# К теории инвариантов обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

*Альфред Коппиш*[1)]

## Введение

Каждому обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' = \omega(x, y, y') \qquad y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{1}$$

можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение второго порядка

$$b'' = \varphi(a, b, b') \qquad b' = \frac{db}{da}, \qquad b'' = \frac{d^2b}{da^2} \tag{2}$$

благодаря тому, что в полном интегральном уравнении

$$y = f(x, a, b) \tag{3}$$

дифференциального уравнения (1) $x$, $y$ трактуются как постоянные величины, $a$, $b$ наоборот как параметры.

Уравнение (3) остается интегральным уравнением для (1), если величины $a$, $b$ подвергнуть произвольному точечному преобразованию. Вследствие этого мы должны уравнению (1) кроме уравнения (2) подобным образом поставить в соответствие каждое дифференциальное уравнение, которое получается из (2) посредством выполнения каждого произвольного точечного преобразования.

Данная работа занимается тем, чтобы установить условия, которым должна удовлетворять $\omega(x, y, y')$ для того, чтобы дифференциальные уравнения (2), соответствующие дифференциальному уравнению (1), принадлежали определенной категории дифференциальных уравнений, инвариантной относительно группы всех точечных преобразований. Такую категорию образуют все дифференциальные уравнения определенной формы, в которой $b''$ зависит от $b'$ в такой способ, что зависимость между ними остается инвариантной относительно группы всех точечных преобразований. Однако при этом отнюдь не необходимо, что каждое отдельное уравнение категории посредством некоторого точечного преобразования можно перевести в каждое другое уравнение категории.

## Глава I.**Инвариантные категории дифференциальных уравнений**

Известно, что каждое дифференциальное уравнение вида

$$y'' = \alpha_0(x, y) - 3\alpha(x, y)y' + 3\alpha_2(x, y)y'^2 - \alpha_3(x, y)y'^3, \tag{4}$$

в котором $\alpha_i$ являются любыми функциями $x$ и $y$, остается инвариантным по своей форме при общем точечном преобразовании. Уравнение (4) представляет собой простейший пример инвариантной категории дифференциальных уравнений второго порядка.

---

[1)]Перевод введения и двух глав из A. Koppisch, Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. *Inaugural Dissertation der hohen philosophischen Fakultät der königlichen Universität Greifswald zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde.* Leipzig, B.G. Teubner, 1905.

Будем теперь предполагать, пусть $y''$ определено посредством алгебраического уравнения $n$-й степени, коэффициенты которого являются целыми рациональными функциями $y'$, и исследуем, когда подобное уравнение остается инвариантным по своей форме при каждом произвольном точечном преобразовании.[2)]

Дифференциальное уравнение, которое нам нужно рассмотреть, имеет вид

$$\sum_{\mu=0}^{n} g_{m_\mu}(y')y''^{n-\mu} = 0, \tag{5}$$

где $g_{m_\mu}(y')$ представляют собой целые рациональные функции $y'$ степени $m_\mu$:

$$g_{m_\mu}(y') = \sum_{\nu=0}^{m_\mu} \alpha_{\mu\nu}(x,y)y'^{\nu}.$$

Положим в них

$$y' = -\frac{p}{q}, \qquad y'' = \frac{\sigma}{q^3} \tag{6}$$

так, что уравнение (5) переходит в новое уравнение вида

$$\sum_{\mu=0}^{n} \varphi_{i_\mu}(p,q)\sigma^{n-\mu} = 0, \tag{5$'$}$$

под $\varphi_{i_\mu}(p,q)$ понимая однородные функции $p$ и $q$ степени $i_\mu$.

Выполнив общее точечное преобразование

$$x_1 = X(x,y), \qquad y_1 = Y(x,y),$$

вычислив новые производные $y_1'$, $y_1''$ и в силу (6) вводя величины $p$, $q$, $\sigma$, $p_1$, $q_1$, $\sigma_1$, получим

$$-\frac{p_1}{q_1} = \frac{Y_x q - Y_y p}{X_x q - X_y p}$$
$$\frac{\sigma_1}{q_1^3} = \frac{(Y_y X_x - Y_x X_y)\sigma + h_3(p,q)}{(X_x q - X_y p)^3}.$$

$h_3$ — это некоторая однородная функция $p$ и $q$ третьей степени. Итак, при общем точечном преобразовании $p$, $q$, $\sigma$ будут преобразованы в следующий способ:

$$\begin{cases} p_1 = \alpha p + \beta q \\ q_1 = \gamma p + \delta q \\ \sigma_1 = \varepsilon\sigma + \alpha_0 p^3 + \alpha_1 p^2 q + \alpha_2 p q^2 + \alpha_3 q^3, \end{cases} \tag{7}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\alpha_i$ являются функциями $x$, $y$. Из последнего уравнения (7) следует:

Если понимать $p$, $q$ как однородные величины первого порядка, то $\sigma$ можно рассматривать как однородную величину третьего порядка. Уравнение

$$\varphi_{i_0}\sigma^n + \varphi_{i_1}\sigma^{n-1} + \cdots + \varphi_{i_{n-1}}\sigma + \varphi_{i_n} = 0,$$

[2)] Для нижеследующего доказательства ср. Study, Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie. Leipziger Berichte, 1901 и Engel, Die höheren Differentialquotienten. Leipziger Berichte, 1902.

в котором $\varphi_{i_\nu}$ являются однородными функциями $p$ и $q$ степени $i_\nu$, будет, таким образом, представлять собой дифференциальное уравнение второго порядка по $x$, $y$ тогда и только тогда, когда

$$i_\nu = i_0 + 3\nu,$$

и оно всегда, если мы теперь вместо $i_0$ напишем $m$, имеет вид

$$\varphi_m \sigma^n + \varphi_{m+3}\sigma^{n-1} + \cdots + \varphi_{m+3k}\sigma^{n-k} + \cdots + \varphi_{m+3n} = 0. \tag{8}$$

Далее из формул (7) немедленно следует:

"Каждое уравнение (8) остается инвариантным по своей форме относительно группы всех точечных преобразований."

Если применим найденный результат к уравнению (5′) и снова перейдем назад к уравнению (5), то следует:

"Каждое дифференциальное уравнение вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{\mu=0}^{n} g_{m_\mu}(y') y''^{n-\mu} = 0 \\ g_{m_\mu}(y') = \sum\limits_{\nu=0}^{m_\mu} \alpha_{\mu\nu}(x,y) y'^{\nu} \end{cases} \tag{5}$$

можно трактовать как уравнение общего вида

$$\sum_{\mu=0}^{n} g_{m+3\mu}(y') y''^{n-\mu} = 0, \tag{8′}$$

в которое оно бы несомненно перешло при общем точечном преобразовании, при этом $m+3\mu \geq m_\mu$ и по крайней мере для одного значения $\mu$ должен иметь место знак равенства. Каждое уравнение (8′) остается инвариантным по своей форме по отношению ко всем точечным преобразованиям." Отсюда вытекает следующий вывод:

*Уравнение*

$$\sum_{\mu=0}^{n} g_{m+3\mu}(y') y''^{n-\mu} = 0 \tag{8′}$$

*для каждой пары $n$ и $m$ представляет собой инвариантную категорию дифференциальных уравнений, как только в $g_{m+3\mu}$ мы рассматриваем коэффициенты $\alpha_{\mu\nu}$ при различных степенях $y'$ как произвольные функции $x$, $y$. Позволив $n$, $m$ принимать все значения, получим все инвариантные категории дифференциальных уравнений вида*

$$\sum_{\mu=0}^{n} g_{m_\mu}(y') y''^{n-\mu} = 0. \tag{5}$$

В дальнейшем нашей задачей будет установить условия, которым должна удовлетворять $\omega$ для того, чтобы каждое дифференциальное уравнение $b'' = \varphi(a, b, b')$, поставленное в соответствие дифференциальному уравнению $y'' = \omega(x, y, y')$, принадлежало некоторой определенной из вышеупомянутых инвариантных категорий дифференциальных уравнений.

К расммотрению этой задачи меня побудил профессор Энгель, который призвал меня в марте 1904 года приступить к случаю $m = 0$, $n = 1$, и который меня, когда мне удалось выполнение этого случая, побуждал постепенно разработать более общие случаи.

Само собой разумеется, что в каждом отдельном случае условия, которые мы получаем для $\omega$, определяют некоторый класс дифференциальных уравнений второго порядка, инвариантный относительно всех точечных преобразований. Этим мы вносим свой вклад в теорию инвариантов обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка по отношению ко всем точечным преобразованиям. Эта теория инвариантов с другой точки зрения была затронута Трессом[3)], который полностью разрешил проблему всех дифференциальных инвариантов обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка по отношению к группе всех точечных преобразований. Мы находим только некие инвариантные свойства, которые будут выражены посредством неких дифференциальных уравнений в частных производных для $\omega$, однако эти дифференциальные уравнения смогут быть нами непосредственно истолкованы, потому что они кое-что говорят о форме относящихся к ним дифференциальных уравнений между $a$ и $b$.

## Глава II. **Простейший случай: $b''$ является целой рациональной функцией $b'$**

Мы хотим теперь ответить на вопрос, какие условия для $\omega$ должны быть выполнены для того, чтобы дифференциальное уравнение на $a$ и $b$, поставленное в соответствие дифференциальному уравнению $y'' = \omega(x, y, y')$, имело вид

$$b'' = \alpha_0(a,b) - 3\alpha_1(a,b)b' + 3\alpha_2(a,b)b'^2 - \alpha_3(a,b)b'^3. \tag{4}$$

Если представить себе, что дифференциальное уравнение $y'' = \omega$ проинтегрировано, то его интегральное уравнение

$$y = Y(x, a, b) \tag{3}$$

дает в результате двукратного полного дифференцирования по $a$:

$$\begin{cases} b' = -\dfrac{y_a}{y_b} \\ b'' = -\dfrac{y_{aa}y_b^2 - 2y_{ab}y_a y_b + y_{bb}y_a^2}{y_b^3}. \end{cases} \tag{9}$$

Подставив это в уравнение (4), придем к уравнению

$$-y_{aa}y_b^2 + 2y_{ab}y_a y_b - y_{bb}y_a^2 = \alpha_0 y_b^3 + 3\alpha_1 y_b^2 y_a + 3\alpha_2 y_b y_a^2 + \alpha_3 y_a^3. \tag{10}$$

Тождественное выполнение этого уравнения является очевидно необходимым, а в силу (9) также достаточным для того, чтобы дифференциальное уравнение на $a$ и $b$, соответствующее дифференциальному уравнению $y'' = \omega$, принадлежало инвариантной категории (4).

Уравнение (10), которое согласно (4) и (9) имеет вид

$$f(x, a, b) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k(a, b) f_k(x, a, b), \tag{10'}$$

[3)] M.A. Tresse, Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. — Preisschriften der fürstlichen Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. Leipzig, Hirzel, 1896.

должно быть тождественно удовлетворено по $x$. Таким образом, можно прежде всего доказать, что только между функциями

$$f_0 = y_b^3, \qquad f_1 = 3y_b^2 y_a, \qquad f_2 = 3y_b y_a^2, \qquad f_3 = y_a^3$$

не может иметься никакого линейного отношения, коэффициенты которого свободны от $x$. С этой целью предположим, выполнялось бы равенство

$$c_0 y_b^3 + c_1 y_b^2 y_a + c_2 y_b y_a^2 + c_3 y_a^3 = 0, \tag{11}$$

где $c_k$ были бы функциями только $a$, $b$. Вместо $a$ и $b$ напишем $y_0$ и $y_0'$ и представим себе эти значения выбранными так, что $y_0$, $y_0'$ являются начальными значениями $y$, $y'$, каким они получаются при интегрировании $y'' = \omega$ для $x = x_0$, понимая под $x_0$ произвольную постоянную. Производные вычисляются из разложения в ряд

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} \omega_0 + \cdots .$$

Если придать теперь $x$, $y$, $y'$ в уравнении (11) их начальные значения, то уравнение принимает вид

$$c_3 = 0.$$

Посредством дифференцирования (11) по $x$ получим после этого

$$3c_0 y_b^2 y_b' + c_1(2y_b' y_a y_b + y_b^2 y_a') + c_2(y_b' y_a^2 + 2y_b y_a y_a') = 0$$

и отсюда вытекает при соответствующем введении начальных значений

$$c_2 = 0.$$

Посредством повторного дифференцирования (11) и введения начальных значений следует

$$c_1 = 0$$

и отсюда немедленно получается также

$$c_0 = 0.$$

Итак, только между рассматриваемыми функциями $f_0$, $f_1$, $f_2$, $f_3$ не может иметься никакого линейного отношения со свободными от $x$, не обращающимися тождественно в нуль коэффициентами. Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} f_0, & f_1, & f_2, & f_3 \\ f_0', & f_1', & f_2', & f_3' \\ f_0'', & f_1'', & f_2'', & f_3'' \\ f_0''', & f_1''', & f_2''', & f_3''' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Однако в таком случае, согласно известной теореме, уравнение

$$\begin{vmatrix} f, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3 \\ f', & f_0', & f_1', & f_2', & f_3' \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f'''', & f_0'''', & f_1'''', & f_2'''', & f_3'''' \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

которое мы получаем посредством исключения $\alpha_k$ из равенства

$$f = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k f_k \tag{10'}$$

и равенств

$$f^{(\nu)} = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k f_k^{(\nu)}, \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

выводимых из него посредством дифференцирования по $x$, представляет собой необходимое и одновременно достаточное условие для того, чтобы имелось одно и только одно равенство (10′).

Нам нужно теперь для нашего уравнения (10) установить соответствующее уравнение (12), однако это не является необходимым, чтобы образовать явно определитель, мы можем за исключение $\alpha_k$ приняться также шаг за шагом.

При дифференцировании нам нужно заметить, что мы можем выразить $y''_a$, $y''_b$, $y''_{aa}$, $y''_{ab}$, $y''_{bb}$ с помощью $y'' = \omega$. Представив себе, что в $y'' = \omega(x, y, y')$ величины $y$, $y'$, $y''$ заменены их значениями в виде функций $x$, $a$, $b$, получим тождество, которое при дифференцировании по $a$ и $b$ дает следующие выражения

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2} y_a = \dfrac{\partial}{\partial a} y'' = \omega_y y_a + \omega_{y'} y'_a \\ \dfrac{d^2}{dx^2} y_b = \dfrac{\partial}{\partial b} y'' = \omega_y y_b + \omega_{y'} y'_b \\ \dfrac{d^2}{dx^2} y_{aa} = \dfrac{\partial^2}{\partial a^2} y'' = \omega_{y'y'} y'^2_a + 2\omega_{yy'} y_a y'_a + \omega_{yy} y_a^2 + \omega_{y'} y'_{aa} + \omega_y y_{aa} \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \end{cases} \tag{13}$$

Чтобы несколько упростить сложные вычисления, введем некоторые символьные обозначения. Сначала напишем по примеру теории инвариантов

$$\alpha_0 u_b^3 + 3\alpha_1 u_b^2 u_a + 3\alpha_2 u_b u_a^2 + \alpha_3 u_a^3 = (\alpha_a u_a + \alpha_b u_b)^3, \tag{14}$$

причем под $u$ понимаем совершенно любую функцию $x$, $a$, $b$. Сами по себе $\alpha_a$ и $\alpha_b$ ничего не значат, они определены только в сочетании $\alpha_a^k \alpha_b^{3-k}$, ибо должно быть

$$\alpha_a^k \alpha_b^{3-k} = \alpha_k. \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

Для дополнительного сокращения напишем еще

$$\alpha_a u_a + \alpha_b u_b = (\alpha u).$$

Из определения $(\alpha u)$ для дифференцирования по $x$ немедленно следует

$$\frac{d}{dx}\{(\alpha u)(\alpha v)(\alpha w)\} = (\alpha u')(\alpha v)(\alpha w) + (\alpha u)(\alpha v')(\alpha w) + (\alpha u)(\alpha v)(\alpha w').$$

Если, в частности, $u = y''$, то находим согласно равенствам (13)

$$(\alpha y'') = \omega_y(\alpha y) + \omega_{y'}(\alpha y'). \tag{15}$$

Мы хотим еще ввести второй символ тем, что положим

$$-u_{aa} v_b w_b + u_{ab}(v_a w_b + v_b w_a) - u_{bb} v_a w_a = |u; v, w|. \tag{16}$$

Тогда по определению:

$$|u; v, w| = |u; w, v|.$$

Этот символ позволяет нам немедленно выписать простейшим способом производные представленных выражений:

$$\frac{d}{dx}|u; v, w| = |u'; v, w| + |u; v', w| + |u; v, w'|,$$

в силу равенства (13) получаем, в частности, случаи:

$$\begin{cases} |u; v, y''| = \omega_y |u; v, y| + \omega_{y'} |u; v, y'| \\ |y''; v, w| = \omega_{y'y'} \begin{vmatrix} y'_a, & v_a \\ y'_b, & v_b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_a, & y'_a \\ w_b, & y'_b \end{vmatrix} + \omega_{yy} \begin{vmatrix} y_a, & v_a \\ y_b, & v_b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_a, & y_a \\ w_b, & y_b \end{vmatrix} \\ \qquad + \omega_{yy'} \left\{ \begin{vmatrix} y_a, & w_a \\ y_b, & w_b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_a, & y'_a \\ v_b, & y'_b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_a, & v_a \\ y_b, & v_b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_a, & y'_a \\ w_b, & y'_b \end{vmatrix} \right\} + \omega_{y'} |y'; v, w| + \omega_y |y; v, w|. \end{cases} \tag{17}$$

Последняя формула упрощается еще существеннее, если $v$ или $w$ является равным $y$ или $y'$, тогда здесь тождественно обращаются в нуль различные из встречающихся определителей.

Введенные символы и выведенные для них правила вычисления позволяют нам без дополнительных затруднений вывести искомое условие для выполнения уравнения (10). Мы можем теперь записать это уравнение в следующей форме:

$$|y; y, y| = (\alpha y)^3. \tag{$I$}$$

Посредством дифференцирования по $x$ получим

$$|y'; y, y| + 2|y; y, y'| = 3(\alpha y)^2 (\alpha y'). \tag{$II$}$$

Продифференцировав это равенство еще раз по $x$, применив для $|y''; y, y|$, $|y; y, y''|$, $(\alpha y'')$ значения, которые получаются согласно (15) и (17), и исключив $(\alpha y)^3$ и $(\alpha y)^2 (\alpha y')$ в силу равенств (I) и (II), получим равенство

$$-\omega_{y'y'} \Delta^2 + 2|y; y', y'| + 4|y'; y, y'| = 6(\alpha y)(\alpha y')^2. \tag{$III$}$$

В нем $\Delta$ обозначает якобиан $y$ и $y'$ как функций $a$ и $b$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_a, & y'_a \\ y_b, & y'_b \end{vmatrix}.$$

Он не обращается в нуль, так как в противном случае из равенств $y = y(x, a, b)$ и $y' = y_x$ следовало бы свободное от $a$ и $b$ отношение, то есть некоторое дифференциальное уравнение на $x$, $y$ лишь первого порядка.

Нам нужно еще раз продифференцировать равенство (III), затем исключив $y''$ в силу равенств (15) и (17), и $(\alpha y)^2 (\alpha y')$ и $(\alpha y)(\alpha y')^2$ с помощью равенств (II) и (III), и заметив наконец, что

$$\frac{d\Delta}{dx} = \omega_{y'} \Delta$$

придем к равенству

$$\left(-\frac{d\omega_{y'y'}}{dx}+4\omega_{yy'}\right)\Delta^2+6|y';y',y'|=6(\alpha y')^3. \tag{IV}$$

Чтобы смочь исключить $\alpha_k$, мы должны еще последний раз продифференцировать. Посредством исключения $y''$ в силу (15) и (17), и $(\alpha y)(\alpha y')^2$ и $(\alpha y')^3$ с помощью равенств (III) и (IV) получаем наконец равенство

$$\Delta^2\left\{-\frac{d^2\omega_{y'y'}}{dx^2}+4\frac{d\omega_{yy'}}{dx}-6\omega_{yy}-\omega_{y'}\left(-\frac{d\omega_{y'y'}}{dx}+4\omega_{yy'}\right)+3\omega_y\omega_{y'y'}\right\}=0. \tag{V}$$

Так как $\Delta\neq 0$, то должен обращаться в нуль второй множитель. Это дает условие для одной только функции $\omega$, которое должно выполняться для того, чтобы имело место равенство (V). Так как это отношение будет получено посредством исключения $\alpha_k$ из равенства (I) и посредством дифференцирования по $x$ выведенных из него равенств, то оно представляет собой одновременно необходимое и достаточное условие для того, чтобы имелось одно и только одно равенство вида (I). Это было снова необходимое и достаточное условие того, чтобы дифференциальное уравнение на $a$ и $b$ имело вид (4). Итак, мы доказали:

*"Чтобы дифференциальное уравнение $b''=\varphi(a,b,b')$, относящееся к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка $y''=\omega(x,y,y')$, имело вид*

$$b''=\alpha_0(a,b)-3\alpha_1(a,b)b'+3\alpha_2(a,b)b'^2-\alpha_3(a,b)b'^3, \tag{4}$$

*необходимо и достаточно, чтобы $\omega$ удовлетворяла дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка*

$$-\frac{d^2\omega_{y'y'}}{dx^2}+4\frac{d\omega_{yy'}}{dx}-6\omega_{yy}-\omega_{y'}\left(-\frac{d\omega_{y'y'}}{dx}+4\omega_{yy'}\right)+3\omega_y\omega_{y'y'}=0.\text{“} \tag{18}$$

Если введем вместо $a$ и $b$ начальные значения $y_0$ и $y_0'$, положив $a=y_0$, $b=y_0'$, и укажем эту замену посредством заключения в квадратные скобки, то рассматриваемое уравнение (4) перейдет в уравнение

$$\frac{d^2y_0'}{dy_0^2}=[\alpha_0]-3[\alpha_1]\frac{dy_0'}{dy_0}+3[\alpha_2]\left(\frac{dy_0'}{dy_0}\right)^2-[\alpha_3]\left(\frac{dy_0'}{dy_0}\right)^3.$$

Соответствующие равенства (I)–(IV) при этом введении начальных значений, если еще сверх того придадим $x$, $y$, $y'$ специальные значения $x_0$, $y_0$, $y_0'$ и заметим, что станет

$$[|y;u,v|]_0=0$$

$$[|y';u,v|]_0=0$$

$$[(\alpha y)^k(\alpha y')^{3-k}]_0=[\alpha_k],$$

приобретут вид

$$[\alpha_3]=0 \tag{I'}$$

$$[\alpha_2]=0 \tag{II'}$$

$$6[\alpha_1] = -(\omega_{y'y'})_0 \tag{$III'$}$$

$$6[\alpha_0] = \left(-\frac{d\omega_{y'y'}}{dx} + 4\omega_{yy'}\right)_0, \tag{$IV'$}$$

где индекс 0 возле скобок должен уведомлять, что мы придали $x$, $y$, $y'$ специальные значения $x_0$, $y_0$, $y'_0$. Посредством последних равенств величины $[\alpha_k]$ полностью определены и мы можем сразу высказать следующее предложение:

*"Если мы знаем некоторое решение $\omega(x, y, y')$ дифференциального уравнения (18) и используем при интегрировании $y'' = \omega$ начальные значения $y_0$, $y'_0$ переменных $y$, $y'$ при $x = x_0$ в качестве постоянных интегрирования, то относящееся к дифференциальному уравнению $y'' = \omega$ дифференциальное уравнение на постоянные интегрирования также полностью определено без интегрирования. Оно имеет вид*

$$\frac{d^2y'_0}{dy_0^2} = \frac{1}{6}\left(-\frac{d\omega_{y'y'}}{dx} + 4\omega_{yy'}\right)_0 + \frac{1}{2}(\omega_{y'y'})_0\frac{dy'_0}{dy_0}."$$

Так как $[\alpha_3] = [\alpha_2] = 0$, то немедленно получается второе предложение:

*"Каждое дифференциальное уравнение вида*

$$b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$$

*посредством точечного преобразования можно перевести в уравнение вида*

$$b'' = \overline{\alpha}_0 - \overline{\alpha}_1 b'."$$

Мы исходим из дифференциального уравнения $y'' = \omega$ и соотносим с ним совокупность тех дифференциальных уравнений на $a$ и $b$, которые нам явствуют из интегрального уравнения $y = f(x, a, b)$, как бы ни хотели мы установить $a$ и $b$. Вводя теперь в уравнение $y = f(x, a, b)$ или, что по тому же самому выходит в $y'' = \omega$, новую переменную посредством разрешимых равенств

$$x = \mathfrak{X}(\xi, \eta), \qquad y = \mathfrak{Y}(\xi, \eta),$$

получим тогда дифференциальное уравнение

$$\eta'' = \Omega(\xi, \eta, \eta').$$

Из способа, каким мы определили соответствие дифференциальных уравнений $y'' = \omega$ и $b'' = \varphi$, тогда очевидно следует: Совокупность дифференциальных уравнений на $a$ и $b$, которые мы поставили в соответствие дифференциальному уравнению $y'' = \omega$, в точно тот же самый способ поставлена в соответствие каждому дифференциальному уравнению $\eta'' = \Omega$, которое получено из $y'' = \omega$ посредством выполнения какого-нибудь точечного преобразования. Отсюда вытекает следующее предложение:

*"Если, зная функцию $\omega$, которая является решением дифференциального уравнения в частных производных (18), образуем тогда дифференциальное уравнение $y'' = \omega$ и введем в него новую*

*переменную $\xi$, $\eta$ посредством произвольного точечного преобразования так, что получим дифференциальное уравнение $\eta'' = \Omega(\xi, \eta, \eta')$, то функция $\Omega$ также будет некоторым решением дифференциального уравнения в частных производных (18).“*

Из последнего предложения можем извлечь несколько дополнительных выводов, как только дифференциальное уравнение $y'' = \omega$ снова само принадлежит некоторой из прежде упомянутых инвариантных категорий дифференциальных уравнений.

Мы хотим ограничиться простейшим случаем, то есть исследовать, может ли дифференциальное уравнение $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3 = 0$ удовлетворять условию (18) и когда это наступает. Для этого нам нужно просто подставить $\omega$ в уравнение (18).

Вычислив полные производные в этом уравнении, получим уравнение (18) в виде

$$\begin{cases} -\omega_{xxy'y'} - \omega_x\omega_{y'y'y'} + 4\omega_{xyy'} + \omega_{y'}\omega_{xy'y'} + 3\omega_y\omega_{y'y'} - 6\omega_{yy} - 4\omega_{y'}\omega_{yy'} \\ +y'(-2\omega_{xyy'y'} - \omega_y\omega_{y'y'y'} + 4\omega_{yyy'} + \omega_{y'}\omega_{yy'y'}) - y'^2\omega_{yyy'y'} \\ +\omega(-2\omega_{xy'y'y'} + 3\omega_{yy'y'}) - \omega^2\omega_{y'y'y'y'} - 2y'\omega\omega_{yy'y'y'} = 0. \end{cases} \tag{18'}$$

Заменив в нем $\omega = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$, получим уравнение, которое должно быть удовлетворено тождественно по $x$, $y$, $y'$, когда $\omega$ должна представлять собой решение (18), и так как это уравнение содержит $y'$ только явно и может быть упорядочено по степеням $y'$, то коэффициенты при различных степенях $y'$ должны тождественно обращаться в нуль. Выполнив соответствующие вычисления, для $\omega_k$ получим уравнения

$$\begin{cases} \omega_{3xx} + 2\omega_{2xy} + \omega_{1yy} - 3\omega_1\omega_{3x} - 3\omega_{1x}\omega_3 - 2\omega_{0y}\omega_3 - \omega_0\omega_{3y} + 3\omega_2\omega_{1y} + 6\omega_2\omega_{2x} = 0 \\ \omega_{0yy} + 2\omega_{1xy} + \omega_{2xx} - 3\omega_2\omega_{0y} - 3\omega_0\omega_{2y} - 2\omega_0\omega_{3x} - \omega_3\omega_{0x} + 3\omega_1\omega_{2x} + 6\omega_1\omega_{1y} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Таким образом, мы нашли:

Если $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$ и между функциями $\omega_k$ имеются два дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка (19), то дифференциальные уравнения на $a$ и $b$, соответствующие дифференциальному уравнению $y'' = \omega$, достоверно имеют вид $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$.

Совокупность всех дифференциальных уравнений, которые происходят из $y'' = \omega$ посредством выполнения всех точечных преобразований, поставлена в соответствие в точности тем же самым способом каждому отдельному дифференциальному уравнению $b'' = \varphi$, как совокупность всех дифференциальных уравнений, которые будут получены из $b'' = \varphi$ посредством всех точечных преобразований, поставлена в соответствие каждому отдельному дифференциальному уравнению $y'' = \omega$. В частности, если дифференциальному уравнению $b'' = \varphi$ соответствует уравнение вида

$$y'' = \omega = \omega_0(x,y) - 3\omega_1(x,y)y' + 3\omega_2(x,y)y'^2 - \omega_3(x,y)y'^3,$$

то $\varphi$ необходимо должна быть решением дифференциального уравнения в частных производных

$$-\frac{d^2\varphi_{b'b'}}{da^2} + 4\frac{d\varphi_{bb'}}{da} - 6\varphi_{bb} - \varphi_{b'}\left(-\frac{d\varphi_{b'b'}}{da} + 4\varphi_{bb'}\right) + 3\varphi_b\varphi_{b'b'} = 0. \tag{20}$$

Если сверх того $\omega$ является решением уравнения (18), то есть между $\omega_k$ имеются уравнения (19), то

$$b'' = \varphi = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$$

и так как $\varphi$ является решением уравнения (20), то между коэффициентами $\alpha_k$ должны иметься соответствующие отношения:

$$\begin{cases} \alpha_{3aa} + 2\alpha_{2ab} + \alpha_{1bb} - 3\alpha_1\alpha_{3a} - 3\alpha_{1a}\alpha_3 - 2\alpha_{0b}\alpha_3 - \alpha_0\alpha_{3b} + 3\alpha_2\alpha_{1b} + 6\alpha_2\alpha_{2a} = 0 \\ \alpha_{0bb} + 2\alpha_{1ab} + \alpha_{2aa} - 3\alpha_2\alpha_{0b} - 3\alpha_0\alpha_{2b} - 2\alpha_0\alpha_{3a} - \alpha_3\alpha_{0a} + 3\alpha_1\alpha_{2a} + 6\alpha_1\alpha_{1b} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

как между $\omega_k$. Таким образом, приходим к конечному результату:

*"Если*

$$y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$$

*и между функциями $\omega_k$ имеются отношения (19), то дифференциальные уравнения на $a$ и $b$, соответствующие дифференциальному уравнению $y'' = \omega$, необходимо имеют вид*

$$b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$$

*и встречающиеся здесь функции $\alpha_k$ удовлетворяют со своей стороны условиям (21)."*

Теперь предположим, есть $b'' = \varphi = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ и относящееся к нему дифференциальное уравнение есть $y'' = \omega = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$. В таком случае $\alpha_k$ удовлетворяют уравнениям (21), а $\omega_k$ — уравнениям (19). Уравнение $y'' = \omega = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$ посредством точечного преобразования всегда можно привести к виду

$$y'' = \overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_1 y' = \overline{\omega}.$$

Вводя теперь в дифференциальное уравнение $b'' = \varphi$ начальные значения, которые получаются при интегрировании $y'' = \overline{\omega}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y_0'}{dy_0^2} = \frac{1}{6}\left(-\frac{d\overline{\omega}_{y'y'}}{dx} + 4\overline{\omega}_{yy'}\right)_0 + \frac{1}{2}(\overline{\omega}_{y'y'})_0 \frac{dy_0'}{dy_0}$$

или, если заменим $\overline{\omega}$ его значением:

$$\frac{d^2 y_0'}{dy_0^2} = \frac{2}{3}\left(\overline{\omega}_{1y}\right)_0.$$

Если функции $\alpha_k$ в дифференциальном уравнении $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ удовлетворяют условиям (21), то следовательно всегда имеется точечное преобразование, которое переводит данное уравнение в уравнение $b'' = \overline{\varphi}(a, b)$.

В предъявленных условиях те же самые соображения относятся также к $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$, это уравнение тоже можно привести к виду $y'' = \overline{\overline{\omega}}(x, y)$. Вводя теперь в $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ начальные значения, которые получаются при интегрировании уравнения $y'' = \overline{\overline{\omega}}(x, y)$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y_0'}{dy_0^2} = 0.$$

Приходим к результату:

"Если функции $\alpha_k$ в дифференциальном уравнении $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ удовлетворяют условиям (21), то посредством точечного преобразования уравнение всегда можно привести к виду $b'' = 0$. Дифференциальное уравнение на $x$, $y$, относящееся к дифференциальному уравнению $b'' = \varphi$, имеет вид $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$ и, так как $\omega_k$ удовлетворяют уравнениям (19), всегда может быть приведено к виду $y'' = 0$.“

Мы можем еще показать, что уравнения (21) являются также необходимыми для того, чтобы $b'' = \varphi(a, b, b')$ можно было свести к $b'' = 0$. Предположим, редукция выполнима. Уравнение $b'' = 0$ имеет вид $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$, только $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, то есть уравнения (21) наверняка выполнены. Поэтому дифференциальные уравнения на $x$, $y$, относящиеся к уравнению $b'' = 0$, достоверно имеют вид $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$. Они соответствуют уравнению $b'' = 0$ в точно тот же самый способ, как каждое уравнение, происходящее посредством какого-нибудь точечного преобразования из $b'' = 0$, то есть и данное уравнение $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$. Для того, чтобы два уравнения $y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3$ и $b'' = \alpha_0 - 3\alpha_1 b' + 3\alpha_2 b'^2 - \alpha_3 b'^3$ могли соответствовать друг другу, необходимо и достаточно, чтобы существовали отношения (19), соответственно, (21). Таким образом, так как те же самые соображения справедливы и для дифференциального уравнения $y'' = \omega$, получаем предложение:

”*Чтобы дифференциальное уравнение $y'' = \omega(x, y, y')$ посредством точечного преобразования можно было привести к виду $y'' = 0$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид*

$$y'' = \omega_0 - 3\omega_1 y' + 3\omega_2 y'^2 - \omega_3 y'^3 \tag{4}$$

*и чтобы функции $\omega_k(x, y)$ удовлетворяли дифференциальным уравнениям в частных производных*

$$\begin{cases} \omega_{3xx} + 2\omega_{2xy} + \omega_{1yy} - 3\omega_1\omega_{3x} - 3\omega_{1x}\omega_3 - 2\omega_{0y}\omega_3 - \omega_0\omega_{3y} + 3\omega_2\omega_{1y} + 6\omega_2\omega_{2x} = 0 \\ \omega_{0yy} + 2\omega_{1xy} + \omega_{2xx} - 3\omega_2\omega_{0y} - 3\omega_0\omega_{2y} - 2\omega_0\omega_{3x} - \omega_3\omega_{0x} + 3\omega_1\omega_{2x} + 6\omega_1\omega_{1y} = 0.\text{“} \end{cases} \tag{19}$$

Это утверждение было уже доказано Трессом другим способом (Сравн. M.A. Tresse, Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. — Preisschriften der fürstlichen Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. Leipzig, 1896. — Смотри там же, страница 56, теорема VII). Уравнение Тресса $H = 0$ — это в точности наше уравнение (18), которое более того выполнено тогда и только тогда, когда $\omega_k$ удовлетворяют уравнениям (19).

Кроме того, уравнения (19) нашел явно Артур Грэхем Халл в своей диссертации ”Bestimmung der Definitionsgleichung aller endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen in der Ebene“ (Leipzig, 1902), при том как условия интегрируемости для определяющих уравнений наиболее общей восьмипараметрической группы точечных преобразований, которая является подобной общей проективной группе плоскости (Смотри там же, страница 19). Наши уравнения превращаются в уравнения Халла $\mathfrak{U} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, если положить

$$\omega_0 = -\beta, \qquad 3\omega_1 = \varphi, \qquad 3\omega_2 = -\psi, \qquad \omega_3 = \theta.$$

В сочинении Klassification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen $x$, $y$, die eine Gruppe von Transformationen gestatten III. (Archiv for Mathematik, Bd. 8, S. 371–382. Christiania, 1883) Ли завершил проблему: предъявленное дифференциальное уравнение второго порядка, о котором указано, что оно может приобрести форму $y'' = 0$, к этой форме привести. Так как он при этом уделил особое внимание необходимым операциям интегрирования, он выделил условия приводимости неявно, однако их можно без труда вывести из его формул.