ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 139, № 2
май, 2004

 Р.И. Ямилов*

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ШЛЕЗИНГЕРА

Для всех уравнений из известного списка интегрируемых релятивистских цепочек Тоды построены автопреобразования Шлезингера. При построении существенно используется лагранжевость уравнений и стандартный переход к гамильтоновой форме их записи, который в данном случае описывается обратимыми, но неточечными заменами переменных. Обсуждаются два примера другого вида, но с аналогичными свойствами, которые также являются интегрируемыми лагранжевыми уравнениями, допускающими преобразование Шлезингера.

Ключевые слова: интегрируемость, цепочка Тоды, лагранжевы и гамильтоновы уравнения, автопреобразования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно (см. [1]–[3]), система уравнений Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура (АКНС)

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \qquad -v_t = v_{xx} + 2v^2 u \tag{1}$$

допускает автопреобразование

$$\tilde{u} = u_{xx} - \frac{u_x^2}{u} + u^2 v, \qquad \tilde{v} = \frac{1}{u}. \tag{2}$$

Многократное применение этого преобразования,

$$(u, v) = (u_n, v_n) \quad \to \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_{n+1}, v_{n+1}),$$

приводит к цепочке соотношений

$$u_{n+1} = u_{n,xx} - \frac{u_{n,x}^2}{u_n} + \frac{u_n^2}{u_{n-1}}$$

*Институт математики Уфимского центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: yamilov@imat.rb.ru

(v_n исключается по формуле $v_n = 1/u_{n-1}$), которая в терминах $q_n = \ln u_n$ записывается как известная интегрируемая модель Тоды:

$$q_{n,xx} = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}. \tag{3}$$

Цепочка Тоды (3) задает таким образом автопреобразование Шлезингера (2) (мы используем этот термин, следуя работе [3]) для системы АКНС (1). Другие автопреобразования такого же типа для систем уравнений, аналогичных (1), можно найти в работах [4]–[6].

Автопреобразование Шлезингера для интегрируемого нелинейного уравнения – это специальный (вырожденный) случай автопреобразования Беклунда. Применяя такое преобразование, мы не получаем дополнительных постоянных параметров, но иногда можем, тем не менее, построить многосолитонное решение. В случае начального решения (u_0, v_0) системы (1) такого, что $v_0 = 0$, функция u_0 удовлетворяет уравнению теплопроводности: $u_{0,t} = u_{0,xx}$. Нетрудно подобрать решения уравнения теплопроводности с большим количеством произвольных постоянных такие, что через определенное количество шагов мы получим многосолитонное решение как для системы (1), так и для нелинейного уравнения Шредингера

$$i\psi_t = \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi$$

(см., например, [6]).

Оказывается, релятивистская цепочка Тоды

$$\ddot{u}_n = \frac{\dot{u}_{n+1}\dot{u}_n}{1+e^{u_n-u_{n+1}}} - \frac{\dot{u}_n\dot{u}_{n-1}}{1+e^{u_{n-1}-u_n}}, \qquad \dot{u}_n = \frac{du_n}{dt} \tag{4}$$

допускает автопреобразование того же типа, а именно

$$\tilde{u}_n = \ln\frac{e^{u_{n+1}} + e^{u_n}}{\dot{u}_n} \tag{5}$$

(преобразование (5) является, по-видимому, новым, как и все остальные автопреобразования, которые будут представлены ниже). Это автопреобразование является обратимым на решениях цепочки (4), и обратное к нему имеет вид

$$u_n = \ln\frac{\tilde{u}_{n,t}}{e^{-\tilde{u}_n} + e^{-\tilde{u}_{n-1}}}. \tag{6}$$

Интересно, что при переходе от (4) к системе для u_n, v_n $(v_n = \dot{u}_n)$ мы легко можем выписать преобразование $(u_n, v_n) \to (\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)$, которое будет обратимо в обычном смысле (так же, как (2)). Вводя соответствующую цепочку преобразований в терминах u_n^k и v_n^k, мы однозначно исключаем v_n^k и приходим к следующему чисто разностному уравнению:

$$e^{u_n^{k-1}-u_n^k} - e^{u_n^k - u_n^{k+1}} = e^{u_{n+1}^k - u_n^{k+1}} - e^{u_n^{k-1}-u_{n-1}^k}. \tag{7}$$

Это одно из известных (см., например, [7]) интегрируемых уравнений, аппроксимирующих цепочку Тоды (3).

Мы рассматриваем в этой работе интегрируемые уравнения вида

$$\ddot{u}_n = F(\dot{u}_{n+1}, \dot{u}_n, \dot{u}_{n-1}, u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), \tag{8}$$

подобные релятивистской цепочке Тоды. Список таких уравнений получен в работе [8] при помощи метода высших симметрий (см. также обзор [9]) и состоит из шести уравнений, для каждого из которых мы построим преобразование Шлезингера. Эти преобразования аналогичны (5) и имеют вид

$$\tilde{u}_n = U(\dot{u}_n, u_{n+1}, u_n). \tag{9}$$

Подобные (7) чисто разностные уравнения, связанные с преобразованиями (9), известны (их можно найти, например, в работах [7], [10], [11]) и приводиться не будут.

Преобразования (9) не только задаются явной формулой и обратимы на решениях соответствующего уравнения, хотя и не являются точечными, они обладают еще одним свойством. Преобразование (9) может быть теоретически неточечной инволюцией: $\sigma^2[u_n] = \sigma\big[\sigma[u_n]\big] = u_n$ (мы используем обозначение $\tilde{u}_n = \sigma[u_n]$). Оно может быть неточечным групповым преобразованием: если $\tilde{u}_n = \sigma[\alpha, u_n]$, где α – групповой параметр, то

$$\sigma[0, u_n] = u_n, \qquad \sigma\big[\alpha, \sigma[\beta, u_n]\big] = \sigma[\alpha + \beta, u_n].$$

Мы могли бы привести примеры преобразований каждого типа. В нашем случае преобразования (9) являются такими, что

$$\sigma^2[u_n] = V(\dot{u}_{n+1}, \dot{u}_n, \dot{u}_{n-1}, u_{n+2}, u_{n+1}, u_n, u_{n-1}),$$

и количество переменных $\dot{u}_{n+i}$, u_{n+i} в $\sigma^3[u_n], \sigma^4[u_n], \dots$ возрастает. Это свойство показывает в некотором смысле, что преобразования, приведенные в работе, позволяют строить множество различных решений в отличие от инволюции или группового преобразования.

Все интегрируемые уравнения из списка, полученного в работе [8], являются лагранжевыми [10]. При построении преобразований Шлезингера мы существенно используем стандартный переход от лагранжевой формы записи уравнения к гамильтоновой. Только здесь, в отличие от классического случая, переход задается неточечным, но вместе с тем обратимым преобразованием [9]. Отметим также, что для большинства уравнений из обсуждаемого списка известны стандартные (невырожденные) автопреобразования Беклунда [10].

В заключительном разделе мы приведем два примера другого вида, но с аналогичными свойствами. Они также будут интегрируемыми лагранжевыми уравнениями, допускающими преобразование Шлезингера. Одно из них (уравнение на решетке) тесно связано с разностным нелинейным уравнением Шредингера, а другое (уравнение с частными производными) – с уравнением Ландау–Лифшица.

2. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ШЛЕЗИНГЕРА

Здесь мы объясним, как строить преобразования Шлезингера для релятивистских цепочек Тоды. Сначала обсудим переход от лагранжевой формы записи уравнения к гамильтоновой, т.е. связь между известными интегрируемыми уравнениями вида (8) и также известными[1)] интегрируемыми системами из класса

$$\dot{u}_n = f(u_{n+1}, u_n, v_n), \qquad \dot{v}_n = g(v_{n-1}, v_n, u_n). \tag{10}$$

Оба списка уравнений (8) и систем (10) будут приведены в следующем разделе. Для краткости будем опускать в формулах индекс n; например, релятивистская цепочка Тоды (4) запишется в виде

$$\ddot{u} = \frac{\dot{u}_1 \dot{u}}{1 + e^{u - u_1}} - \frac{\dot{u}\dot{u}_{-1}}{1 + e^{u_{-1} - u}}. \tag{11}$$

Уравнения из (8) являются лагранжевыми, лагранжиан L и уравнение Эйлера–Лагранжа в этом случае имеют вид

$$L = L(\dot{u}, u_1, u), \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{u}^2} \neq 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial}{\partial u}(1 + T^{-1})L \tag{12}$$

(здесь T – оператор сдвига: $n \to n+1$, в частности, $T^{-1}L = L(\dot{u}_{-1}, u, u_{-1})$). Стандартным законам сохранения для таких уравнений соответствуют локальные законы сохранения $\dot{p} = (T-1)q$, а именно

$$\frac{d}{dt}(\dot{u}L_{\dot{u}} - L) = (T^{-1} - 1)(\dot{u}_1 L_{u_1}) \tag{13}$$

(частные производные обозначаются здесь для краткости нижними индексами). Если лагранжиан можно записать в виде $L = L(\dot{u}, u_1 - u)$, то имеется также локальный закон сохранения

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{u}} = (1 - T^{-1})L_u. \tag{14}$$

Релятивистской цепочке Тоды (11) соответствует лагранжиан

$$L = \dot{u} \ln \frac{\dot{u}}{e^{u_1 - u} + 1}. \tag{15}$$

Преобразование Лежандра $H = v\dot{u} - L$, $v = L_{\dot{u}}$ приводит в этом случае к обратимой замене переменных между u, $\dot{u}$ и u, v, которая задается формулой вида $v = \theta(\dot{u}, u_1, u)$. Более точно, если перейти от уравнения (8) к системе для $y = u$ и $z = \dot{u}$, то системы для y, z и u, v будут связаны неточечной, но обратимой заменой переменных, которая

[1)] Список интегрируемых гамильтоновых систем (10) был получен автором при помощи симметрийного теста [12], основная часть списка впервые опубликована в работах [5]. В статье [13] для некоторых систем построены $(L$–$A)$-пары. Полностью список опубликован в работе [9], где, в частности, показано, что все системы обладают высшими симметриями и законами сохранения.

задается формулами $u = y$, $v = \theta(z, y_1, y)$ (точечная замена имела бы вид $u = U(y, z)$, $v = V(y, z)$). Уравнения Гамильтона, соответствующие гамильтониану H, в этом случае таковы:

$$\dot{u} = \frac{\delta H}{\delta v}, \qquad \dot{v} = -\frac{\delta H}{\delta u}, \qquad H = H(v, u_1, u), \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta v} &= \frac{\partial}{\partial v} \sum_i T^i(H) = \frac{\partial H}{\partial v}, \\ \frac{\delta H}{\delta u} &= \frac{\partial}{\partial u} \sum_i T^i(H) = \frac{\partial}{\partial u}(1 + T^{-1})H. \end{aligned} \tag{17}$$

Напомним для сравнения классические формулы в тех же обозначениях:

$$L = L(u, \dot{u}), \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial L}{\partial u}, \qquad H = H(u, v), \qquad \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial v}, \qquad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u},$$

замена определяется следующим образом: $v = \theta(u, \dot{u})$.

Оказывается, известные уравнения из класса (8) таковы, что при помощи дополнительной точечной замены вида $\hat{v} = \hat{\theta}(u, v)$ (u не меняется) систему (16) можно преобразовать к виду (10). В случае релятивистской цепочки Тоды (11) дополнительная замена переменных $\hat{v} = u - v + 1$ приводит к системе уравнений

$$\dot{u} = e^{u_1 - v} + e^{u - v}, \qquad \dot{v} = e^{u - v_{-1}} + e^{u - v}, \tag{18}$$

а прямая связь между (11) и (18) выглядит следующим образом:

$$u = u, \qquad v = \ln \frac{e^{u_1} + e^u}{\dot{u}}. \tag{19}$$

Дополнительная замена не меняет вида гамильтониана из (16), но, вообще говоря, изменяет гамильтонову структуру:

$$\dot{u} = \varphi(u, v)\frac{\delta H}{\delta v}, \qquad \dot{v} = -\varphi(u, v)\frac{\delta H}{\delta u}, \qquad H = \Phi(u, v) + \Psi(u_1, v). \tag{20}$$

Для системы (18) $\varphi = -1$, $H = e^{u_1 - v} + e^{u - v}$. Очевидно, возможен и обратный переход от гамильтоновых систем (20) к лагранжевым уравнениям. Если мы стартуем с системы уравнений вида (10), (20) (причем $f_v \neq 0$), то обратимое преобразование, ведущее к (8), (12), задается первым уравнением системы (ср. (18) и (19)). Формула для построения лагранжиана слегка видоизменяется по сравнению с классической:

$$L = \psi(u, v)\dot{u} - H, \qquad \psi_v = \frac{1}{\varphi}. \tag{21}$$

Произвол в выборе функции ψ не является существенным, так как лагранжево уравнение (12) не меняется при следующем изменении лагранжиана:

$$\hat{L} = \alpha L + \beta + \sigma(u)\dot{u} + (T - 1)\omega(u), \tag{22}$$

где $\alpha \neq 0$ и β – постоянные, а σ и ω – произвольные функции.

Такая связь между интегрируемыми уравнениями (8) и системами (10) обсуждалась в работе [9]. Два списка были получены независимо (системы вида (10) – раньше, ср., например, [5] и [8]), и лишь впоследствии была обнаружена их полная эквивалентность с точностью до неточечных обратимых преобразований, аналогичных (19).

Обсудим доказательство утверждения, что указанная замена и формула (21) переводят систему (10), (20) (такую, что $f_v \neq 0$) в уравнение (8), (12). Именно это утверждение мы будем использовать в дальнейшем. Вводя в рассмотрение зависимые переменные y_i, z_i так, что $y = u$ и $z = \dot u$, мы имеем в силу (10) обратимое преобразование

$$y = u, \qquad z = f(u_1, u, v), \tag{23}$$

связывающее наборы переменных y_i, z_i и u_i, v_i, и соотношения для частных производных

$$\frac{\partial}{\partial v} = f_v \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial y} + f_u \frac{\partial}{\partial z} + T^{-1}(f_{u_1}) \frac{\partial}{\partial z_{-1}}. \tag{24}$$

Формулы (21), а точнее

$$L(z, y_1, y) = \psi(u, v) f(u_1, u, v) - H(v, u_1, u),$$

и (24) позволяют вычислить

$$L_z = \psi, \qquad L_y = \psi_u f - H_u, \qquad L_{y_1} = -H_{u_1}$$

(мы также используем гамильтонову структуру (20)). Теперь нетрудно проверить, что (12) является следствием (10), (20):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d\psi}{dt} = \psi_u f + \psi_v g = \psi_u f - \big(H_u + T^{-1}(H_{u_1})\big) = L_y + T^{-1}(L_{y_1}).$$

Коэффициент в уравнении Эйлера–Лагранжа при $\dot z = \ddot u$ отличен от нуля, $L_{zz} = (\varphi f_v)^{-1}$, и поэтому это уравнение можно записать также в виде (8).

Теперь мы можем объяснить, откуда берется автопреобразование Шлезингера (5). Релятивистская цепочка Тоды (4) допускает инволюцию

$$\mathrm{Inv}_u: \quad \tilde u_n = -u_{-n}, \qquad \tilde t = -t, \tag{25}$$

а ее гамильтонова форма записи (18) инвариантна относительно инволюции

$$\mathrm{Inv}_{u,v}: \quad \hat u_n = -v_{-n}, \qquad \hat v_n = -u_{-n}, \qquad \hat t = -t. \tag{26}$$

Вводя обозначение $\mathrm{Lg}\colon (u_n, \dot u_n) \to (u_n, v_n)$ для отображения (19), порожденного преобразованием Лежандра, мы можем рассмотреть композицию

$$\mathrm{AT} = \mathrm{Inv}_u \circ \mathrm{Lg}^{-1} \circ \mathrm{Inv}_{u,v} \circ \mathrm{Lg}\colon \quad \tilde u_n = v_n = \ln \frac{e^{u_{n+1}} + e^{u_n}}{\dot u_n}, \qquad \tilde t = t. \tag{27}$$

Таким образом, если u_n – решение релятивистской цепочки Тоды (4), то функция v_n, полученная из (18), также будет решением (4). Формула (5) с v_n вместо $\tilde{u}_n$ (она же – вторая из формул (19)) есть не что иное, как другая форма записи первого из уравнений системы (18). Естественно, что обратное преобразование (6) оказывается переписанным вторым уравнением той же системы.

В общем случае формулы (10), (20) указывают на равноправие u и v: функция v также должна удовлетворять уравнению вида (8), (12) (и это нетрудно доказать). В случае системы (18) уравнения для u и v оказались одинаковыми. Это достигается за счет перехода к особой форме записи каждой интегрируемой системы (10), (20), которую мы и обеспечим в следующем разделе. Система (18), например, приводится в работах [5] и [9] в полиномиальном виде:

$$\dot{u} = uv(u_1 + u), \qquad \dot{v} = -uv(v + v_{-1}),$$

мы же слегка изменили ее при помощи точечного преобразования $\tilde{u} = \ln u$, $\tilde{v} = -\ln v$.

Все интегрируемые системы (10), (20) будут записаны в следующем разделе в форме, допускающей инволюцию, аналогичную (26). При этом соответствующее лагранжево уравнение также будет инвариантно относительно некой инволюции, и вместе две инволюции будут гарантировать, что u и v удовлетворяют одному лагранжеву уравнению. В результате преобразование Шлезингера можно будет получать, выражая $\tilde{u} = v$ через u_1, u, $\dot{u}$ при помощи первого из уравнений (10).

В заключение теоретического раздела отметим, что для лагранжевых уравнений (12) имеется, как обычно, тесная связь между законами сохранения и высшими симметриями. По высшей симметрии нетрудно построить закон сохранения, как указано в работе [10]. С другой стороны, используя замену вида (23) между уравнением (12) и его гамильтоновой формой записи (20), можно получить весьма простую формулу для построения высшей симметрии по закону сохранения.

Действительно, если $\dot{p} = (T-1)q$ – локальный закон сохранения системы (20) (функция q и плотность закона сохранения p зависят от u_i, v_i), то система

$$u_\tau = \varphi \frac{\delta p}{\delta v}, \qquad v_\tau = -\varphi \frac{\delta p}{\delta u}$$

– это симметрия, т.е. система, совместная с (20). Все формулы нетрудно переписать в терминах u_i, $\dot{u}_i$. Отсюда следует, что если функция

$$p = p(\dot{u}_{i_1}, \dot{u}_{i_1 - 1}, \ldots, \dot{u}_{i_2}, u_{j_1}, u_{j_1 - 1}, \ldots, u_{j_2})$$

является плотностью закона сохранения лагранжева уравнения (12), то уравнение

$$u_\tau = \frac{1}{L_{\dot{u}\dot{u}}} \frac{\delta p}{\delta \dot{u}}, \qquad \frac{\delta p}{\delta \dot{u}} = \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \sum_{k=-i_1}^{-i_2} T^k(p) \tag{28}$$

является его симметрией.

Например, функции

$$p^{(1)} = \dot u_1 \dot u S(u_1 - u) + \frac{1}{2}\dot u^2, \qquad p^{(2)} = \frac{1}{\dot u}(1 + e^{u_1 - u})(1 + e^{u - u_{-1}}),$$

где $S(z) = 1/(1 + e^{-z})$, – плотности законов сохранения релятивистской цепочки Тоды (11), и формула (28) дает для нее такие симметрии:

$$u_{\tau_1} = \dot u_1 \dot u S(u_1 - u) + \dot u \dot u_{-1} S(u - u_{-1}) + \dot u^2, \qquad u_{\tau_2} = -p^{(2)},$$

поскольку $L_{\dot u \dot u} = 1/\dot u$ (см. (15)).

Легко видеть, что в случае стандартных законов сохранения (13) и (14) формулы (28) приводят к тривиальным точечным симметриям Ли, которые имеют вид $u_\tau = \dot u$ и $u_\tau = 1$, соответственно.

3. СПИСОК ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ШЛЕЗИНГЕРА

Как уже говорилось, списки интегрируемых гамильтоновых систем вида (10) и лагранжевых уравнений вида (8) состоят из шести объектов. Сначала мы рассмотрим пять случаев с похожей структурой.

Во всех пяти случаях системы (10), (20) могут быть записаны в виде

$$\dot u = r(u_1 - u, u - v), \qquad \dot v = r(v - v_{-1}, u - v) \tag{29}$$

(т.е. система задается одной функцией двух переменных $r(x, y)$), что обеспечивает инвариантность относительно инволюции (26). Системе (18), например, соответствует функция $r(x, y) = (e^x + 1)e^y$. Переход к лагранжевым уравнениям задается, как описано в предыдущем разделе, а именно связь между v и $\dot u$ определяется первым уравнением системы, а лагранжиан строится по формуле (21). Во всех случаях нетрудно проверить, что лагранжиан (21) может быть записан в следующем виде (иногда для упрощения используется формула (22)):

$$L = R(\dot u) - \dot u A(w_1) - B(w_1), \qquad w = u - u_{-1}, \tag{30}$$

где $R'' \neq 0$. Такому лагранжиану соответствует уравнение

$$\ddot u = Q(\dot u)\big(\dot u_1 a(w_1) - \dot u_{-1} a(w) + b(w_1) - b(w)\big), \tag{31}$$

$$Q(z) = \frac{1}{R''(z)}, \qquad a(z) = A'(z), \qquad b(z) = B'(z), \tag{32}$$

которое, очевидно, инвариантно относительно инволюции (25). Поэтому, как и в случае релятивистской цепочки Тоды (11), формула для $\tilde u = v$, полученная из первого уравнения системы (29), будет задавать автопреобразование Шлезингера для уравнения (31). Обратное преобразование находится из второго уравнения системы (29).

Далее будут выписаны основные формулы для каждого из пяти случаев. Мы укажем функцию $r = r(x, y)$, определяющую систему уравнений (29), и функции φ и H, которые задают гамильтонову структуру (20). Затем будут приведены функции $Q(z)$, $a(z)$ и $b(z)$, определяющие лагранжево уравнение (31). Лагранжиан выписываться не будет, так как легко восстанавливается при помощи формул (30), (32). И, наконец, мы приведем преобразование Шлезингера для уравнения (31) (формулу для нового решения $\tilde{u} = v$). В некоторых случаях имеется зависимость от произвольных постоянных μ и ν. Релятивистская цепочка Тоды (11) относится к случаю III с $\mu = 1,\ \nu = 0$.

Список уравнений и преобразований
(пять случаев из шести)

I. $$r = e^x + e^y, \qquad \varphi = -e^{v-u}, \qquad H = e^{u_1-v} + \frac{1}{2}e^{2(u-v)},$$
$$Q = 1, \qquad a = e^z, \qquad b = -e^{2z},$$
$$\tilde{u} = u - \ln(\dot{u} - e^{u_1-u}).$$

II. $$r = xy, \qquad \varphi = v - u, \qquad H = v(u - u_1),$$
$$Q = z, \qquad a = \frac{1}{z}, \qquad b = z,$$
$$\tilde{u} = u + \frac{\dot{u}}{u - u_1}.$$

III. $$r = (e^x + \mu)(e^y + \nu), \qquad \varphi = -(1 + \nu e^{v-u}), \qquad H = e^{u_1-v} + \mu e^{u-v},$$
$$Q = z, \qquad a = \frac{1}{1 + \mu e^{-z}}, \qquad b = -\nu e^z,$$
$$\tilde{u} = u - \ln\left(\frac{\dot{u}}{e^{u_1-u} + \mu} - \nu\right).$$

IV. $$r = \frac{x}{x + y}, \qquad \varphi = v - u, \qquad H = \ln\frac{u - v}{u_1 - v},$$
$$Q = z(1 - z), \qquad a = \frac{1}{z}, \qquad b = 0,$$
$$\tilde{u} = \frac{u + u_1(\dot{u} - 1)}{\dot{u}}.$$

V. $$r = \frac{e^x + \mu}{e^{x+y} + 1}, \qquad \varphi = \mu - e^{v-u}, \qquad H = \ln\frac{e^{u_1-v} + 1}{1 - \mu e^{u-v}},$$
$$Q = z(z - \mu), \qquad a = \frac{1}{e^z + \mu}, \qquad b = 0,$$
$$\tilde{u} = u_1 - \ln\left(\frac{e^{u_1-u} + \mu}{\dot{u}} - 1\right).$$

Отдельно и более подробно мы расмотрим последний, шестой случай, который существенно отличается от остальных. Система (10) имеет вид:

$$\dot u = \frac{2r}{u_1 - v} + r_v, \qquad \dot v = \frac{2r}{u - v_{-1}} - r_u, \qquad r = r(u,v) = r(v,u), \qquad r_{uuu} = 0, \tag{33}$$

т.е. r – симметричный полином с шестью произвольными постоянными коэффициентами, а именно

$$r(u,v) = \alpha u^2 v^2 + \beta uv(u+v) + \gamma(u^2+v^2) + \delta uv + \varepsilon(u+v) + \mu. \tag{34}$$

Система (33) тесно связана с уравнением Ландау–Лифшица (задает для него автопреобразование Беклунда, см. [5] и [13]). Гамильтонова структура (20) определяется функциями

$$\varphi = r, \qquad H = \ln \frac{r}{(u_1 - v)^2}. \tag{35}$$

Инволюция, допускаемая системой уравнений, на этот раз имеет вид

$$\hat u_n = v_{-n}, \qquad \hat v_n = u_{-n}, \qquad \hat t = -t. \tag{36}$$

Имеющиеся здесь технические трудности связаны с тем, чтобы получить из (33) явную формулу для v и записать лагранжиан (21) в терминах $\dot u$, u_1, u, получив не слишком громоздкое выражение. Наряду с обозначением $r = r(u,v)$ введем обозначение $s = r(u,u_1)$ для того же полинома (34), но от других переменных. Для любого полинома (34) имеют место тождества

$$\frac{2r}{u_1 - v} + r_v = \frac{2s}{u_1 - v} - s_{u_1}, \qquad r_v = s_{u_1} + (v - u_1) s_{u_1 u_1}, \tag{37}$$

и можно, в частности, переписать первое из уравнений (33) в терминах s:

$$\dot u = \frac{2s}{u_1 - v} - s_{u_1}. \tag{38}$$

Теперь, используя (37), (38) и первое из уравнений (33), мы легко можем выразить через $\dot u, u_1, u$ в явном виде функции v, r_v и r, а значит, и гамильтониан H из (35). После этого, чтобы получить формулы для лагранжиана L из (21), нам остается записать в новых переменных функцию ψ.

Явную формулу для ψ вывести не удается, но достаточно, переписывая определяющее уравнение $\psi_v = 1/\varphi = 1/r$, получить в новых переменных соотношения для частных производных функции ψ. Используя формулы (24) (напомним, что здесь $f(u_1,u,v)$ – правая часть первого уравнения исходной гамильтоновой системы (33)), мы получаем для функции $\hat\psi(u_1,u,\dot u) = \psi(u,v)$ соотношения

$$\psi_v = f_v \hat\psi_{\dot u} = \frac{1}{r}, \qquad \psi_{u_1} = \hat\psi_{u_1} + f_{u_1}\hat\psi_{\dot u} = 0. \tag{39}$$

С другой стороны, из двух разных представлений для функции f (см. (33), (38)) следует, что

$$f_{u_1} = -\frac{2r}{(u_1 - v)^2}, \qquad f_v = \frac{2s}{(u_1 - v)^2}. \tag{40}$$

Соотношения (39), (40) в совокупности позволяют выразить через u_1, u, $\dot{u}$ частные производные $\hat{\psi}_{u_1}$, $\hat{\psi}_{\dot{u}}$. Формула для $\hat{\psi}_u$ не нужна. Мы находим, в частности, что $\hat{\psi}_{u_1\dot{u}} = \hat{\psi}_{\dot{u}u_1} = 0$, и имеем представление $\hat{\psi} = A(u_1, u) + B(u, \dot{u})$, причем для A и B нам известны производные A_{u_1} и $B_{\dot{u}}$.

Указанная схема объясняет, как выписать следующие определяющие уравнения для лагранжиана L:

$$L = \ln \frac{s}{\dot{u}^2 - R(u)} + \dot{u}\big(A(u_1, u) + B(u, \dot{u})\big), \tag{41}$$

$$s = r(u, u_1), \qquad R(u) = s_{u_1}^2 - 2ss_{u_1u_1}, \tag{42}$$

$$A_{u_1} = \frac{1}{s}, \qquad B_{\dot{u}} = \frac{2}{\dot{u}^2 - R(u)}. \tag{43}$$

Напомним, что r – полином (34), задающий гамильтонову систему (33). Если рассматривать s из (42) как квадратный полином от u_1, то R – обычный дискриминант этого полинома, поэтому зависит только от u и является полиномом не выше четвертой степени. Функции A, B определены уравнениями (43) не однозначно, но это не влияет на соответствующее лагранжево уравнение в силу (22).

Уравнение, соответствующее лагранжиану (41)–(43), имеет вид

$$2\ddot{u} = \big(\dot{u}^2 - R(u)\big)\left(\frac{s_u - \dot{u}_1}{s} + \frac{\check{s}_u + \dot{u}_{-1}}{\check{s}}\right) + R'(u), \tag{44}$$

$$\check{s} = T^{-1}s = r(u_{-1}, u). \tag{45}$$

Оно инвариантно относительно инволюции $\tilde{u}_n = u_{-n}$, $\tilde{t} = -t$, которая вместе с инволюцией (36) объясняет, почему функция $\tilde{u} = v$, найденная из (33), будет новым решением уравнения (44), (45). Для определения v удобнее использовать соотношение (38), которое дает нам следующую формулу для автопреобразования уравнения (44), (45):

$$\tilde{u} = u_1 - \frac{2s}{\dot{u} + s_{u_1}}. \tag{46}$$

4. АНАЛОГИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

Покажем, что бывают уравнения из других классов, обладающие аналогичными свойствами, а именно интегрируемые лагранжевы уравнения, которые допускают автопреобразование Шлезингера. Мы приведем два примера; один – дифференциально-разностное уравнение, другой – уравнение в частных производных. Уравнение на решетке тесно связано с разностным нелинейным уравнением Шредингера (оно же уравнение

Абловица–Ладика), другой пример получен из стереографической проекции уравнения Ландау–Лифшица. Мы также вкратце обсудим преобразования Шлезингера для соответствующих гамильтоновых систем.

Схема построения здесь такая же, как в предыдущих разделах. Мы начинаем с известной гамильтоновой системы уравнений и получаем эквивалентное ей, но новое по форме уравнение. В дифференциально-разностном случае мы используем систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{u} &= (uv+\nu)(u_1+\alpha u_{-1})-\eta u,\\ \dot{v} &= -(uv+\nu)(v_{-1}+\alpha v_1)+\eta v,\end{aligned} \tag{47}$$

которая интегрируема при любых значениях постоянных коэффициентов ν, α, η (см., например, [9]). Гамильтонова структура (такая же, как в (20)) задается функциями

$$\varphi = uv+\nu, \qquad H = v(u_1+\alpha u_{-1})-\eta\ln\varphi,$$

т.е. гамильтониан имеет отличный от (20) вид.

Отметим, что система (47) обобщает одну из систем предыдущего раздела, поскольку при $\alpha=\eta=0$ после точечной замены

$$\tilde{u}=\ln u, \qquad \tilde{v}=-\ln v \tag{48}$$

мы имеем случай III с $\mu=0$. Кроме того, система (47) допускает две интегрируемые редукции. В случае $\alpha=\nu=1$, $\eta=2$ комплексная редукция $\psi=u=\bar{v}$, $\theta=it$ приводит к известному разностному нелинейному уравнению Шредингера (или уравнению Абловица–Ладика [14])

$$i\psi_\theta = \psi_1-2\psi+\psi_{-1}+|\psi|^2(\psi_1+\psi_{-1}).$$

Еще одна редукция $v=u$ дает при $\alpha=-1$, $\eta=0$ модифицированное уравнение Вольтерра

$$\dot{u}=(u^2+\nu)(u_1-u_{-1}).$$

Та же замена переменных (48) преобразует систему (47) так, что она становится инвариантной относительно инволюции (26):

$$\begin{aligned}\dot{u} &= (e^{u-v}+\nu)(e^{u_1-u}+\alpha e^{u_{-1}-u})-\eta,\\ \dot{v} &= (e^{u-v}+\nu)(e^{v-v_{-1}}+\alpha e^{v-v_1})-\eta.\end{aligned} \tag{49}$$

Система (49) полностью аналогична системам из предыдущего раздела. Первое уравнение задает обратимую связь между $\dot{u}$ и v, стандартный переход к лагранжевой форме записи дает следующие результаты.

Если, как в (30), ввести обозначение $w = u - u_{-1}$, то новое уравнение можно записать в виде

$$\ddot{u} = (T-1)\big((\dot{u}+\eta)(\dot{u}_{-1}+\eta)V\big) + \nu(\dot{u}+\eta)(1-T)(e^{w} - \alpha e^{-w}),$$
$$V = \frac{e^{w_1+w_{-1}} - \alpha^2 e^{-2w}}{(e^{w_1}+\alpha e^{-w})(e^{w_{-1}}+\alpha e^{-w})}. \tag{50}$$

Лагранжиан определяется следующим образом:

$$L = (\dot{u}+\eta)\ln\frac{\dot{u}+\eta}{U} + \nu U, \qquad U = e^{w_1} + \alpha e^{-w}.$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа в этом случае отличается от уравнения из (12) только тем, что в правой части стоит выражение $\delta L/\delta u = \partial(T+1+T^{-1})L/\partial u$. Заметим, что полученное уравнение (50) имеет вид

$$\ddot{u} = F(\dot{u}_1, \dot{u}, \dot{u}_{-1}, u_2, u_1, u, u_{-1}, u_{-2}) \tag{51}$$

(ср. (8)), а интегрируемых уравнений такого вида, по-видимому, известно не было.

Высшие законы сохранения и симметрии для уравнения (50) можно получать из известных [9] законов сохранения и симметрий соответствующей системы (47). В качестве примера выпишем формулы для плотности простейшего локального закона сохранения

$$p = \left(\frac{\dot{u}+\eta}{U} - \nu\right)(c_1 e^{w_1} + c_2 e^{-w}) + c_3 \ln\frac{\dot{u}+\eta}{U}$$

и для простейшей высшей симметрии

$$u_\tau = \frac{\dot{u}+\eta}{U}(c_1 e^{w_1} + c_2 e^{-w})$$

(здесь c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные). Наконец, нетрудно проверить, что уравнение (50) инвариантно относительно инволюции (25). Это означает, как и прежде, что функция $\tilde{u} = v$, найденная из системы (49), удовлетворяет уравнению (50) наряду с u. Таким образом, автопреобразование Шлезингера для нового уравнения (50) имеет вид

$$\tilde{u} = u - \ln\left(\frac{\dot{u}+\eta}{U} - \nu\right). \tag{52}$$

Во втором примере мы опираемся на известную интегрируемую систему уравнений, которая выглядит так:

$$\dot{u} = u_{xx} + \frac{2}{v-u}\big(u_x^2 + R(u)\big) + \frac{1}{2}R'(u),$$
$$\dot{v} = -v_{xx} + \frac{2}{v-u}\big(v_x^2 + R(v)\big) - \frac{1}{2}R'(v). \tag{53}$$

Здесь $d^5R(z)/dz^5 = 0$, т.е. в системе имеется пять произвольных постоянных коэффициентов. В таком виде записывается стереографическая проекция уравнения Ландау–Лифшица на сфере (см., например, [5], [13]).

Гамильтонова структура внешне имеет прежний вид

$$\dot{u} = \varphi(u,v)\frac{\delta H}{\delta v}, \qquad \dot{v} = -\varphi(u,v)\frac{\delta H}{\delta u},$$

только формальная вариационная производная задается как

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D_x\frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \cdots,$$

где D_x – полная производная по x (определение для $\delta/\delta v$ аналогично). Коэффициент φ и гамильтониан H для системы (53) будут выписаны в терминах функций ψ, S и Q. Пусть

$$\psi = \frac{1}{v-u}, \qquad S = u_x^2 + R(u), \qquad Q = u_{xx} + \frac{1}{2}R'(u), \tag{54}$$

тогда

$$\varphi = -\frac{1}{\psi^2}, \qquad H = S\psi^2 + Q\psi + \frac{1}{12}R''(u).$$

Переход к лагранжеву уравнению снова задается обратимой заменой переменных, которая находится из первого уравнения системы (53). Само уравнение громоздко, и мы приведем только интегрируемый лагранжиан

$$L = \frac{1}{S}(\dot{u} - Q)^2 - \frac{1}{3}R''(u). \tag{55}$$

Явный вид уравнения может быть получен при помощи стандартной формулы

$$D_t L_{\dot{u}} = \frac{\delta L}{\delta u} = L_u - D_x L_{u_x} + D_x^2 L_{u_{xx}}. \tag{56}$$

Инволюции в этом случае таковы: $u \leftrightarrow v,\ t \to -t$ для системы (53) и $t \to -t$ для уравнения (55), (56). Поэтому формула для $\tilde{u} = v$, найденная из (53), снова дает автопреобразование для лагранжева уравнения (55), (56):

$$\tilde{u} = u + \frac{2S}{\dot{u} - Q}. \tag{57}$$

Приведем две плотности $p^{(i)}$ локальных законов сохранения $p_t^{(i)} = q_x^{(i)}$ полученного уравнения (первая из них – стандартная):

$$p^{(1)} = \dot{u}L_{\dot{u}} - L = \frac{1}{S}(\dot{u}^2 - Q^2) + \frac{1}{3}R''(u), \qquad p^{(2)} = \frac{1}{S}u_x\dot{u}.$$

Уравнение (55), (56) относится к классу уравнений вида

$$\ddot{u} = F(\dot{u}, \dot{u}_x, \dot{u}_{xx}, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}) \tag{58}$$

(так же, как известное уравнение Буссинеска) и, по-видимому, является новым по форме. В частном случае $R = 0$, сответствующем модели Гейзенберга, формулы сильно упрощаются, и легко выписать явный вид уравнения:

$$D_t\left(\frac{\dot{u}}{u_x}\right) = D_x\left(\frac{u_{xxx}}{u_x} + \frac{3}{2}\frac{\dot{u}^2 - u_{xx}^2}{u_x^2}\right),$$
$$L = \frac{(\dot{u} - u_{xx})^2}{u_x^2}, \qquad \tilde{u} = u + \frac{2u_x^2}{\dot{u} - u_{xx}}.$$

Указанные в статье лагранжевы уравнения и соответствующие гамильтоновы системы связаны обратимыми заменами переменных, поэтому все автопреобразования легко переносятся на гамильтоновы системы уравнений. Например, используя преобразование AT: $(u, \dot{u}) \to (\tilde{u}, \tilde{u}_t)$ (27) ($\tilde{u}_t$ также можно выразить через u_i и $\dot{u}_i$, дифференцируя формулу из (27) по t и используя релятивистскую цепочку Тоды (11)), мы переходим к композиции $\mathrm{Lg} \circ \mathrm{AT} \circ \mathrm{Lg}^{-1}: (u, v) \to (\tilde{u}, \tilde{v})$ (отображение Lg задается формулами (19)) и получаем автопреобразование для гамильтоновой системы уравнений (18):

$$\tilde{u} = v, \qquad \tilde{v} = \ln\frac{e^{v_1} + e^{v}}{e^{-v} + e^{-v_{-1}}} - u.$$

Аналогичным образом преобразование Шлезингера (52) переносится с уравнения (50) на соответствующую систему (49), а значит и на исходную гамильтонову систему (47):

$$\tilde{u} = \frac{1}{v}, \qquad \tilde{v} = (uv + \nu)\frac{v_1 v_{-1}}{v} - \nu v. \tag{59}$$

Это преобразование зависит только от ν, но годится для любых значений коэффициентов ν, α, η в системе (47). Автопреобразование для системы уравнений (53) хорошо известно (см., например, [5], [6]) и аналогично преобразованию (2) для системы (1).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом работы являются автопреобразования Шлезингера, которые имеют вид (9) и выписаны для всех интегрируемых лагранжевых уравнений (8) из списка, полученного в работе [8]. Список состоит из шести уравнений, пять из которых имеют одинаковую структуру (31). Явный вид этих уравнений и соответствующие автопреобразования приводятся отдельным списком в разделе 3. Шестое уравнение вместе с преобразованием задаются формулами (44) и (46) (см. также (34), (42), (45)).

При построении преобразований Шлезингера мы существенно используем тот факт (отмеченный в работе [9]), что стандартная связь Лежандра между лагранжевой (12) и гамильтоновой (20) формами записи одного и того же уравнения описывается в данном случае обратимой “треугольной” заменой переменных вида (23), что объясняется спецификой лагранжианов и гамильтонианов. В результате мы получаем преобразование Шлезингера (9), просто переписывая одно из уравнений соответствующей гамильтоновой системы (20), (10) в виде формулы для определения $\tilde{u}_n = v_n$.

Кроме того, продемонстрировано, что, действуя по описанной в работе схеме, можно строить интегрируемые лагранжевы уравнения вместе с допускаемыми ими автопреобразованиями в других классах уравнений. В качестве примера мы получили уравнение (50) с преобразованием (52), которое принадлежит к классу (51) и связано с системой Абловица–Ладика (47). Другой пример (54), (55), (56) получен из уравнения Ландау–Лифшица, точнее из его стереографической проекции (53). Он относится к уравнениям вида (58), а его автопреобразование Шлезингера задается формулой (57). Аналогичным образом можно строить и другие уравнения из классов (51) и (58), и мы планируем сделать это в следующей работе.

Наконец, поскольку приведенные в работе лагранжевы уравнения и гамильтоновы системы связаны обратимыми заменами переменных, можно перенести имеющиеся автопреобразования на все гамильтоновы системы уравнений. В качестве примера мы представили такое автопреобразование (59) для системы Абловица–Ладика (47).

Благодарности. Работа поддержана грантом РФФИ № 02-01-00144.

Список литературы

[1] *M. Jimbo, T. Miwa.* Physica D. 1981. V. 2. P. 407–448; 1981/1982. V. 4. P. 26–46.
[2] *H. Flashka.* Quart. J. Math. Oxford. 1983. V. 34. P. 61–65.
[3] *А. Ньюэлл.* Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
[4] *D. Levi.* J. Phys. A. 1981. V. 14. P. 1083–1098.
[5] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. С. 183–208.
[6] *A. N. Leznov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov.* Phys. Lett. A. 1993. V. 174. P. 397–402.
[7] *V. E. Adler.* J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V. 7. P. 34–56.
[8] *В. Э. Адлер, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1997. Т. 111. С. 323–334.
[9] *В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* ТМФ. 2000. Т. 125. С. 355–424.
[10] *В. Э. Адлер, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1997. Т. 112. С. 179–194.
[11] *В. Э. Адлер.* ТМФ. 2000. Т. 124. С. 48–61.
[12] *Р. И. Ямилов.* Симметрийный подход к классификации с точки зрения интегрируемых дифференциально-разностных уравнений. Теория преобразований. Дисс. докт. физ.-матем. наук. Уфа: Институт математики Уфимского центра РАН, 2000.
[13] *V. E. Adler, R. I. Yamilov.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 477–492.
[14] *M. J. Ablowitz, J. F. Ladik.* J. Math. Phys. 1976. V. 17. № 6. P. 1011–1018.

Поступила в редакцию 7.V.2003 г.