ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 85, № 3
декабрь, 1990

Р. И. Ямилов

ОБРАТИМЫЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БЕКЛУНДА

При классификации дифференциальных уравнений в частных производных невозможно обойтись без обратимых замен переменных, к которым, помимо давно известных точечных и контактных преобразований, относятся, например, так называемые симметрические и обобщенные контактные преобразования (см. обзор [1]). В данной статье речь идет о еще одном классе обратимых замен переменных.

Рассматриваются векторные эволюционные уравнения в частных производных $\mathbf{u}_t=\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx},\ldots)$. Если расширить некоторым образом набор динамических переменных $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx},\ldots$, то многие преобразования Беклунда таких уравнений в расширенном наборе $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx},\ldots, \mathbf{u}_{\pm1}, \mathbf{u}_{\pm2},\ldots$ могут быть записаны как цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений $(\mathbf{u}_{n+1})_x=\mathbf{g}((\mathbf{u}_n)_x, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1})$, $n\in\mathbb{Z}$, совместные с этими уравнениями. В случае, когда имеется совместная пара — уравнение в частных производных и подобная цепочка — указан способ задания замен переменных, обратимых в расширенном наборе переменных (теорема 1). В рамки применимости теоремы 1 попадают, например, уравнение Кортевега — де Фриза и расщепленное нелинейное уравнение Шредингера.

1. Рассмотрим векторную цепочку уравнений вида

$$(1.1)\qquad (\mathbf{u}_{n+1})_x=\mathbf{f}((\mathbf{u}_n)_x, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}),$$

где n пробегает все целые числа, индекс x обозначает производную по x, а символы $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{f}$ — векторы-столбцы $\mathbf{u}_i=(u_i^1, u_i^2,\ldots, u_i^m)^t$ и вектор-функцию $\mathbf{f}=(f^1, f^2,\ldots,f^m)^t$. Цепочка (1.1) полностью определяется любым из своих уравнений, и во избежание громоздких формул мы будем в подобных цепочках опускать индекс n, ограничиваясь заданием соотношения с $n=0$:

$$(1.2)\qquad \mathbf{u}_{1,x}=\mathbf{f}(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1),$$

где $\mathbf{u}\equiv\mathbf{u}_0$. Цепочка $\mathbf{u}_t=\mathbf{H}$, где вектор-функция $\mathbf{H}$ зависит от конечного числа переменных из набора

$$(1.3)\qquad \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\pm1}, \mathbf{u}_{\pm2},\ldots, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx},\ldots,$$

совместна с (1.2), если равенство

$$(1.4)\qquad D_xD(\mathbf{H})=(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}_x)D_x(\mathbf{H})+ \\ +(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u})\mathbf{H}+(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}_1)D(\mathbf{H})$$

является следствием (1.2). Здесь $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}_x$, $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}$, $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}_1$ — матрицы Якоби (например $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}\equiv(\partial f^i/\partial u^j)$), а D_x, D — действующие на вектор-функции конечного числа переменных (1.3) операторы: D_x — дифференцирование ($D_x(\mathbf{u})=\mathbf{u}_x$), D — оператор сдвига ($D(\mathbf{u})=\mathbf{u}_1$; если $\mathbf{h}$ — вектор-функция нескольких переменных, то $D(\mathbf{h}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c},\ldots))=\mathbf{h}(D(\mathbf{a}), D(\mathbf{b}),\ldots)$).

Совместность означает, в частности, что попарно коммутируют операторы D_x, D и дифференцирование D_t ($D_t(\mathbf{u})=\mathbf{H}$). Мы будем рассматривать цепочки (1.2) с невырожденной матрицей $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}_x$. В случае таких цепочек независимыми можно считать переменные (1.3). При помощи (1.2) все переменные $\partial^j\mathbf{u}_i/\partial x^j$ в равенстве (1.4) можно выразить через независимые, после чего равенство (1.4) должно выполняться тождественно. С цепочкой вида (1.2) могут быть совместны как чисто «непрерывные» уравнения

$$\mathbf{u}_t=\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx},\ldots), \tag{1.5}$$

так и чисто «дискретные»

$$\mathbf{u}_\tau=\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\pm1}, \mathbf{u}_{\pm2},\ldots) \tag{1.6}$$

(см. примеры ниже; пример совместных цепочек вида (1.2), (1.6) появлялся в работе [2]). Под действие следующей теоремы 1 попадают, например, непрерывное уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t=u_{xxx}-12uu_x \tag{1.7}$$

и дискретная цепочка Вольтерра

$$u_\tau=u(u_1-u_{-1}). \tag{1.8}$$

Теорема 1. *Пусть цепочка* (1.2) *записывается в виде*

$$D_x(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1))=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1), \tag{1.9}$$

где матрицы $\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u}$, $\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u}_1$ невырождены, а координаты вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ переменных u^i, u_1^i функционально независимы. Тогда замена

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1), \tag{1.10}$$

связывающая переменные (1.3) *и*

$$\mathbf{v}, \mathbf{v}_{\pm1}, \mathbf{v}_{\pm2},\ldots, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_{xx},\ldots, \tag{1.11}$$

обратима. Совместные с (1.9) *уравнения* (1.5), (1.6) *в результате этой замены переходят соответственно в уравнения вида*

$$\mathbf{v}_t=\mathbf{G}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_{xx},\ldots), \tag{1.12}$$

$$\mathbf{v}_\tau=\mathbf{\Psi}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_{\pm1}, \mathbf{v}_{\pm2},\ldots), \tag{1.13}$$

совместные с цепочкой вида

$$D(\mathbf{p}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x))=\mathbf{q}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x), \tag{1.14}$$

где матрицы $\partial\mathbf{p}/\partial\mathbf{v}_x$, $\partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{v}_x$ невырождены, а координаты вектор-функций $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ переменных v^i, v_x^i функционально независимы. Обратно, если цепочка (1.2) *записывается в виде* (1.14), *то замена переменных*

$$\mathbf{u}=\mathbf{p}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x) \tag{1.15}$$

обратима, а совместные с (1.14) *уравнения* (1.12), (1.13) *в результате замены переходят соответственно в уравнения вида* (1.5), (1.6), *совместные с цепочкой вида* (1.9).

Доказательство. Из соотношений (1.9), (1.10) следует, что

(1.16) $\mathbf{v}_x=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$,

поэтому обратимость замены переменных очевидна. Будем считать, что $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ выражаются через $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_x$ по формулам (1.15) и

(1.17) $\mathbf{u}_1=\mathbf{q}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x)$.

Из этих формул легко получить соотношение (1.14). Равенства

$$(\partial\mathbf{p}/\partial\mathbf{v}_x)A=\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u}_1, \quad (\partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{v}_x)A=-\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u},$$

$$A=(\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{u})(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u}_1)-(\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{u}_1)(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u}),$$

являющиеся дифференциальными следствиями соотношений

(1.18) $$\mathbf{p}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1), \ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1))=\mathbf{u},$$
$$\mathbf{q}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1), \ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1))=\mathbf{u}_1,$$

объясняют, почему невырождены матрицы $\partial\mathbf{p}/\partial\mathbf{v}_x$, $\partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{v}_x$.

Пусть уравнение $\mathbf{u}_t=\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — функция переменных (1.3), совместно с (1.9). Замена (1.10) переводит его в уравнение $\mathbf{v}_t=\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ зависит от переменных (1.11)), причем

(1.19) $$\mathbf{R}=D_t\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)=(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u})\mathbf{H}+(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u}_1)D(\mathbf{H}),$$

(1.20) $$D_x\mathbf{R}=D_t\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)=(\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{u})\mathbf{H}+(\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{u}_1)D(\mathbf{H})$$

(см. (1.10), (1.9)). Условие совместности (1.4) в случае уравнения $\mathbf{v}_t=\mathbf{R}$ и цепочки (1.14) имеет вид

(1.21) $$D\left(\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{R}+\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{v}_x}D_x\mathbf{R}\right)=\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{R}+\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{v}_x}D_x\mathbf{R}.$$

Выразим $\mathbf{R}$, $D_x(\mathbf{R})$ через $\mathbf{H}$, $D(\mathbf{H})$ при помощи формул (1.19), (1.20). В силу следствий из (1.18), получаемых дифференцированием равенств (1.18) по $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$, выражение в правой части (1.21) равно $D(\mathbf{H})$, а выражение под знаком D в левой части (1.21) равно $\mathbf{H}$, т. е. (1.21) превращается в тождество. Таким образом, уравнение, совместное с (1.9), в результате замены (1.10) переходит в уравнение, совместное с (1.14).

Получим из уравнений (1.5), (1.6) уравнения (1.12), (1.13). В силу (1.10), (1.5)

$$\mathbf{v}_t=(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u})\mathbf{F}+(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u}_1)D(\mathbf{F}),$$

и правая часть равенства зависит только от $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ и их производных по x. Поэтому (см. (1.15), (1.17)) $\mathbf{v}_t$ зависит только от $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_{xx}, \ldots$, т. е. имеет место равенство вида (1.12). Из (1.10), (1.6) получаем

$$\mathbf{v}_\tau=(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u})\boldsymbol{\Phi}+(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\mathbf{u}_1)D(\boldsymbol{\Phi}),$$

причем в выражении справа имеются только переменные $\mathbf{u}_i$. Из (1.14) видно, что только от $\mathbf{v}_x$ и переменных $\mathbf{v}_i$ зависят переменные $(\mathbf{v}_i)_x$, а значит (см. (1.15)), и переменные $\mathbf{u}_i$, следовательно,

$$\mathbf{v}_\tau=\Psi(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{\pm1}, \mathbf{v}_{\pm2}, \ldots). \tag{1.22}$$

Точно так же из (1.16) находим, что $\mathbf{v}_{x\tau}$ зависит от тех же переменных, что функция Ψ из (1.22). Сравнивая $\mathbf{v}_{x\tau}$ с $\mathbf{v}_{\tau x}$, полученным дифференцированием (1.22), видим, что Ψ в (1.22) не зависит от $\mathbf{v}_x$, т. е. имеет место равенство вида (1.13).

Совершенно аналогично доказывается обратное утверждение теоремы. Из соотношений (1.14), (1.15) получается (1.17). Выражая $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_x$ через $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ по формулам (1.10), (1.16) и исключая $\mathbf{v}$, получаем равенство (1.9). Условие совместности цепочки (1.9) и уравнения, получаемого из совместного с (1.14) уравнения $\mathbf{v}_t=\mathbf{R}$, преобразуется на этот раз в тождество $D_x(\mathbf{R})=D_x(\mathbf{R})$. С целью записать (1.13) в виде (1.6) из (1.15), (1.13) находим, что $\mathbf{u}_\tau$ зависит только от $\mathbf{v}_i$, $(\mathbf{v}_i)_x$, следовательно (см. (1.10), (1.16)), имеет место (1.16). Наконец, при помощи (1.15), (1.17), (1.12) устанавливаем, что $\mathbf{u}_t$, $(\mathbf{u}_1)_t$ зависят только от $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_{xx}, \ldots$. Сравнивая $D(\mathbf{u}_t)$, $D_t(\mathbf{u}_1)$, приходим к уравнению вида (1.5).

Замечание 1. Будем говорить, что уравнения (1.5), (1.12) связаны подстановкой $\mathbf{u}=\mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x)$, если

$$(\partial\mathbf{r}/\partial\mathbf{v})\mathbf{G}+(\partial\mathbf{r}/\partial\mathbf{v}_x)D_x(\mathbf{G})=$$
$$=\mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x),\ D_x(\mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x)), \ldots).$$

Как показывает теорема, уравнения (1.5), (1.12) связаны сразу двумя различными подстановками (1.15), (1.17) (координаты вектор-функций $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ функционально независимы). Обратно, если имеются две такие подстановки, то, исключая букву $\mathbf{u}$, получаем цепочку (1.14), совместную с (1.12). Совместность имеет место потому, что в результате дифференцирования соотношения (1.14) по t в силу (1.12) получается равенство

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}(\mathbf{v}_1, (\mathbf{v}_1)_x),\ (\mathbf{p}(\mathbf{v}_1, (\mathbf{v}_1)_x))_x, \ldots)=$$
$$=\mathbf{F}(\mathbf{q}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x),\ (\mathbf{q}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x))_x, \ldots),$$

которое является следствием (1.14).

Замечание 2. По локальным законам сохранения $a_t=b_x$ (или $c_\tau=(D-1)d$) уравнения (1.5) (или (1.13)), где a, b являются скалярными функциями конечного числа переменных $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_{xx}, \ldots$ (c, d — переменных $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_{\pm1}$, $\mathbf{v}_{\pm2}, \ldots$), легко построить локальные законы сохранения уравнения (1.12) (соответственно (1.6)), используя подстановку (1.15) (соответственно (1.10)) (см., например, [3]).

В скалярном случае простейшим примером находящейся в рамках применимости теоремы 1 цепочки вида (1.2) является цепочка

$$(u_1+u)_x=u_1^2-u^2, \tag{1.23}$$

с которой совместны

$$u_t=u_{xxx}-6u^2u_x, \tag{1.24}$$

$$u_\tau=-(u_1+u)^{-1}+(u+u_{-1})^{-1}. \tag{1.25}$$

Уравнение (1.24) известно как модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза, а (1.23) — его преобразование Беклунда. Уравнения (1.24), (1.25) совместны друг с другом в силу (1.23). Пример совместной тройки уравнений (1.23)—(1.25) появлялся в работе [4].

В векторном случае возьмем расщепленное нелинейное уравнение Шредингера

(1.26) $$u_t=u_{xx}+2u^2v, \quad -v_t=v_{xx}+2v^2u$$

и запишем его преобразование Беклунда в виде системы двух цепочек, одна из которых —

$$(u_1+\varepsilon u)_x+\alpha(u_1+\varepsilon u)=$$
$$=(u_1-\varepsilon u)\,[\beta-(u_1+\varepsilon u)(v_1+\varepsilon^{-1}v)]^{1/2},$$

а вторая получается заменой $u\leftrightarrow v$, $\varepsilon\leftrightarrow\varepsilon^{-1}$, $\alpha\to-\alpha$. Замена вида (1.10) $\hat{u}=u_1+\varepsilon u$, $\hat{v}=v_1+\varepsilon^{-1}v$ приводит к системе, инвариантной относительно преобразования

(1.27) $$u\leftrightarrow v, \quad x\to-x, \quad t\to-t,$$

одно из уравнений которой имеет вид

(1.28) $$u_t=u_{xx}+\gamma u^2v+$$
$$+{}^1/_2(u_x+\alpha u)(\beta u^{-1}v^{-1}-1)^{-1}[(\ln uv^2)_x-\alpha],$$

где $\gamma={}^1/_2$. Так называемое симметрическое преобразование при любом γ связывает систему (1.28) с вырождениями модели Ландау — Лифшица (см. [1]).

2. С точностью до сравнительно простых преобразований список уравнений вида $u_t=u_{xxx}+f(u,\ u_x,\ u_{xx})$ с богатым набором локальных законов сохранения (определенных в замечании 2) состоит из уравнения Кричевера — Новикова, уравнений (1.7), (1.24), а также

(2.1) $$u_t=u_{xxx}-{}^1/_8u_x^3+z(u)\,u_x,$$

где $z(u)=\alpha\exp(u)+\beta\exp(-u)+\gamma$,

(2.2) $$u_t=u_{xxx}-\frac{3}{2}\,\frac{u_xu_{xx}^2}{u_x^2+1}+y(u)\,u_x(u_x^2+1),$$

где y удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(y')^2=P(y)=-{}^8/_3(y+2\gamma)\,[(y-\gamma)^2-4\alpha\beta]$$

(см. [5, 3]). Уравнения (1.7), (1.24), (2.2), (2.1) связаны двойными дифференциальными подстановками (см. [3]), а значит (см. замечание 1 к теореме 1), эквивалентны с точки зрения обсуждаемой здесь теории. Как показывает пример уравнения (1.24), может встречаться ситуация, когда со скалярной цепочкой вида (1.2) совместна пара уравнений: одно из уравнений (1.7), (1.24), (2.1), (2.2) и представитель полного списка дискретных уравнений вида $u_\tau=g(u_1,\ u,\ u_{-1})$ с богатым набором локальных законов сохранения из [6]. Укажем несколько таких пар, опираясь на теорему 1. Цепочки вида (1.2) будем называть нелокальными, а вида (1.6) — локальными.

Можно записать (1.23) в виде (1.14) и ввести новую переменную

$2\hat{u}=u^2-u_x$. Уравнение (1.24) перейдет в точности в (1.7), а цепочка (1.25) — в цепочку

$$(2.3)\qquad u_\tau=\varepsilon[h(u_1+u)-h(u+u_{-1})]/[h(u_1+u)+h(u+u_{-1})],$$

где $\varepsilon=1$, $h=(u_1+u)^{1/2}$. С другой стороны, (1.23) позволяет ввести переменную $\hat{u}=-2\ln(u_1+u)$. Так, выясняется, что уравнению (2.1) с $\alpha=\gamma=$ $=\beta+{}^3/_2=0$ соответствует локальная цепочка

$$(2.4)\qquad u_\tau=\exp((u_1+u)/2)-\exp((u+u_{-1})/2).$$

Опуская нелокальную цепочку, заметим только, что легко записать ее в виде (1.9) и получить замену $\hat{u}=\exp((u_1+u)/4)$, которая приводит к уравнению (2.2) с $y(u)=-{}^3/_2u^{-2}$. Из (2.4) получается цепочка, связанная с уравнением Вольтерра (1.8) очевидным точечным преобразованием $(\hat{u}=\sigma(u))$.

Еще одну группу примеров можно получить, используя двойную подстановку из [3], связывающую решения уравнений (2.1), (2.2) в случае общего положения (хотя бы одно из чисел α, β отлично от нуля). Подстановка имеет вид $\hat{u}=\pm2\operatorname{arsh}u_x+\varphi(u)$, где $z(\varphi(u))=y(u)$, $\hat{u}$ — решение (2.1), а u — решение (2.2). В соответствии с замечанием 1 к теореме 1 эта двойная подстановка позволяет построить нелокальную цепочку вида (1.14) для уравнения (2.2), а значит, и цепочку вида (1.9) для (2.1):

$$(2.5)\qquad \left(z\left(\frac{u_1+u}{2}\right)\right)_x=\left(P\left(z\left(\frac{u_1+u}{2}\right)\right)\right)^{1/2}\operatorname{sh}\frac{u_1-u}{2},$$

где P — полином, определяющий функцию y из (2.2).

В частном случае $2z(u)=\operatorname{ch}u+{}^1/_3$ с (2.5) совместна локальная цепочка

$$(2.6)\qquad u_\tau=\operatorname{th}((u_1+u)/4)-\operatorname{th}((u+u_{-1})/4).$$

Из нее для (2.2) получается цепочка, связанная точечным преобразованием с

$$(2.7)\qquad 4v_\tau=(1-v^2)(v_1-v_{-1})$$

(заметим, что $v=\operatorname{th}((u_1+u)/4)$ — связь между (2.6), (2.7)). Наконец, (2.5) в нашем частном случае можно записать в виде

$$(u_1+u)_x=\alpha\operatorname{sh}(u_1/2)-\alpha\operatorname{sh}(u/2),$$

где $\alpha=4i/\sqrt{6}$, что позволяет ввести новую переменную $4\hat{u}=-u_x+\alpha\operatorname{sh}(u/2)$. Приходим к уравнению

$$(2.8)\qquad u_t=u_{xxx}+({}^2/_3-6u^2)u_x$$

с нелокальной цепочкой

$$(2.9)\qquad (\operatorname{arsh}2\alpha^{-1}(u_1+u))_x=u_1-u$$

и локальной цепочкой вида (2.3) с другими ε, h. Поскольку уравнения (2.8), (1.24) совпадают с точностью до преобразования Галилея ($\hat{u}(t,\hat{x})=$ $=u(t,x)$, $\hat{x}=x+3t/2$, u — решение (2.8)), мы видим, что уравнению (1.24) соответствуют как две нелокальные, так и две локальные цепочки. Цепочка (2.9) появлялась в работах [7, 8].

3. Имеется немало векторных уравнений вида

(3.1) $\mathbf{V}_t=\mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{V}_x, \mathbf{V}_{xx}, \ldots)$,

где $\mathbf{V}=(u, v)^t$, совместных с цепочками вида

(3.2) $\mathbf{V}_x=\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{V}_{\pm 1}, \mathbf{V}_{\pm 2}, \ldots)$

(см. [4]). Независимыми здесь естественно считать переменные

(3.3) $u, v, u_{\pm 1}, v_{\pm 1}, u_{\pm 2}, v_{\pm 2}, \ldots,$

а условие совместности выглядит следующим образом:

$$(\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{V})\mathbf{F}+(\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{V}_1)D(\mathbf{F})+(\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{V}_{-1})D^{-1}(\mathbf{F})+\ldots=$$
$$=(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{V})\mathbf{G}+(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{V}_x)D_x(\mathbf{G})+(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{V}_{xx})D_x^2(\mathbf{G})+\ldots.$$

Для таких уравнений нередко удается вводить замены, обратимые в наборе переменных (3.3) (см. теорему 2). В рамках применимости теоремы 2 находятся уравнение Шредингера (1.26), а также модели Гейзенберга и Ландау — Лифшица, записанные в виде (3.1) (см. [4]).

Теорема 2. *Пусть совместная с* (3.1) *цепочка* (3.2) *имеет вид*

(3.4) $u_x=\varphi(u, v, u_1, v_1), \quad v_x=\psi(u_{-1}, v_{-1}, u, v),$

где $\varphi(a, b, c, d)$, $\psi(a, b, c, d)$ *функционально независимы как функции переменных* b, c. *Тогда обратимая в наборе* (3.3) *замена переменных* $\hat{u}=u$, $\hat{v}=v_1$ *переводит* (3.1) *снова в уравнение вида* (3.1), *причем старое и новое уравнения связаны дифференциальными подстановками вида*

(3.5) $u=\hat{u}, \quad v=A(\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}_x, \hat{v}_x),$

(3.6) $u_1=B(\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}_x, \hat{v}_x), \quad v_1=\hat{v}.$

Доказательство. Записывая (3.1) в новых переменных, видим, что $\hat{u}_t$ зависит только от переменных $\hat{u}$, $\hat{v}_{-1}$ и их производных по x, а $\hat{v}_t$ — только от $\hat{v}$, $\hat{u}_1$ и их производных по x. Но соотношения (3.4) в новых переменных таковы, что можно получить формулы вида

(3.7) $\hat{u}_1=B(\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}_x, \hat{v}_x), \quad \hat{v}_{-1}=A(\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}_x, \hat{v}_x).$

Поэтому $\hat{u}_t$, $\hat{v}_t$ можно выразить через $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{u}_x$, $\hat{v}_x, \ldots$. Формулы (3.6) являются следствием (3.7).

Замечание 3. То, что записанные в новых переменных уравнение (3.1) и цепочка (3.2) снова совместны, предлагается, когда это необходимо, проверять прямыми вычислениями. Именно так было сделано в приведенном ниже примере.

Подстановки (3.5), (3.6) (и именно в связи с цепочками вида (3.4)) появлялись в работе [4]. Мы, опираясь на теорему 2, покажем, как из известной системы (1.26) можно получить квазилинейную систему

(3.8) $$\begin{cases} u_t=u_{xx}-2u_x(\ln a)_x+{}^1/_2(1-a^{-2})u^{-1}u_x^2, \\ -v_t=v_{xx}-2v_x(\ln b)_x+{}^1/_2(1-b^{-2})v^{-1}v_x^2, \end{cases}$$

где функции a, b задаются неявными соотношениями

$$2a(b+1)=vu_x, \quad 2b(a+1)=-uv_x.$$

Эта система уравнений инвариантна относительно замены (1.27) и может быть представлена в виде

$$\mathbf{V}_t=M(\mathbf{V}, \mathbf{V}_x)\mathbf{V}_{xx}+\mathbf{N}(\mathbf{V}, \mathbf{V}_x),$$

где $\mathbf{V}=(u, v)^t$ – вектор-столбец, а матрица M имеет нулевой след и определитель, равный минус единице.

Система (1.26) совместна с системой вида (3.4),

$$u_x=u_1+u^2v_1, \quad -v_x=v_{-1}+v^2u_{-1}$$

(см. [4]). Переходя к новым переменным в соответствии с теоремой 2, получаем совместную пару

$$(3.9) \qquad \begin{cases} u_t=u_{xx}-2(u^2v_x+u^3v^2), \\ -v_t=v_{xx}+2(v^2u_x-v^3u^2), \end{cases}$$

$$(3.10) \qquad u_x=u_1+u^2v, \quad -v_x=v_{-1}+v^2u.$$

Система цепочек (3.10) снова имеет вид (3.4). В результате введения стандартных новых переменных из (3.9), (3.10) получается совместная пара, в которой дискретная система не относится к системам (3.4). Однако можно сделать дополнительно точечное преобразование ($\hat{u}=\hat{u}(u, v)$, $\hat{v}=\hat{v}(u, v)$), которое не меняет вида векторных уравнений (3.1), (3.2). Композиция двух обратимых преобразований

$$\hat{u}=2u/(uv_1-1), \quad \hat{v}=2v_1/(uv_1-1)$$

приводит к непрерывной системе (1.28) с $\alpha=\gamma=\beta+1=0$ и дискретной системе вида (3.4)

$$v_1u_x=2A(D(A)+1), \quad -u_{-1}v_x=2A(D^{-1}(A)+1),$$

где $A=(uv+1)^{1/2}$. На следующем шаге обратимая замена переменных из теоремы 2 дает систему уравнений (3.8).

Список литературы

[1] *Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* // УМН. 1987. Т. 42. № 4. С. 3–53.
[2] *Weis J.* // J. Math. Phys. 1987. V. 28. № 9. P. 2025–2039.
[3] *Свинолупов С. И., Соколов В. В., Ямилов Р. И.* // ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 802–805.
[4] *Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 47–73.
[5] *Свинолупов С. И., Соколов В. В.* // Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 86–87.
[6] *Ямилов Р. И.* // УМН. 1983. Т. 38. № 6. С. 155–156.
[7] *Degasperis A., Santini P. M., Ablowitz M. J.* // J. Math. Phys. 1985. V. 26. № 10. P. 2469–2472.
[8] *Магадеев Б. А.* // ТМФ. 1987. Т. 72. № 2. С. 313–317.

Институт математики
Башкирского научного центра
Уральского отделения АН СССР

Поступила в редакцию
8.VI.1990 г.

R. I. Yamilov

INVERTIBLE SUBSTITUTIONS GENERATED BY THE BACLUND TRANSFORMATIONS

For classification of partial differential equations one cannot do without the invertible substitutions, which include, besides the well-known point and contact transfor mations, so-called symmetrical and generalized contact ones as well. In this paper one more class of invertible substitutions is considered.