1983 г. ноябрь—декабрь т. 38, вып. 6(234)

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 2 марта 1983 г.

1. В. Е. Захаров (Черноголовка) «Многомерный метод обратной задачи рассеяния».

В докладе обсуждались возможности обобщений метода обратной задачи теории рассеяния на многомерный случай.

Заседание 9 марта 1983 г.

1. В. В. Козлов «Реализация неинтегрируемых связей в классической механике».

Рассмотрим многомерную натуральную механическую систему с лагранжианом

$$L_N=\frac{1}{2}(A(q)\dot{q}\cdot\dot{q})+\frac{\alpha N}{2}(a(q)\cdot\dot{q})^2+V(q).$$

Предположим, что кроме потенциальных сил с силовой функцией $V(q)$ на систему действуют диссипативные силы с функцией Рэлея

$$F_N=-\frac{\beta N}{2}(a(q)\cdot\dot{q})^2.$$

Уравнения движения имеют вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_N}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L_N}{\partial q}=\frac{\partial F_N}{\partial\dot{q}}. \tag{1}$$

Фиксируя значения параметров $\alpha>0$, $\beta\geqslant 0$, устремим N к бесконечности. Задача состоит в том, чтобы описать предельные решения уравнения (1).

Теорема. *Пусть $q(t,\dot{q}_0,q_0,N)$, $0\leqslant t\leqslant T$,— решение уравнения (1) с начальным состоянием $\dot{q}_0$, q_0, не зависящим от N и удовлетворяющим условию $a(q_0)\cdot\dot{q}_0=0$. Тогда на каждом конечном интервале времени $0\leqslant t\leqslant T_1<T$ существует*

$$\lim_{N\to\infty}q(t,\dot{q}_0,q_0,N)=\hat{q}(t,\dot{q}_0,q_0).$$

Предельное движение $\hat{q}(t)$ вместе с некоторой «сопряженной» функцией $\hat{p}(t)$ удовлетворяют каноническим дифференциальным уравнениям

$$\dot{p}=-\frac{\partial H_0}{\partial q}-\frac{\beta}{\alpha}\frac{(A^{-1}p\cdot a)a}{A^{-1}a\cdot a},\quad \dot{q}=\frac{\partial H_0}{\partial p}, \tag{2}$$

где $H_0=p\cdot\dot{q}-L_0|_{\dot{q}\to p}$ *и* $\dot{q}=A^{-1}p-\dfrac{(A^{-1}p\cdot a)A^{-1}a}{A^{-1}a\cdot a}$.

Из последнего соотношения следует, что предельное движение $\hat{q}(t)$ при всех t удовлетворяет уравнению $a(q)\cdot\dot{q}=0$. Если $\beta=0$, то уравнения (2) будут уравнениями экстремалей вариационной задачи Лагранжа о стационарном значении функционала действия

$$\int_{t_1}^{t_2} L_0(\dot{q}(t),\ q(t))\,dt$$

в классе кривых с закрепленными концами, удовлетворяющих уравнению $a(q)\cdot\dot{q}=0$. Таким образом, в этом случае после предельного перехода мы получаем механическую систему с лагранжианом L_0, на которую наложена линейная по скорости связь $a\cdot\dot{q}=0$, причем движение определяется с помощью естественного обобщения вариационного принципа Гамильтона. Эта новая математическая модель движения подробно обсуждается в работе [1], где можно найти необходимые ссылки. В другом предельном случае, когда отношение $\beta/\alpha\to+\infty$, решения уравнений (2) стремятся к решениям традиционных неголономных уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial\dot{q}}=\frac{\partial L_0}{\partial q}+\mu a(q),\qquad a(q)\cdot\dot{q}=0.$$

Задача о реализации неголономных связей силами вязкого трения (когда $\alpha=0$) впервые рассмотрена Каратеодори.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Козлов. Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I—III.— Вестн. МГУ, сер. матем., мех., 1982, № 3, с. 92—100; 1982, № 4, с. 70—76; 1983, № 3.

Заседание 23 марта 1983 г.

1. Н. Ф. Морозов, М. В. Паукшто (Ленинград) «О дискретных моделях плоской теории упругости».

Рассматриваются дифференциально-разностные аппроксимации динамической системы уравнений Ламе, имеющие вид уравнений Ньютона, и устанавливаются условия сходимости данных аппроксимаций (модели Борна — Кармана [1]). Показано, что характер сходимости определяется распределением кратных корней характеристической системы. Случай неоднородной периодической цепочки изучен В. П. Масловым [2] и, под иным углом зрения,— Н. Н. Яненко и А. М. Франком [3].

1°. Пусть $G=\{x\in\mathbb{R}^2\colon x=hHn,\ n\in\mathbb{Z}^2\}$ — система движущихся частиц, H — матрица с определителем, равным единице, $h>0$ — параметр. Частица $x\in G$ взаимодействует с помощью линейноупругих связей с $2m$ частицами $\{x\pm hc_j\}_{j=1}^{m}$ решетки G, так что в гармоническом приближении векторы смещения $u=u(x,\ t)$ частиц $x\in G$ удовлетворяют задаче Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=h^{-2}\sum_{j=1}^{m}A_j\nabla_{hc_j}\overline{\nabla}_{hc_j}u;\qquad u|_{t=0}=u_0,\quad v|_{t=0}=v_0,$$

$$A_j=\begin{pmatrix}k_jc_{1j}^2+l_jc_{2j}^2 & c_{1j}c_{2j}(k_j-l_j)\\ c_{1j}c_{2j}(k_j-l_j) & k_jc_{2j}^2+l_jc_{1j}^2\end{pmatrix}.$$

Здесь u_0 — смещение частиц в положении равновесия, v_0 — начальные скорости частиц, c_{1j} и c_{2j} — компоненты вектора c_j; k_j и l_j — вещественные числа, характеризующие продольную и поперечную жесткости j-й связи

$$\nabla_{hc_j}u(x,\ t)=u(x+hc_j,\ t)-u(x,\ t),\qquad \overline{\nabla}_{hc_j}u(x,\ t)=\nabla_{hc_j}u(x-hc_j,\ t).$$

2°. Через $P_h(z)$, $z\in\mathbb{R}^2$, обозначим символ соответствующей (1) стационарной задачи, $P_0(z)=\lim\limits_{h\to 0}P_h(z)$.

Лемма 1. *При* $k_j \geqslant |l_j|$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *корни* $\nu_p = \nu_p(z, h)$ $(p = 1, 2, 3, 4)$ *характеристического многочлена* $\det(P_h(z) - \nu E)$ *расположены симметрично относительно координатных осей, и хотя бы два из них чисто мнимые. Корни двукратные тогда и только тогда, когда*

$$R(z, h) = \sum_{j=1}^{m} 4h^{-2}\sin^2 \pi h(z, c_j) \cdot (k_j - l_j)(c_{1j} + ic_{2j})^2 = 0.$$

Лемма 2. *Пусть корни* $\{\nu_j(z, h)\}_{j=1}^4$ — *простые и* $Q_h(z, \nu)$ — *матрица, элементы которой с точностью до знака совпадают с главными минорами матрицы* $P_h(z) - \nu E$; *тогда*

$$\exp\{tP_h(z)\} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} \frac{\exp\{t\nu_j(z, h)\}}{\nu_j(z, h)\,|R(z, h)|} Q_h(z, \nu_j(z, h)).$$

Лемма 3. *Матрица предельной задачи* $-P_0(z)$ *совпадает с матрицей-символом, соответствующим системе уравнений Ламе, тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$\sum_{j=1}^{m} (c_{ij} + zc_{2j})^2 [k_j(c_{1j} + \zeta c_{2j})^2 + l_j(c_{2j} - \zeta c_{1j})^2] = \mu(z - \zeta)^2 + (2\mu + \lambda)(1 + z\zeta)^2;$$

здесь λ, μ — *константы Ламе.*

3°. Обозначим через S_h оператор ограничения функций на решетку G, через $\mathscr{E}_2(\mathbb{R}^2) \subseteq L_2(\mathbb{R}^2)$ — класс сужений на $\mathbb{R}^2$ целых функций экспоненциального типа, через F_h и F_0 — преобразования Фурье функций из $l_2(G)$ и $L_2(\mathbb{R}^2)$ соответственно.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{P}_h = F_h^{-1}\exp\{tP_h(\cdot)\}F_h$, *и корни предельной задачи простые, т. е.* $\nu_j(z, 0)\,|R(z, 0)| \neq 0$, $|z| = 1$ $(j = 1, 2, 3, 4)$; *тогда для любых* $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathscr{E}_2(\mathbb{R}^2)$ *имеем* $(\mathbf{P}_h S_h - S_h \mathbf{P}_0)w_0 \to 0$ *в* $l_2(G)$ *при* $h \to 0$.

Примеры. Квадратная решетка: $c_1 = (1, 0)$, $c_2 = (0, 1)$; $H = E$; $k_j \geqslant |l_j|$ $(j = 1, 2)$. В этом случае при $|z_1|\sqrt{k_1 - l_1} = |z_2|\sqrt{k_2 - l_2}$ имеются кратные корни, компоненты матрицы $\exp\{tP_0(z)\}$ не суммируемы с квадратом, сходимости в $l_2(G)$ нет. Треугольная решетка [4]: $c_1 = (1, 0)$, $c_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $c_3 = (1/2, -\sqrt{3}/2)$, $l_1 = l_2 = l_3 = l$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Кратных корней нет. Константы Ламе предельной системы имеют вид $\lambda = 3/8(k - 5l)$, $\mu = 3/8(k + 3l)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Косевич. Физическая механика реальных кристаллов.— Киев: Наукова думка, 1981.

[2] В. П. Маслов. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.

[3] А. М. Франк, Н. Н. Яненко. О свойствах осредненного движения упругой одномерной решетки и движения мезообъектов.— Новосибирск: ИТПМ, препринт № 14, 1980.

[4] Л. И. Слепян. Динамика трещины в решетке.— ДАН, 1981, **258** : 3, с. 261—264.

Заседание 30 марта 1983 г.

1. Р. И. Ямилов (Уфа) «О классификации дискретных эволюционных уравнений».

Наличие «лишних» законов сохранения — один из отличительных признаков уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Мы перечислим уравнения вида

$$(1) \qquad u_t = f(u_{-1}, u, u_1), \qquad f_{-1} \cdot f_1 \neq 0,$$

$(f_i = \partial f/\partial u_i)$ с двумя локальными законами сохранения. Здесь (1) — сокращенная запись бесконечной системы уравнений $du_i/dt = f(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$.

Пусть u_i $(i \in \mathbb{Z})$ — бесконечный набор независимых переменных, все функции зависят от конечного числа переменных u_i, $D(p(u_k, u_{k+1}, \ldots)) = p(u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots)$

Функция h называется плотностью закона сохранения уравнения (1), если $\partial_f h \in \mathrm{Im}(D-1)$, $\partial_f = \sum D^i(f)\partial/\partial u_i$. Функция вида $p = \sum (\partial/\partial u)\, D^i(h_{-i})$ такова, что $p = p(u_{-n}, \ldots, u_n)$, где $p_{-n}\cdot p_n \neq 0$ при $n > 0$. Число n называется порядком закона сохранения. Замену вида $u = \sigma(v)$, $t = c\tau$ $(c \in \mathbb{C})$ назовем локальной. В рамках нашей задачи уравнения, связанные локальной заменой, естественно отождествлять.

Для уравнения вида (1) с двумя законами сохранения порядков $N > n > 2$ выполнены условия $-f_1/f_{-1} = D(g)/g$, $\partial_f \ln g + 2f_0 \in \mathrm{Im}(D-1)$, $\partial_f \ln f_1 \in \mathrm{Im}(D-1)$. Например, они выполнены для уравнений $u_t = (\alpha u^2 + \beta u + \gamma)(u_1 - u_{-1})$, $u_t = (\alpha u^4 + \beta u^2 + \gamma)[(u_1 + u)^{-1} - (u + u_{-1})^{-1}]$, $u_t = P(u)[(u_1 - u)^{-1} + (u - u_{-1})^{-1}]$, $u_t = [F(u_{-1}, u, u_1) + \mu\sqrt{F(u_{-1}, u, u_{-1})}\sqrt{F(u_1, u, u_1)}](u_1 - u_{-1})^{-1}$, где $\mu = -1, 0, 1$, $F = (u_1 - u) \times (u_{-1} - u)[\lambda + P''(u)/12] + (u_1 - 2u + u_{-1})P'(u)/4 + P(u)$, P — полином четвертой степени. Назовем эти уравнения уравнениями главного списка. Первое из этих уравнений интегрируется методом обратной задачи [1]. Остальные, насколько известно автору, в литературе встречаются впервые. Уравнением дополнительного списка назовем уравнение вида $v_\tau = F(\psi, D^{-1}\psi)$, где ψ — функция вида $\varphi(v_1 + v)$ или $\varphi(v_1 - v)$, если оно заменой $u = \sigma \circ \psi$, $t = c\tau$ сводится к уравнению главного списка. Дополнительный список содержит семь уравнений, восстановить которые нетрудно. При помощи выписанных здесь трех условий доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а. *С точностью до локальных замен множество нелинейных уравнений вида* (1) *с двумя законами сохранения порядков $N > n > 2$ состоит из уравнений главного и дополнительного списков.*

Известно [1], что первое уравнение главного списка — разностный аналог уравнения $v_t = v_{xxx} + (av^2 + bv + c)v_x$ (при $a = b - 1 = c = 0$ — это уравнение Кортевега—де Фриза). Укажем дифференциальные уравнения, в которые в континуальном пределе переходят второе и четвертое с $\mu = 0$ уравнения главного списка. Если взять решение $u(y, t)$ второго уравнения $(u_{\pm 1} = u(y \pm h, t))$ с $\alpha = -a/2h$, $\beta = -3h^{-3}$, $\gamma = -c/2h$ и положить $v = u[x + (b + 6h^{-2})t, t]$, то получим $v_t = v_{xxx} - 3v^{-1}v_xv_{xx} + (3/2)v^{-2}v_x^3 + v^{-2}v_x(av^4 + bv^2 + c) + O(h^2)$ (одна из записей экспоненциального уравнения Калоджеро). В случае четвертого уравнения с $\mu = 0$, $\lambda = -12h^{-3}$, $P(u) = 2hR(u)$ (R — полином четвертой степени) для $v = u(x - 6h^{-2}t, t)$ имеем $v_t = v_{xxx} - (3/2)v_x^{-1}v_{xx}^2 + v_x^{-1}R(u) + O(h^2)$ (уравнение Кричевера — Новикова).

З а м е ч а н и е. В настоящее время для уравнений главного и дополнительного списков автором построены законы сохранения сколь угодно большого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Е. З а х а р о в, С. В. М а н а к о в, С. П. Н о в и к о в, Л. П. П и т а е в с к и й. Теория солитонов: Метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.

Заседание 6 апреля 1983 г.

1. М. А. К р а с н о с е л ь с к и й, А. В. П о к р о в с к и й «О гистерезисных нелинейностях».

Гистерезисные нелинейности обычны в физике, механике, биологии и т. д. (магнитный, диэлектрический, пластический, капиллярный и т. д. гистерезисы). Доклад посвящен общим методам описания и исследования систем с гистерезисом. Развивается новый математический аппарат, основанный на выделении элементарных носителей гистерезиса — гистеронов, трактуемых как преобразователи с пространствами состояний, соответствиями вход — выход и вход — состояние. Развиваемые точки зрения примыкают к известной методологии Нола, Колемана, Труседелла (связанной с шестой проблемой Гильберта) в механике сплошных сред. Используются модели, восходящие к Максвеллу, Больцману, Маделунгу, Прандтлю, Мазингу, Вольтерра, Прейсаху, Гилтаю, Мизесу, Сен-Венану, Треска, Ишлинскому и др. Существенную роль играет идеология теории систем, развитая с большой полнотой для линейного случая Заде, Дезоером, Арбибом, Фалбом, Калманом и др.

При изучении любых систем возникают две принципиально разные ситуации. В первой задача заключается в определении реакции системы на заданные внешние воздействия; здесь достаточен алгоритм построения соответствий вход—выход и вход—состояние (например, соответствий переменное внешнее поле — магнитная индукция, переменная деформация — напряжение и т. д.). При этом можно ограничиться входами простой структуры (например, кусочно линейными). Вторая ситуация возникает, когда изучаемый преобразователь — это одно из звеньев более сложной системы. Если звено с гистерезисом включено в сложную систему с дополнительными воздействиями и неизбежными шумами, то входы на звено неизвестны и их структура может быть сложна; здесь описание гистерезиса должно предусматривать возможность входов общей природы и для удобства исследования динамики сложной системы соотношения вход—выход и вход—состояние должны допускать операторную трактовку с возможно более богатым арсеналом свойств соответствующих операторов на различных классах входов.

В качестве основного элементарного носителя гистерезиса используется гистерон — детерминированный и управляемый статический преобразователь со скалярными входом и выходом, корректный к шумам малой амплитуды на входе. Для его описания вначале рассматриваются кусочно монотонные входы, а затем осуществляется переход к произвольным непрерывным входам (аналогично тому, как из интегральных сумм предельным переходом строится интеграл). Простыми примерами гистерона являются люфт и упор. Устанавливаются идентификационные теоремы. Изучаются гистероны с векторными входами и выходами. Если свойства гистерона в результате старения, изменения температуры и т. д. меняются, то используется переменный гистерон, изучение которого основано на аппарате виброкорректных дифференциальных уравнений.

Специальному анализу подвергнуты модификации гистерона, предназначенные для описания явлений типа самонамагничивания. Первая из них связана с известной моделью Маделунга. Вторая — с идеями стохастического интегрирования.

В развитие схем, восходящих к Мазингу, Ишлинскому, Прейсаху, Гилтаю и другим авторам, изучаются сложные недетерминированные гистерезисные нелинейности при помощи конструкций, аналогичных спектральным разложениям по системам гистеронов и неидеальных реле.

Развитый аппарат в значительной части изложен в монографии авторов «Системы с гистерезисом» (М.: Наука, 1983). Он удобен для исследования процессов в замкнутых системах, содержащих звенья с гистерезисом.

Заседание 20 апреля 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики научной конференции «Ломоносовские чтения».

1. О. А. Олейник «О некоторых задачах усреднения в теории упругости».

Основные результаты доклада содержатся в прилагаемом списке литературы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Иосифьян, О. А. Олейник, А. С. Шамаев. О сходимости энергии, тензоров напряжений и частот собственных колебаний в задачах усреднения, возникающих в теории упругости.— ДАН, 1984, **274**:1.

[2] Г. А. Иосифьян, О. А. Олейник, А. С. Шамаев. Усреднение собственных значений и собственных функций краевой задачи теории упругости в перфорированной области.— Вестн. МГУ, сер. матем.-мех., 1983, № 4, с. 53—63.

2. В. И. Арнольд «Замечания о теории возмущений для задач типа Матье и числах Каталана».

Текст доклада напечатан в УМН, 1983, 38 : 4, с. 189—203.

3. М. И. Вишик «Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными».

Содержание доклада опубликовано в статье А. В. Бабина и М. И. Вишика в УМН, 1983, 38 : 4, с. 133—187.

4. В. М. Миллионщиков «Об одном типичном свойстве экспоненциально устойчивых многообразий».

Пусть V^n — связное замкнутое n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^3. Множество S всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на V^n, наделяется C^1-топологией; подробнее: берется любой конечный атлас $\{U_i,\ h_i\colon\ U_i \to R^n\}_{i\in I}$ многообразия V^n; в покрытие $\{U_i\}_{i\in I}$ вписывается покрытие $\{V_i\}_{i\in I}$ такое, что $\overline{V_i} \subset U_i$ $(i \in I)$; сходимость последовательности диффеоморфизмов в C^1-топологии есть по определению равномерная сходимость их самих и их первых производных в картах $\{V_i,\ h_i|_{V_i}\colon\ V_i \to \to R^n\}$ $(i \in I)$; от выбора указанных атласов и вписанных покрытий эта топология не зависит.

Теорема. *В пространстве $S \times V^n$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ, обладающее свойством: для всякого $(f,\ x) \in D$ множество точек $y \in V^n$ таких, что точки $f^m x$, $f^m y$ экспоненциально сближаются при $m \to +\infty$, содержит погруженное в V^n дифференцируемое многообразие V^-, касательное пространство которого в точке x есть множество всех тех касательных векторов $\mathfrak{x}$ многообразия V^n в точке x, для которых $df^m\mathfrak{x}$ экспоненциально стремится к нулю при $m \to +\infty$; скорость сближения или стремления к нулю измеряется в координатах любого из указанных выше «вписанных» атласов.*

5. Б. Р. Вайнберг, М. А. Шубин «Асимптотическое разложение спектральной функции эллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$».

Содержание доклада опубликовано в работах, приведенных в списке литературы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. С. Попов, М. А. Шубин. Асимптотическое разложение спектральной функции для эллиптических операторов второго порядка в $\mathbb{R}^n$.— Функц. анализ, 1983, **17**: 3, с. 37—45.

[2] Б. Р. Вайнберг. Полное асимптотическое разложение спектральной функции эллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$.— Вестн. МГУ, сер. матем.-мех., 1983, № 4.

6. Ю. С. Ильяшенко «Некоторые теоремы конечности для полиномиальных дифференциальных уравнений на плоскости».

Заседание 27 апреля 1983 г.

1. Е. И. Шустин (Горький) «Метод Гильберта — Роона и бифуркации сложных особых точек кривых восьмого порядка».

Классические методы построения плоских вещественных неособых алгебраических кривых заключаются в построении кривых с особенностями типа A_1 и их последующем возмущении. О. Я. Виро, используя возмущения особых точек типа $X_{2,0}$, N_{16} и других, завершил изотопическую классификацию неособых кривых 7-го порядка и построил 42 новые M-кривые 8-го порядка [1]. Для возмущения особой точки типа $X_{2,0}$ применяются вещественные M-кривые 8-го порядка с особенностью $X_{2,0}$. О. Я. Виро предложил использовать для классификации таких кривых метод Гильберта — Роона, которым Д. А. Гудков расклассифицировал неособые кривые 6-го порядка [2].

M-кривая 8-го порядка с особенностью $X_{2,0}$ состоит из 9 неособых овалов и особой ветви, четырежды касающейся в особой точке некоторой прямой. С точностью до бирационального преобразования особая ветвь расположена в окрестности особой точки. В этом случае особая точка делит ветвь на 4 петли. Особая ветвь имеет тип A, если одна петля охватывается двумя другими, либо имеет тип B, если это не выполнено. Кривая с особой ветвью типа A обозначается $A(a,\ b,\ c)$, если a овалов лежат в неориентируемой области, b овалов охватываются одной петлей, c овалов охватываются двумя петлями. Кривая типа $B(a,\ b,\ c)$ имеет особую ветвь типа B, a овалов лежат в неориентируемой области, b овалов лежат между двумя петлями, c овалов охватываются третьей петлей. Кривая типа $D(a,\ b)$ имеет особую ветвь типа B, $1 + b + a$ овалов в неориентируемой области, причем один овал охватывает a других овалов. M-кривые удовлетворяют сравнениям Виро — Харламова [3]: $b \equiv 1 \bmod 4$ для $A(a,\ b,\ c)$, $a \equiv 0 \bmod 4$ для $B(a,\ b,\ c)$, $a \equiv 1 \bmod 4$ для $D(a,\ b)$.

Теорема 1. *Не существуют кривые типов* $B(0, 9, 0)$, $B(0, 6, 3)$, $B(0, 4, 5)$, $A(0, 9, 0)$, $A(a, b, c)$, *где* $a+b+c=9$, $ac \neq 0$.

Основа доказательства — метод Гильберта — Роона. Несуществование кривых $B(a, b, c)$, $a+b+c=9$, $c \neq 0$, $b \equiv 1 \bmod 2$, доказано О. Я. Виро. Прочие M-схемы, удовлетворяющие вышеприведенным сравнениям, реализованы О. Я. Виро, кроме типа $B(0, 0, 9)$. Методом Гильберта — Роона можно доказать несуществование $(M-1)$-кривых 25 типов, не запрещаемых другими ограничениями.

Метод Гильберта — Роона может быть применен к классификации вещественных кривых 8-го порядка с особенностью типа N_{16} и к исследованию вещественных бифуркаций особенности N_{16}:

Теорема 2. *Особую точку типа* N_{16}, *в которой пересекаются пять вещественных ветвей данной кривой, можно возмутить методом Виро с помощью любой* M-*распадающейся кривой* C_1C_5 (*см.* [1], [4]).

Для некоторых M-распадающихся кривых C_1C_5 этот результат доказан О. Я. Виро другим способом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Я. Виро. Кривые степени 7, кривые степени 8 и гипотеза Рэгсдейл.— ДАН, 1980, 254 : 6, с. 1306—1310.

[2] Д. А. Гудков, Г. А. Уткин. Топология кривых шестого порядка и поверхностей четвертого порядка.— Уч. зап. Горьк. ун-та, 1969, вып. 87, с. 5—153.

[3] О. Я. Виро, В. М. Харламов. Сравнения для вещественных алгебраических кривых с особенностями.— УМН, 1980, 35 : 4, с. 154—155.

[4] Г. М. Полотовский. Каталог M-распадающихся кривых шестого порядка.— ДАН, 1977, 236 : 3, с. 548—551.

Заседание 4 мая 1983 г.

1. Л. А. Калякин (Уфа) «Длинноволновые асимптотики в гиперболических задачах».

Рассматривается задача Коши для гиперболической системы уравнений с малым параметром ε:

$$(1)\qquad [\partial_t + \lambda_i(\xi, \tau)\partial_x]u_i = \varepsilon[A_i(U, \xi, \tau, \varepsilon)\partial_x U + b_i(U, \xi, \tau, \varepsilon)],$$

$$(2)\qquad U(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = \Phi(x, \xi); \qquad i = 1, \ldots, m; \qquad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geqslant 0,$$

$$\xi = \varepsilon x, \quad \tau = \varepsilon t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \lambda_1 < \ldots < \lambda_m, \quad U = (u_1, \ldots, u_m).$$

Предполагается, что исходные данные — гладкие. К уравнениям (1), (2) сводится, в частности, задача о длинноволновой асимптотике решения нелинейной системы [1]:

$$\partial_t \overline{U} + A(\overline{U})\partial_x \overline{U} = 0, \qquad \overline{U}(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = \overset{0}{\Phi}(\xi) + \varepsilon\Phi(x, \xi).$$

Цель работы — построение асимптотического разложения (а. р.) решения $U(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно в области $0 \leqslant |x| + t \leqslant M \cdot \varepsilon^{-1}$.

Структура а. р. и методика построения различны для разных классов решений. В случае, когда $\Phi(x, \xi) = \Phi^{\pm}(\xi) + O(x^{-N})$ $\forall N$ при $x \to \pm\infty$, применяется метод сращивания. А. р. строится в виде рядов, различных в разных подобластях:

$$(3)\qquad U(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{k}{U}(x, t), \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{k}{V}(\xi, \tau), \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{k}{W}_{\alpha}(\sigma_\alpha, \tau), \qquad \sigma_\alpha = \varepsilon^{-1}\omega_\alpha(\xi, \tau), \quad \alpha = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Здесь ω_α определяются из уравнений $[\partial_\tau + \lambda_\alpha(\xi, \tau)\partial_\xi]\omega_\alpha = 0$, $\omega_\alpha(\xi, 0) = \xi$. Ряды (3) представляют а. р. решения равномерно в соответствующих областях: 1) $0 \leqslant |x|$, $t \leqslant$

$\leqslant \varepsilon^{-\beta}$; 2) $0 \leqslant |\xi|$, $\tau \leqslant M$, $|\omega_\alpha(\xi, \tau)| \geqslant \varepsilon^\delta \, \forall\alpha$; 3) $|\omega_\alpha(\xi, \tau)| \leqslant \varepsilon^\gamma$, $0 \leqslant \tau \leqslant M$ ($\alpha = 1, \ldots, m$); здесь $0 < \beta$, $\gamma < 1/2$, $0 < \delta < 1$. Коэффициенты а. р. определяются как решения стандартных задач. Нелинейные задачи могут встретиться лишь на шаге $k = 0$: уравнения Хопфа для α-компонент $\overset{0}{w}_{\alpha,\alpha}(\sigma_\alpha, \tau)$ вектор-функций $\overset{0}{W}_\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, m$) и полулинейная система для $\overset{0}{V}$.

В другом случае, когда начальные данные $\Phi(x, \xi)$ являются условно-периодическими по x, применяется метод двухмасштабных разложений. А. р. для каждой компоненты строится в виде единого ряда

$$u_i(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{k}{u}_i(s_i, \rho, \xi, \tau) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$s_i = x - \varepsilon^{-1} \int_0^\tau \lambda_i(\zeta)\, d\zeta, \qquad \rho = \varepsilon^{-1} \int_0^\tau a(\zeta)\, d\zeta.$$

Здесь предполагается, что $\lambda_i = \lambda_i(\tau)$ не зависят от ξ и существуют такие $a(\tau) \neq 0$, $\nu_{ij} = \mathrm{const}$, что $\lambda_i - \lambda_j = a(\tau)\nu_{ij}\ \forall i, \forall j$. Кроме того, на спектр $\{\mu\}$ вектор-функции $\Phi(x, \xi)$ налагаются ограничения, связанные с проблемой малых знаменателей: все числа $\mu \cdot \nu_{ij}$ — алгебраические. Стандартные задачи для коэффициентов здесь более сложные (включают операторы усреднения). Периодическая задача с $\lambda_i = \mathrm{const}$ рассмотрена в [2].

Все результаты переносятся на случай кратных характеристик, когда u_i являются вектор-функциями размерностей $m_i \geqslant 1$. Возможны также обобщения на параболические системы. При этом для $\overset{0}{w}_{\alpha,\alpha}$ получаются уравнения Бюргерса.

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Taniuti. Reductive perturbation method and far fields of wave equations.— Supplement of the progress of theoretical physics, 1974, 55, p. 1—35.

[2] А. А. Штарас. Асимптотическое интегрирование слабонелинейных систем с частными производными. —ДАН, 1977, **237** : 3, с. 525—528.