^2\Theta}{\partial\overline{u}^i\partial\overline{u}^k} - b^s_{ti}b^p_{qk}A^t_pA^q_s, \tag{68a}$$

а также с учетом (25), (39) дает формулы преобразования

$$\overline{P}_{ik} = P_{rs}a^r_i a^s_k + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\overline{u}^i\partial\overline{u}^k} - b^r_{ik}A^p_r\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^p} - \Pi^r_{st}a^s_i a^t_k A^p_r\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^p} - \frac{\partial\Theta}{\partial u^i}\frac{\partial\Theta}{\partial u^k}. \tag{69}$$

Затем последующее вычисление дает для H_{ijk} (42):

$$\overline{H}_{ijk} = H_{rst}a^r_i a^s_j a^t_k. \tag{70}$$

То есть фактически H_{ijk} является тензором третьей степени. Если согласно (43) справедливо

$$H_{i11} = H_{i22} = 0; \qquad H_{i12} = -H_{i21}$$

и аналогичные формулы имеют место для $\overline{H}_{ijk}$, то согласно (71) имеем:

$$\overline{H}_{i12} = H_{r12}\,a^r_i\cdot\Delta, \tag{71}$$

где Δ является якобианом нашего преобразования. Если систему величин S_i, преобразующуюся согласно

$$\overline{S}_i = S_r a^r_i\cdot\Delta^m,$$

назвать *векторной плотностью веса* m, то H_{i12} является векторной плотностью веса 1. Таким образом, согласно (46), (47), далее H_{i12} — не что иное как T_i, то есть справедливо:

$$\overline{T}_i = T_r a^r_i\cdot\Delta. \tag{72}$$

Для величин B_{ijks} вычисление согласно (68), (70) дает формулы

$$\overline{B}_{ijks} = B_{rstq}a^r_i a^s_j a^t_k a^q_s - 3\overline{H}_{ijk}\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^s} - \overline{H}_{sjk}\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^i} - \overline{H}_{isk}\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^j} - \overline{H}_{ijs}\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^k}. \tag{73}$$

Отсюда получается согласно (45) и $\overline{H}_{i12} = \overline{T}_i$

$$\overline{B}_{i12s} = B_{r12q}a^r_i a^q_s\cdot\Delta - 3\overline{T}_i\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^s} - \overline{T}_s\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^i} - \overline{H}_{is2}\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^1} - \overline{H}_{i1s}\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^2}. \tag{74}$$

Если подумать, что вследствие (43) для двух последних слагаемых справедливо:

$$-\overline{H}_{is2}\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^1} - \overline{H}_{i1s}\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^2} = -\overline{T}_i\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^s} \tag{75}$$

и положить в соответствии с (48)

$$\overline{B}_{i12s} = \overline{R}_{is}; \qquad B_{r12q} = R_{rq}, \tag{76}$$

то имеем

$$\overline{R}_{is} = R_{rq}a^r_i a^q_s\cdot\Delta - 4\overline{T}_i\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^s} - \overline{T}_s\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^i}. \tag{77}$$

из этого вытекает

$$\overline{R}_{is} - 4\overline{R}_{si} = (R_{rq} - 4R_{qr})a^r_i a^q_s\cdot\Delta + 15\overline{T}_s\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{u}^i}. \tag{78}$$

Для G_i, определенных в (49), можно написать

$$G_i = T_1(R_{i2} - 4R_{2i}) - T_2(R_{i1} - 4R_{1i}), \tag{79}$$

тогда согласно (72) получается формула преобразования:

$$\overline{G}_i = G_r a_i^r \cdot \Delta^8. \tag{80}$$

Для заданной в (50)

$$W = \frac{1}{3}(T_1 G_2 - T_2 G_1) \tag{81}$$

получается из (72), (80)

$$\overline{W} = W \cdot \Delta^5. \tag{82}$$

Тогда отсюда вытекает векторное свойство определенных в (52) $\hat{T}_i$, $\hat{G}_i$. Для M_i, определенных в (54), также можно написать:

$$M_i = \frac{1}{45 \cdot W}\{G_1(R_{i2} - 4R_{2i}) - G_2(R_{i1} - 4R_{1i})\}, \tag{82a}$$

согласно (78), (72) и (80) вычислить

$$\overline{M}_i = M_s a_i^s - \frac{\partial \Theta}{\partial u^i} \tag{83}$$

и поэтому получить для Λ_{ik}^l [ср. (55)]:

$$\overline{\Lambda}_{ik}^l = b_{ik}^r A_r^l + \Lambda_{st}^r a_i^s a_k^t A_r^l, \tag{84}$$

то есть согласно (29) формулы, присущие аффинной связности. Инвариантность введенных в (61), (62) величин лежит в основе известного тензорного свойства тензора кривизны K_{is}:

$$\overline{K}_{is} = K_{rt} a_i^r a_s^t \tag{85}$$

и следующих легко усматриваемых из (52), (72), (80), (82) формул преобразования:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{\overline{T}}_i}{\partial \overline{u}^k} - \dfrac{\partial \hat{\overline{T}}_k}{\partial \overline{u}^i} = \Big(\dfrac{\partial \hat{T}_r}{\partial u^s} - \dfrac{\partial \hat{T}_s}{\partial u^r}\Big) a_i^r a_k^s \cdot, \\ \dfrac{\partial \hat{\overline{G}}_i}{\partial \overline{u}^k} - \dfrac{\partial \hat{\overline{G}}_k}{\partial \overline{u}^i} = \Big(\dfrac{\partial \hat{G}_r}{\partial u^s} - \dfrac{\partial \hat{G}_s}{\partial u^r}\Big) a_i^r a_k^s \cdot \end{cases} \tag{86}$$

Дело в том, что из (58), (59) следует

$$\hat{\overline{T}}^i = \hat{T}^s A_s^i; \qquad \hat{\overline{G}}^i = \hat{G}^s A_s^i, \tag{87}$$

из чего легко можно открыть эти утверждения. Так же легко установить инвариантность процесса дифференцирования (63).

Остается еще доказательство действительности четырех условий (64)–(67). Чтобы его провести, мы хотим прежде всего отметить еще раз формулы, согласно которым T_i вычисляются по Π_{ik}^l. Чтобы их явно получить, мы должны подставить в уравнение (47) вместе с E^{ik}, определенными в (46), H_{ijk} из (42), где снова P_{ik} должны быть представлены замененными из (41). Если для четырех независимых функций, заключенных в Π_{ik}^l, написать согласно (19) A, B, C, D и написать для краткости

$$T_1 = H; \qquad -T_2 = K, \tag{89}$$

то получаются явные формулы:

$$H = -C_{vv} + 2D_{uv} + A_{uu} + 3DA_u + 3CA_v - 2CB_u + 3AC_v - BC_u + 6DD_v, \tag{90}$$

$$K = -B_{uu} + 2A_{uv} + D_{vv} + 3AD_v + 3BD_u - 2BC_v + 3DB_u - CB_v + 6AA_u. \tag{91}$$

Если вычислить далее R_{is} из (45) и (48), причем позволив остаться в формулах H и K, то получим:

$$\begin{cases} R_{11} = & H_u + DH + CK, \\ R_{12} = & H_v - AH + DK, \\ R_{21} = & -K_u + DK - AH, \\ R_{22} = & -K_v - AK - BH. \end{cases}$$

Тогда согласно (49) для G_i получается:

$$G_1 = HH_v + 4HK_u - 3KH_u - 6DHK + 3AH^2 - 3CK^2, \tag{92}$$

$$G_2 = -KK_u - 4KH_v + 3HK_v + 6AHK - 3DK^2 + 3BH^2. \tag{93}$$

Теперь для того, чтобы доказать действительность формул (64)–(67), заметим, что мы уже установили все встречающиеся в них величины в виде инвариантов. Поэтому теперь достаточно доказать истинность уравнений для какого-то специального выбора параметров. В качестве таковых мы выбираем следующие: Заставим u-кривые совпадать с главными линиями (51), а v-кривые — с нулевыми линиями в форме[13)]

$$G_i du^i = 0, \tag{94}$$

которые вследствие (81) при предположении $W \neq 0$ отличны от главных кривых. Тогда будет

$$T_1 = H = 0, \qquad G_2 = 0 \quad (T_2 = K \neq 0,\ G_1 \neq 0). \tag{95}$$

Следовательно, согласно (90) должно быть справедливо во-первых:

$$-C_{vv} + 2D_{uv} + A_{uu} + 3DA_u + 3CA_v - 2CB_u + 3AC_v - BC_u + 6DD_v = 0 \tag{96}$$

и во-вторых согласно (93) вследствие $H = 0$:

$$(\lg K)_u = -3D, \tag{97}$$

или если заменить K из (91):

$$\frac{\partial}{\partial u}\{\lg[-B_{uu} + 2A_{uv} + D_{vv} + 3AD_v + 3BD_u - 2BC_v + 3DB_u - CB_v + 6AA_u]\} = -3D. \tag{98}$$

Для обозначенного через (96), (98) выбора параметров мы хотим теперь вычислить наши шесть инвариантов (61), (62). Согласно (81), (92) будет

$$W = -CK^3. \tag{99}$$

В дальнейшем мы хотим сохранить сокращения K и W для выражений, заданных посредством (91), (92) в A, B, C, D. Тогда вычисление M_i согласно (54) дает:

$$M_1 = -D = \frac{1}{3}(\lg K)_u; \qquad M_2 = \frac{1}{5}\{(\lg K)_v + A\}. \tag{100}$$

[13)] Для этих нулевых линий до сих пор отсутствует геометрическая интерпретация.

Кроме того, получаем для тензора K_{is} (56):

$$\begin{cases} K_{11} = -\frac{1}{5}C(\lg K)_v - C_v + \frac{9}{5}CA, \\ K_{12} = BC - \frac{12}{5}D_v - \frac{6}{5}A_u, \end{cases} \tag{101a}$$

$$\begin{cases} K_{21} = BC - \frac{6}{5}D_v - \frac{3}{5}A_u, \\ K_{22} = \frac{1}{5}(\lg K)_{vv} - \frac{1}{25}[(\lg K)_v + A]\cdot[(\lg K)_v - 4A] + 3DB - B_u + \frac{6}{5}A_u + 2A^2 \end{cases} \tag{101b}$$

и далее согласно (52), (58), (59):

$$\begin{cases} \hat{T}_1 = 0, & \hat{T}_2 = W^{-1/5}\cdot K, \\ \hat{G}_1 = -3W^{-3/5}CK^2; & \hat{G}_2 = 0, \\ \hat{T}^1 = -W^{3/5}C^{-1}K^{-2}; & \hat{T}^2 = 0, \\ \hat{G}^1 = 0; & \hat{G}^2 = -3W^{1/5}K^{-1}. \end{cases} \tag{102}$$

Тогда получаем для шести инвариантов согласно (61), (62):

$$\begin{aligned} &q = -\frac{1}{15}W^{-2/5}K\Big(\frac{C_u}{C} + 6D\Big), \\ &\overline{q} = +\frac{1}{5}W^{-4/5}K^2C\Big(\frac{K_v}{K} + 2\frac{C_v}{C}\Big), \\ &r = W^{-4/5}K^2C\Big(3A - \frac{C_v}{C}), \\ &s = W^{-1/5}BC, \\ &t = W^{-1/5}(2D_v + A_u), \\ &p = W^{-8/5}KC\{(\lg K)_{vv} + 3A(\lg K)_v + 18A^2 + 15BD - 5B_u + 6A_v\}. \end{aligned}$$

Четыре тождества (64)–(67) можно теперь подтвердить с необходимым терпением непосредственно с помощью пересчета, принимая во внимание (96), (98), (91), (99). При этом следует заметить, что теперь инвариантные производные инварианта I записываются в простой форме

$$\begin{aligned} I_1 &= W^{-4/5}CK^2I_v, \\ I_2 &= \tfrac{1}{3}W^{-2/5}KI_u. \end{aligned}$$

При помощи специальных параметров (96), (98) также можно легко доказать, что инварианты данного порядка существуют как раз в указанном в §3 количестве. Затем при допущении (96), (98) следует только еще составить выражения, которые остаются неизменяющимися по отношению к преобразованию

$$u = u(\overline{u}), \qquad v = v(\overline{v}) \tag{103}$$

для того, чтобы приобрести инварианты, записанные в представлении специальных параметров. В этом случае можно легко пересчитать, как преобразуются A, B, C, D и их производные и по каким законам получается полная система инвариантов. При этом следует еще верно посчитать порядки дифференцирования. Здесь в частности не будем на этом детально останавливаться.

§7

В этом разделе только намечены еще некоторые небольшие приложения наших формул.

I. К системам кривых вида (2), которые допускают двучленную группу топологических преобразований, приходим, если положить постоянными все абсолютные инварианты. Тогда q, $\overline{q}$, r, s, t, p должны быть постоянными, а все их инвариантные производные согласно (63) равны 0. Вследствие (64)–(67) теперь имеют место отношения:

$$\begin{gathered} 5q\overline{q} - qr - t = 0, \\ p + 10\overline{q}^2 + 60qs + 9r\overline{q} + 2r^2 = 0, \\ -3qt - 9qs - 2\overline{q}r = 0, \\ 4tr + 12t\overline{q} + 6pq - 15s\overline{q} + 5 = -3q(5\overline{q} + 2r)(\overline{q} + r). \end{gathered}$$

То есть только еще два среди шести постоянных инвариантов могут быть выбраны произвольно. Уже Тресс[14)] обнаружил, что Π^l_{ik} для этих систем можно представить в форме

$$\Pi^l_{ik} = \frac{a^l_{ik}}{v}, \tag{104}$$

причем a^l_{ik} являются постоянными, которые должны еще удовлетворять определенным условиям. До сих пор мы рассматривали только системы кривых с $W \neq 0$, которые допускают двучленную группу; однако теперь оказывается, что соответствующие системы кривых с $W = 0$ также можно представить в виде (104). Для последних, как мы хотим еще коротко сообщить, два примера систем кривых представляют синусоиды

$$y = \frac{1}{c_1}\sin(c_1 x + c_2) \tag{105}$$

и параболы с неподвижной директрисой

$$y = \frac{1}{4c_1}\{(x - c_2)^2 + 4c_1^2\}, \tag{106}$$

где каждый раз c_1 и c_2 являются двумя постоянными системы.

Оба раза ось x является особой. Обе системы кривых можно нетопологически отобразить на прямые линии. Для синусоид $G_i \equiv 0$, в то время как для парабол только $W = 0$, а G_i не являются тождественным нулем, так что кривые (94) совпадают с главными линиями.

II. Частный, отличный от (96), (98), выбор параметров, который часто находит применение, состоит в том, чтобы сделать u-кривые и v-кривые совпадающими с системными кривыми. Тогда согласно (19a), (12), (19) будет:

$$B = C = 0. \tag{107}$$

Затем здесь остается еще быть может только принять во внимание преобразования параметров (103), отделяя сложные, когда параметрические кривые не определены.

a) Пусть в нашей системе кривых содержится сеть шестиугольников, так что три их семейства кривых должно быть можно топологически отобразить на систему прямых

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}, \qquad x + y = \text{const.}$$

декартовой x, y-плоскости. Т.е. должно быть можно так выбрать параметры u, v, что семейства

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}, \qquad u + v = \text{const.}$$

будут системными кривыми. Согласно же (2) исполняется

$$B = 0, \qquad C = 0, \qquad A + D = 0. \tag{108}$$

Установить зато инвариантные условия, что можно так выбрать параметры в системе кривых, что выполнено (108), кажется довольно трудной задачей.

b) Пусть наша система кривых в смысле Введения будет системой ангармонического отношения, то есть состоит из ангармонических траекторий некоторой сети, так что должны иметься параметры, чтобы стало одновременно

$$B = C = 0, \qquad A_u + D_v = 0. \tag{109}$$

[14)] Tresse, Конкурсное сочинение (в указанном месте).

Ведь мы можем два семейства кривых этой сети сделать совпадающими с семействами $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ В этом случае если третье семейство определено решением дифференциального уравнения первого порядка

$$u' = f(u, v) \qquad\qquad f \neq 0,$$

то семейство интегральных кривых, которое принадлежит

$$u' = \sigma \cdot f(u, v) \tag{110}$$

с некоторой неподвижной постоянной σ, является семейством ангармонических траекторий сети при одном и том же неподвижном ангармоническом отношении. Если позволим σ изменяться, то получим другие семейства траекторий с другими значениями ангармонического отношения. Тогда все интегральные кривые (110) с произвольным σ должны быть системными кривыми, то есть удовлетворять уравнению (2), которое вследствие (107) редуцируется к

$$u'' = 3Du'^2 - 3Au'. \tag{111}$$

Из (110) получаем

$$u'' = \sigma f_u \cdot u' + \sigma f_v = \sigma^2 f_u \cdot f + \sigma f_v$$

и согласно (111)

$$\sigma^2 f_u f + \sigma f_v = 3\sigma^2 D f^2 - 3\sigma A f.$$

Пусть выполнено уравнение для произвольного σ, следовательно должно иметь место

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(\lg f)_u = D, \\ \frac{1}{3}(\lg f)_v = -A. \end{cases} \tag{112}$$

Пусть теперь имеется функция f такая, что будет удовлетворено (112), следовательно очевидно должно существовать утверждаемое соотношение $A_u + D_v = 0$. Из (112) явствует, что системы кривых с дифференциальным уравнением

$$u'' = F_v u'^2 + F_u u', \tag{112a}$$

где F — произвольная функция u и v, являются системами ангармонического отношения и что обратно, каждую систему ангармонического отношения посредством топологического отображения можно привести в форму (112a).

c) Наконец еще одно замечание об упомянутых во Введении геодезических системах. Для них мы можем минимальные линии, которые более того являются геодезическими линиями, сделать совпадающими с $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Тогда в (4) будет $g_{11} = g_{22} = 0$ и согласно (6), (14), (19) получим

$$\begin{aligned} B &= 0; \qquad D = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial u}(\lg g_{12}), \\ C &= 0; \qquad A = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial v}(\lg g_{12}), \end{aligned}$$

то есть $A_u - D_v = 0$. Поэтому должно быть можно ввести для геодезической системы такие параметры, чтобы стало одновременно

$$B = C = 0; \qquad A_u - D_v = 0. \tag{113}$$

Снова может быть очень тяжело инвариантно сформулировать одновременную выполнимость (109), так же как выполнимость (113). Геодезические системы можно привести в форму

$$u'' = F_v u'^2 - F_u u' \tag{114}$$

в противоположность системам ангармонического отношения (112a).