

На правах рукописи

ЮЛМУХАМЕТОВА Юлия Валерьевна

ПОДМОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

Специальность:

01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа 2011

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО " Уфимский государственный
авиационный технический университет"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Хабилов Салават Валеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Андреев Виктор Константинович;
доктор физико-математических наук,
Сулейманов Булат Ирекович

Ведущая организация: Институт Гидродинамики
им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Защита состоится 23 декабря 2011 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 при Учреждении российской академии наук Институте математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН по адресу: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения российской академии наук Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН.

Автореферат разослан " ____ " _____ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.057.01,
кандидат физико-математических наук

С.В. Попенов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие явления окружающего нас мира можно описать математической моделью, состоящей из набора дифференциальных уравнений. Математическая модель движения сжимаемой жидкости – уравнения газовой динамики. Настоящая диссертационная работа посвящена нахождению решений уравнений газовой динамики в виде линейного поля скоростей. Объектами исследования газовой динамики являются газ, при обычных условиях, жидкие тела и твердые тела, находящиеся под воздействием больших температур и давлений. Поэтому решение в виде линейного поля скоростей является фундаментальным решением для любых уравнений механики сплошной среды: при этом постоянная вязкость и постоянная теплопроводность не влияют на такие движения.

Движения сплошной среды с линейным полем скоростей изучали G.L. Dirichlet и Б. Риман. Они рассматривали движения несжимаемой жидкости, движущейся в силовом поле. Л.В. Овсянниковым впервые было показано, что для политропного газа система уравнений газодинамики сводится к системе девяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (модель Овсянникова). Найдено несколько интегралов такой системы. Развитие математической теории этих уравнений получил J.F. Dyson при изучении динамики вращающегося газового облака. Им были найдены другие интегралы системы и выяснено за какие физические законы сохранения они отвечают. О.И. Богоявленским, И.В. Немчиновым были изучены поведение и общие свойства газовых эллипсоидов с линейным полем скоростей. С.И. Анисимовым, Ю.И. Лысиковым, Н.А. Иногамовым найдены некоторые частные решения модели Овсянникова. О.В. Лаврентьевой, В.В. Пухначевым была рассмотрена математическая модель движения несжимаемого жидкого эллипсоида, в котором скорости частиц жидкости являются линейными функциями координат.

В настоящей работе, в отличие от перечисленных, разыскивались решения уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей в *эйлеровых* переменных с *произвольным* уравнением состояния. Уравнения состояния, выражения для функций плотности и давления, обыкновенные дифференциальные уравнения для функций, зависящих только от времени, назовем *подмоделью с линейным полем скоростей*. Как будет показано, задачи о нахождении решения в эйлеровом и лагранжевом представлениях эквивалентны, но при решении задачи в эйлеровых переменных намечается *полная классификация* подмоделей по рангу не постоянной вспомогательной матрицы и по видам уравнений состояния.

Целью работы является классификация и нахождение всех уравнений состояния, для которых уравнения газовой динамики имеют решение в виде ли-

нейного поля скоростей. При этом требуется определить выражения для функций плотности и давления, вывести обыкновенные дифференциальные уравнения для функций, зависящих только от времени, то есть построить подмодель. Найти интегралы, полученных подмоделей. Графически представить и физически интерпретировать новые виды движений, полученные как частное аналитическое решение полученных подмоделей.

Методы исследования. Для реализации поставленной задачи использованы методы группового анализа, теории дифференциальных уравнений, теории матриц, обобщенный метод разделения переменных. Для визуализации полученных результатов, использовались пакеты прикладных программ.

Научная новизна.

1. Развита метод разделения переменных, с помощью которого проведена полная классификация подмоделей движения газа с линейным полем скоростей.

2. Найдены все уравнения состояния, для которых уравнения газовой динамики имеют решения в виде линейного поля скоростей.

3. Рассмотрены примеры движения газа с линейным полем скоростей: разлет частиц газа из точечного источника, схлопывание шара в иголку или диск, выпрямляющийся разлет газа из вихря.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Найдены все подмодели движения газа с линейным полем скоростей, на которые не оказывают влияния вязкость и теплопроводность. Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего исследования. Например, нахождение новых точных решений перечисленных подмоделей и их физическое толкование. Развитие метода разделения переменных позволит, в дальнейшем, решать сложные переопределенные функционально-дифференциальные уравнения. Полученные точные решения можно использовать в тестовых задачах для численных методов, а также для конструирования новых численных методов. Они так же могут быть положены в основу конструирования аппаратов с заданными характеристиками движения газа.

В работе проведена визуализация следующих процессов: вытягивание выделенного сферического объема в иглу или диск; выпрямляющийся разлет частиц газа из вихря; радиальный разлет частиц газа из точечного источника с вакуумной границей и радиальный разлет частиц газа с дальнейшей фокусировкой в точке.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- 37, 38, 39, 40-ая региональные молодежные конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2006-2009 гг.);
- IV, V Всероссийские конференции "Актуальные проблемы прикладной ма-

тематики и механики”, посвященные памяти академика А.Ф.Сидорова (Абрау - Дюрсо, 2008, 2010 гг.);

- Международная конференция "MOGRAN-13. Симметрии и точные решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений" (Уфа, 2009 г.);
- Международные конференции "Нелинейные уравнения и комплексный анализ"(Банное, 2009, 2010 гг.);
- Всероссийская конференция "Нелинейные волны: теория и новые приложения"(Новосибирск, 2011 г.);
- Семинар по дифференциальным уравнениям БашГУ, 2011 г.;
- Семинар Института механики УНЦ РАН, 2011 г.
- VI Уфимская международная конференция "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения, посвященная 70-летию чл.-корр. РАН В.В. Напалкова"(Уфа, 2011 г.);
- Семинар по дифференциальным уравнениям математической физики Учреждения РАН Института математики с ВЦ УНЦ РАН, 2011 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 статей [1]-[8], (в том числе, 2 – в журналах из списка ВАК [7], [8]).

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 118 страниц, в том числе 9 рисунков и 1 таблица. Список литературы состоит из 50 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулирована цель, проведен обзор литературы, связанный с тематикой исследования, приведено краткое содержание глав диссертации.

В **первой главе** показано, что многие инвариантные решения ранга ноль уравнений газовой динамик (УГД) являются решениями с линейным полем скоростей. При изучении совместности УГД для решений с линейным полем скоростей получена переопределенная система функционально-дифференциальных уравнений. Из этих уравнений выведено соотношение, позволяющее классифицировать подмодели. Доказана эквивалентность постановок задачи в эйлеровом и лагранжевом представлениях. Найдена ПОДМОДЕЛЬ 1, описывающая движение газа с линейным полем скоростей в случае, когда плотность зависит только от времени.

В **п. 1.1** рассмотрены уравнения газовой динамики:

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad Dp + \rho a^2(\rho, p) \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{УГД})$$

с произвольным уравнением состояния $p = f(\rho, \mathcal{S})$, где \vec{u} – вектор скорости частицы, ρ – плотность, p – давление, \mathcal{S} – энтропия, $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ – оператор полного дифференцирования по времени t , $a^2(\rho, p) = f_\rho$ – квадрат скорости звука.

УГД допускают 11-ти параметрическую алгебру Ли с произвольным уравнением состояния. Для четырехмерных подалгебр из оптимальной системы (Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: ИКИ. 2003. 336 с.) выбраны 14 подалгебр, для которых инвариантные решения имеют представление с линейным полем скоростей. Эти инвариантные решения имеют ранг 0 и поле скоростей таково:

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad (\text{ЛПС})$$

где A – матрица, удовлетворяющая уравнению $A' + A^2 = 0$.

В **п. 1.2** приведена общая постановка задачи. После подстановки представления решения (ЛПС) в УГД, находим все производные от функции давления. Уравнения совместности имеют вид:

$$\nabla \rho \otimes (B\vec{x} + \vec{v}) + \rho B^T = \rho B + (B\vec{x} + \vec{v}) \otimes \nabla \rho, \quad (\text{УС 1})$$

$$\begin{aligned} (B' + BA + A^T B - B \operatorname{tr} A) \vec{x} + \vec{v}' + A^T \vec{v} - \operatorname{tr} A \vec{v} + B \vec{u}_0 = \\ = \operatorname{tr} A [(\rho a^2)_\rho \nabla \ln \rho - \rho (a^2)_p (B\vec{x} + \vec{v})], \end{aligned} \quad (\text{УС 2})$$

где \otimes – тензорное произведение, $B = A' + A^2$, $\vec{v} = \vec{u}'_0 + A \vec{u}_0$. Систему уравнение совместности дополняет уравнение для плотности:

$$\rho_t + (A\vec{x} + \vec{u}_0) \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{tr} A = 0.$$

Матрицу B представим в виде суммы симметричной и антисимметричной частей: $B = S + E < \vec{\omega} >$, где $S = S^T$ – вспомогательная матрица, $E = -E^T = \begin{vmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{vmatrix}$ – матрица, элементы которой задаются координатами вектора угловой скорости $\vec{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$.

Первое уравнение совместности является тождеством для диагональных элементов. Остальные три равенства имеют вид:

$$\nabla \ln \rho \times (S\vec{x} + \vec{\omega} \times \vec{x} + \vec{v}) = -2\vec{\omega},$$

из которых следуют равенства

$$S\vec{\omega} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0.$$

Векторное уравнение является **классифицирующим**. В зависимости от ранга матрицы S проведена классификация всех найденных подмоделей.

В п. 1.3 введены лагранжевы переменные $t, \vec{\xi}$ с помощью решения $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{\xi})$ задачи Коши:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad \vec{x}|_{t=0} = \vec{\xi}.$$

Решение имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}_0(t) + M(t)\vec{\xi}, \quad \vec{x}_0(0) = 0, \quad M(0) = I,$$

где $M' = AM$, $\vec{x}'_0 = A\vec{x}_0 + \vec{u}_0$, I – единичная матрица.

В лагранжевых координатах УГД с линейным полем скоростей имеют 2 интеграла

$$\rho = \rho_0(\vec{\xi})|M|^{-1}, \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}_0(\vec{\xi}), \quad p = f(\rho_0|M|^{-1}, \mathcal{S}_0)$$

и сводятся к векторному уравнению

$$\rho M^T \vec{x}_{tt} + \nabla_{\xi} p = 0.$$

После подстановки интегралов в последнее уравнение, получим уравнение в которое входят функции зависящие только от t или только от $\vec{\xi}$. Разделение переменных в таком уравнении возможно только для специальных уравнений состояния.

В п. 1.4 найдена ПОДМОДЕЛЬ 1 движения газа с линейным полем скоростей в случае, когда плотность зависит только от времени. В этом случае из уравнения совместности и уравнения для p из УГД, получим:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\int \text{tr} A dt\right), \quad B = B^T = S,$$

$$p = -2^{-1}\rho\vec{x} \cdot S\vec{x} - \rho\vec{v} \cdot \vec{x} + p_0(t),$$

где p_0 – некоторая функция, ρ_0 – произвольная постоянная. После подстановки найденных функций во второе уравнение совместности определяется уравнение состояния и дифференциальные уравнения для матрицы S и \vec{v} :

$$\begin{aligned} p &= \alpha(\rho)D(\mathcal{S}) + \beta(\rho), \\ S' + 2SA &= (1 - \alpha^{-1}\alpha'\rho)StrA, \quad A' + A^2 = S, \\ \vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 &= (1 - \alpha^{-1}\alpha'\rho)\vec{v}trA, \quad \vec{u}'_0 + A\vec{u}_0 = \vec{v}, \\ p'_0 - \rho\vec{u}_0 \cdot \vec{v} &= -\rho(\alpha^{-1}\alpha'(p_0 - \beta) + \beta')trA, \end{aligned}$$

где $\alpha(\rho)$, $\beta(\rho)$, $D(\mathcal{S})$ – произвольные функции.

Во **второй главе** найдены все подмодели движения газа с линейным полем скоростей в случае нулевого вектора угловой скорости. Получено три подмодели. Найдены интегралы подмоделей в лагранжевых переменных и доказано несколько важных теорем.

В **п. 2.1** из (УС1), (УС2) найдены: вид функции плотности

$$\rho = e^{-\int \text{tr}A dt} R'(I),$$

где $I = J e^{-\int a_0 dt} - 2 \int \vec{u}_0 \cdot \vec{v} e^{-\int a_0 dt} dt$, $a_0(t)$, $R'(I)$ – некоторые функции, $J = \vec{x} \cdot S\vec{x} + 2\vec{v} \cdot \vec{x}$ и дифференциальные уравнения подмоделей

$$S' + 2SA = a_0(t)S, \quad \vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 = a_0(t)\vec{v},$$

а также классифицирующее соотношение, из которого определяется уравнение состояния, вид функций $a_0(t)$, $R'(I)$:

$$a_0(t) = \text{tr}A[1 + 2(\rho a^2)_\rho (\ln R')' e^{-\int a_0 dt} - (\rho a^2)_p]. \quad (\text{КС})$$

Классифицирующее соотношение является функциональным: в него входят функции, зависящие от разных переменных.

В **п. 2.2** введены новые независимые переменные t , I , p позволяющие из (КС) определить уравнение состояния, функции $a_0(t)$, $R'(I)$. В результате получено три подмодели.

Общие уравнения этих подмоделей таковы

$$\begin{aligned} S' + 2SA &= a_0(t)S, \quad A' + A^2 = S, \\ \vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 &= a_0(t)\vec{v}, \quad \vec{u}'_0 + A\vec{u}_0 = \vec{v}. \end{aligned}$$

ПОДМОДЕЛЬ 2 имеет уравнение состояния

$$p = \rho^\gamma h_0(\mathcal{S}) + p_0 \frac{1 - \rho^\gamma}{\gamma},$$

где γ, p_0 – постоянная, h_0 – произвольная функция энтропии. Коэффициент в уравнениях имеет вид

$$a_0(t) = (1 - \gamma)\text{tr}A.$$

Плотность выражается формулой

$$\rho = e^{-\int \text{tr}A dt} R'(I),$$

где $R'(I)$ – произвольная функция.

ПОДМОДЕЛЬ 3 имеет уравнение состояния

$$p = \rho^\gamma h_0(\mathcal{S}) + p_0 \frac{\rho^{\gamma_1} - \rho^\gamma}{(\gamma_1 - \gamma)\gamma_1} - \gamma_2 \frac{1 - \rho^\gamma}{\gamma},$$

где γ_1, γ_2 – постоянные. Коэффициент в уравнениях таков

$$a_0(t) = \text{tr}A \frac{(1 - \gamma_1)e^{(\gamma - \gamma_1)\int \text{tr}A dt} N + \gamma - 1}{e^{(\gamma - \gamma_1)\int \text{tr}A dt} N - 1},$$

где N – постоянная. Плотность задается формулой

$$\rho = \rho_0 e^{-\int \text{tr}A dt} |I_1 + (\gamma_1 - 1)I|^{\frac{1}{\gamma_1 - 1}},$$

где ρ_0, I_1 – постоянные.

ПОДМОДЕЛЬ 4 имеет уравнение состояния

$$p = H \frac{\rho^\gamma - 1}{\gamma} + \chi(\rho g(\mathcal{S})),$$

где χ, g – произвольные функции. Выражение для коэффициента уравнений и плотность задаются формулами

$$a_0(t) = (1 - \gamma)\text{tr}A, \quad \rho = \rho_0 e^{-\int \text{tr}A dt} |I_1 + (\gamma - 1)I|^{1/(\gamma - 1)}.$$

В п. 2.3 при помощи замены:

$$S = M''M^{-1}, \quad \vec{v} = \vec{x}'' - M''M^{-1}\vec{x}_0,$$

которая была обоснована в п. 1.3, дифференциальные уравнения подмоделей для матрицы S и вектора \vec{v} записаны в лагранжевом представлении:

$$M^T M'' = L |N_1| |M|^{1 - \gamma_1} - |M|^{1 - \gamma}, \quad M^T \vec{x}'' = \vec{l} |N_1| |M|^{1 - \gamma_1} - |M|^{1 - \gamma},$$

где L, \vec{l} – постоянные матрица и вектор, $|M| = |\det M|$. Из симметричности матрицы S следует, что $L = L^T$. Для матричного дифференциального уравнение доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Матричное уравнение для M имеет первые интегралы

$$M^T M' - (M^T)' M = M_1 - M_1^T,$$

где $M(0) = I$, $M'(0) = M_1$.

Теорема 2. При $L = dI$ матричное уравнение для M имеет интегралы

$$M(M^T)' - M' M^T = M_1^T - M_1,$$

где d – произвольная постоянная, I – единичная матрица.

Теорема 3. Уравнение для матрицы M инвариантно относительно группы линейных преобразований, осуществляемых постоянными неособыми матрицами T :

$$M = \widetilde{M}T, \quad L = |T|^{\gamma-1} T^T \widetilde{L}T, \quad N_1 = |T|^{\gamma-1} \widetilde{N}.$$

Теорема 4. Пусть $L = \text{diag}(l_1, l_2, l_3)$, $l_i \neq 0$. Тогда существует преобразование с диагональной матрицей T , которое переводит L в диагональную с элементами $|\bar{l}_i| = 1$ при $\gamma \neq 1/3$. Если $\gamma = 1/3$, то $|\bar{l}_1| = |\bar{l}_2| = 1$, $|\bar{l}_3| = |l_1 l_2 l_3|$.

В третьей главе найдены все подмодели движения газа с линейным полем скоростей в случае нулевой вспомогательной матрицы и ненулевого вектора угловой скорости. Получено две подмодели. Найдены новые интегралы подмоделей.

В п. 3.1, 3.2 введена интегрирующая замена переменных. В результате функция плотности имеет вид

$$\rho = R(t, I) \alpha_1^{-2}, \quad (\text{II})$$

где $I = \beta_1 \alpha_1^{-1}$, $\alpha_1 = \alpha - \alpha_0$, $\beta_1 = \beta - \beta_0$, $\alpha_0 = -v^3 (\omega^1)^{-1}$, $\beta_0 = v^2 (\omega^1)^{-1}$, $\alpha = x^2 - x^1 \omega^2 (\omega^1)^{-1}$, $\beta = x^3 - x^1 \omega^3 (\omega^1)^{-1}$. Получены две подмодели.

ПОДМОДЕЛЬ 5 состоит из уравнений

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 = (1 - \gamma) \text{tr} A \vec{v}, \quad \vec{u}_0' + A \vec{u}_0 = \vec{v},$$

$$A' + A^2 = E \langle \vec{\omega} \rangle, \quad \vec{\omega}' = A \vec{\omega} - \gamma \text{tr} A \vec{\omega},$$

уравнение состояния

$$p = h(\mathcal{S}) \rho^\gamma,$$

где h – произвольная функция энтропии. Плотность определяется по формуле (II), где $R(t, I)$ определяется из уравнения

$$(R_t R^{-1} + \text{tr} A) \omega^1 + (\vec{a}_2 + I \vec{a}_3) \cdot (R^{-1} R_I (\vec{e}_3 - I \vec{e}_2) - 2 \vec{e}_2) = 0,$$

где $A = \|\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\|$, $\vec{e}_2 = \|\omega^2, \omega^1, 0\|^T$, $\vec{e}_3 = \|\omega^3, 0, \omega^1\|^T$.

ПОДМОДЕЛЬ 6 состоит из уравнений

$$A' + A^2 = E \langle \vec{\omega} \rangle \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma \text{tr} A \vec{\omega}, \quad \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0,$$

$$\tau_2' + \vec{a}_2 \cdot \vec{\tau} = \tau_2 \left(\frac{(\text{tr} A)'}{\text{tr} A} + \frac{\text{tr} A}{2} \right), \quad \tau_3' + \vec{a}_3 \cdot \vec{\tau} = \tau_3 \left(\frac{(\text{tr} A)'}{\text{tr} A} + \frac{\text{tr} A}{2} \right),$$

с уравнением состояния

$$p = \rho^\gamma h(\mathcal{S}) + 2\gamma_1 \rho^\gamma \frac{\rho^{1/2-\gamma} - 1}{1 - 2\gamma},$$

а плотность определяется по формуле (П), где $R(t, I)$ имеет вид

$$R^{-1/2} = -\frac{\tau_2 + \tau_3 I}{\gamma_1 \text{tr} A}.$$

В п. 3.3 из дифференциального уравнения для матрицы A и вектора $\vec{\omega}$ из ПОДМОДЕЛИ 5, ПОДМОДЕЛИ 6 следуют интегралы

$$\vec{\omega} = (\vec{\sigma}_1 t + \sigma \vec{\sigma}_2) e^{-\gamma \mu}, \quad \mu' = \text{tr} A, \quad (\text{И1})$$

$$A(\vec{\sigma}_1 t + \sigma \vec{\sigma}_2) = \vec{\sigma}_1, \quad (\text{И2})$$

где $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ – постоянные единичные вектора, σ – постоянная.

Интеграл (И2) сводит матричное дифференциальное уравнение $A' + A^2 = E \langle \vec{\omega} \rangle$ к системе 7-го порядка.

При помощи замены $A = M' M^{-1}$ матричное уравнение из подмоделей запишем в лагранжевом представлении:

$$M'' = |M|^\gamma \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -t \\ -\sigma & t & 0 \end{array} \right\| M, \quad M(0) = I, \quad (\text{ЛП})$$

а (И2) примет вид

$$\sigma M \vec{\sigma}_2 = \vec{\sigma}_1 t + \vec{\sigma}_2.$$

Еще 2 интеграла имеют вид

$$J_{12} \sigma = t m'_{11} - m_{11} + \sigma m'_{21}, \quad J_{23} \sigma = t m'_{13} - m_{13} + \sigma m'_{23},$$

где J_{12}, J_{23} – постоянные, $M = \|m_{ij}\|$.

В результате (ЛП) сведена к системе 10-го порядка.

В **четвертой главе** рассматривается вырожденная ($\det S = 0$) вспомогательная матрица и ненулевая угловая скорость. В этом случае из (УС 1) получено одно скалярное линейное неоднородное уравнение для плотности. Здесь получено пять подмоделей.

В п. 4.1, 4.2 введена интегрирующая замена переменных в уравнении для плотности:

$$\rho = e^{2\omega^1 \int P^{-1} dI} R(t, J),$$

где R – некоторая функция, $J = \alpha_1 |P|^{1/2} e^{\omega^1 \int P^{-1} dI}$, $P = I^2 s_{33} + 2I s_{23} + s_{22}$, $\alpha_1 = \alpha - \alpha_0$, $\beta_1 = \beta - \beta_0$, $I = \alpha_1 / \beta_1$, $\alpha_0 = (-v^2 s_{33} + v^3 (s_{23} - \omega^1)) / \Delta$, $\beta_0 = (-v^3 s_{22} + v^2 (\omega^1 + s_{23})) / \Delta$, $\Delta = s_{22} s_{33} - s_{23}^2 + (\omega^1)^2 \neq 0$, α и β из (П).

В результате получено две подмодели, каждая из которых состоит из общих уравнений вида:

$$A' + A^2 = S + E \langle \vec{\omega} \rangle, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma(\text{tr} A)\vec{\omega},$$

$$S' + SA + A^T S = (1 - \gamma + c_0(t))S \text{tr} A, \quad \vec{u}'_0 + A\vec{u}_0 = \vec{v},$$

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 = (1 - \gamma)\vec{v} \text{tr} A - c_0(t) \vec{\xi} \text{tr} A + \vec{v}_0(t),$$

где

$$\Delta\phi(t) = (v^3)^2 s_{22} + (v^2)^2 s_{33} + 2v^2 v^3 s_{23}, \quad \Delta\vec{\xi} = (s_{33} s_{22} - s_{23}^2)\vec{v} - \omega^1 (v^2 \vec{s}_3 - v^3 \vec{s}_2),$$

$$c_0(t)(a_0 + \exp(-\gamma \int_{t_0}^t \text{tr} A dt)) = \gamma, \quad \Delta = s_{22} s_{33} - s_{23}^2 + (\omega^1)^2.$$

Представление для плотности таково

$$\rho = \frac{a_0 + \exp(-\gamma \int_{t_0}^t \text{tr} A dt)}{\vec{x} \cdot S\vec{x} + 2\vec{\xi} \cdot \vec{x} + \phi(t)}.$$

Специфика подмоделей заключается в следующем.

ПОДМОДЕЛЬ 7

$\omega^1 \neq 0$, $\Delta \neq 0$ и $s_{23}^2 - s_{22} s_{33} \neq 0$. В этом случае в уравнении для \vec{v} должно быть $\vec{v}_0 = 0$, а уравнение состояния имеет вид:

$$p = \rho^\gamma h_1(\mathcal{S}) \pm \frac{a_0}{2} \ln \rho.$$

ПОДМОДЕЛЬ 8

$\omega^1 \neq 0$, $\Delta \neq 0$ и $s_{23}^2 - s_{22} s_{33} = 0$. В этом случае в уравнении для вектора \vec{v} имеем

$$\vec{v}_0(t) = \frac{b_0}{\omega^1} (a_0 + \exp(-\gamma \int_{t_0}^t \text{tr} A dt))^{-1/2} \left\| \begin{array}{c} -\omega^2 \sqrt{|s_{22}|} - \omega^3 \sqrt{|s_{33}|} \\ \omega^1 \sqrt{|s_{22}|} \\ \omega^1 \sqrt{|s_{33}|} \end{array} \right\| \text{tr} A,$$

а уравнения состояния имеет вид:

$$p = \rho^\gamma h_1(\mathcal{S}) \pm \frac{a_0}{2} \ln \rho \mp b_0 \rho^\gamma \frac{\rho^{1/2-\gamma} - 1}{1/2 - \gamma}.$$

В п. 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 введена интегрирующая замена переменных в уравнении для плотности:

$$\rho = \frac{R(t, J_1)}{n}, \quad (\Phi\Pi)$$

где R – некоторая функция, $J_1 = 2\omega^1(\alpha + \lambda\beta) - (v^3 - \lambda v^2) \ln |n|$, $\lambda = (s_{23} + \omega^1)(s_{22})^{-1} = s_{33}(s_{23} - \omega^1)^{-1}$, $n = 2\omega^1 I_1 + \lambda s_{22} v^3 - s_{33} v^2$, $I_1 = \alpha s_{22} \lambda + \beta s_{33}$.

При $R_{J_1} \neq 0$ и $v^3 \neq \lambda v^2$ получена подмодель.

ПОДМОДЕЛЬ 9 состоит из уравнений:

$$A' + A^2 = S + E \langle \vec{\omega} \rangle, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma \vec{\omega} \text{tr} A,$$

$$S' + SA + A^T S = (1 - \gamma) S \text{tr} A + \frac{(2\omega^1)^2 k_1}{v^3 - \lambda v^2} \vec{e} \otimes \vec{e} \text{tr} A,$$

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S \vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 - (1 - \gamma) \vec{v} \text{tr} A = -2\omega^1 \frac{k_4 + k_1 \ln R_0}{v^3 - \lambda v^2} \vec{e},$$

Плотность имеет экспоненциальный вид

$$\rho = R_0(t) \exp \left(\frac{2\omega^1 \vec{x} \cdot \vec{e}}{\lambda v^2 - v^3} \right),$$

где $R_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\lambda v^2 - v^3) ((\ln R_0)' + \text{tr} A) + 2\omega^1 \vec{u}_0 \cdot \vec{e} = 0,$$

$\vec{e} = \lambda \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_3$, $E \langle \vec{\omega} \rangle = \|\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3\|$. Уравнение состояния имеет вид

$$p = \rho^\gamma h(\mathcal{S}) + \frac{\rho}{1 - \gamma} (k_0 + k_1 \ln \rho), \quad \text{при } \gamma \neq 1,$$

$$p = \rho h(\mathcal{S}) + \rho \ln \rho (k_1 \ln \rho + k_4 - k_1), \quad \text{при } \gamma = 1,$$

где k_i – постоянные, h – произвольная функция.

При $R_{J_1} \neq 0$ и $v^3 = \lambda v^2$ получена подмодель.

ПОДМОДЕЛЬ 10 состоит из уравнений:

$$A' + A^2 = S + E \langle \vec{\omega} \rangle, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma \vec{\omega} \text{tr} A,$$

$$S' + SA + A^T S = (1 - \gamma + \varphi) S \text{tr} A,$$

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S \vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 - (1 - \gamma) \vec{v} \text{tr} A = v^2 s_{22}^{-1} \varphi \vec{s}_2 \text{tr} A,$$

где $S = \|\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\|$, $\varphi(t) = 2\lambda k_5 R_0^{-1}$. Представление плотности

$$\rho = \frac{(s_{23} + \omega^1) R_0(t)}{(S\vec{x} + \vec{\omega} \times \vec{x} + \vec{v})_3 (S\vec{x} - \vec{\omega} \times \vec{x} + \vec{v})_2}.$$

Здесь нижний индекс означает номер декартовой координаты вектора. А функция $R_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\ln R_0)' = (\varphi - \gamma)\text{tr}A.$$

Уравнение состояния имеет вид

$$p = \rho^\gamma h(\mathcal{S}) + \frac{k_5}{\gamma} \ln \rho, \text{ при } \gamma \neq 0,$$

$$p = h(\mathcal{S}) - 2^{-1}k_5(\ln \rho)^2 + k_0 \ln \rho, \text{ при } \gamma = 0.$$

При $R = R(t)$ получена подмодель.

ПОДМОДЕЛЬ 11 состоит из уравнений

$$A' + A^2 = S + E < \vec{\omega} >, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma\vec{\omega}\text{tr}A,$$

$$S' + SA + A^T S - (1 - \gamma)S = 2 \left(\frac{\omega^1}{R} \right)^2 p_2 e_1 \otimes e_1^T \text{tr}A,$$

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 - (1 - \gamma)\vec{v}\text{tr}A = \frac{\omega^1}{R} (2p_5 - p_2 \delta R^{-1}) e_1 \text{tr}A,$$

где $\delta = s_{33}v^2 - \lambda s_{22}v^3$, $e_1 = \vec{s}_3 - \vec{\omega}_3$. Плотность имеет вид (ФП), где $R(t, J_1) = R(t)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\ln R)' + \text{tr}A = (\ln \delta)' + 2\delta^{-1}\vec{u}_0 \cdot (s_{33}\vec{\omega}_2 - s_{22}\lambda\vec{\omega}_3).$$

Уравнение состояния имеет вид

$$p = \rho^\gamma h(\mathcal{S}) - p_2 \frac{\rho^{-1} - \rho^\gamma}{1 + \gamma} + \frac{p_5}{\gamma} \ln \rho \text{ при } \gamma \neq 0,$$

$$p = h(\mathcal{S}) - p_2 \rho^{-1} - \ln \rho (p_0 - 2^{-1}p_5 \ln \rho) \text{ при } \gamma = 0,$$

где p_i – постоянные.

В **пятой главе** для некоторых найденных подмоделей рассматриваются частные случаи движения газа. В результате получены следующие движения частиц газа: разлета из точечного источника, выпрямляющийся разлет из вихря, схлопывание выделенного объема в иголку или диск.

В **п. 5.1** для ПОДМОДЕЛИ 1, в случае политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$, найдено частное решение. Для радиальных движений уравнение мировых линий таково

$$r = nt + C |t|^{2/(3\gamma-1)},$$

где $|\vec{x}| = r$, n – постоянная.

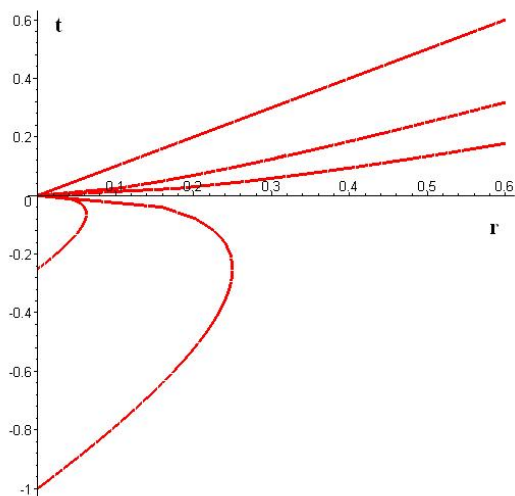


Рис. 1: $C \geq 0$.

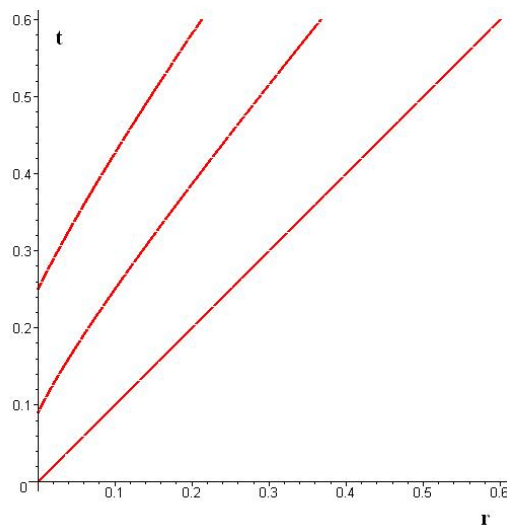


Рис. 2: $C \leq 0$.

При $t > 0$, $C \geq 0$ имеем разлет частиц газа из точечного источника. При $C = 0$ частицы двигаются по прямой с постоянной скоростью n . Это граница с вакуумом. Для $C > 0$ частицы двигаются с отрицательным ускорением, т.е. замедляются (рис.1). Если одну из замедляющихся мировых линии принять за движение поршня, то получим прибор для образования вакуума.

При $C \leq 0$, $t > 0$ каждая частица вылетает из начала со скоростью $3n(\gamma - 1)/(3\gamma - 1)$ в свой момент времени $-(C/n)^{(3\gamma-1)/(3\gamma-3)}$ (рис. 2).

При $t < 0$, $C > 0$ каждая частица вылетает из начала со скоростью $3n(\gamma - 1)/(3\gamma - 1)$ в момент времени $-(C/n)^{(3\gamma-1)/(3\gamma-3)}$. Далее она останавливается на расстоянии $(C^{1-3\gamma}(n \frac{3\gamma-1}{2})^2)^{1/(3-3\gamma)} \frac{3(\gamma-1)}{3\gamma-1}$ в момент времени $-(n(3\gamma - 1)/(2C))^{(3\gamma-1)/(3-3\gamma)}$. Затем летит обратно, ускоряясь. Все вместе частицы встречаются в момент времени $t = 0$ с бесконечной скоростью. Если одну из мировых линии считать движением поршня, то получим прибор для фокусировки частиц.

В п. 5.2 для ПОДМОДЕЛИ 4 найдено частное решение. Уравнения движения частиц в пространстве имеют вид

$$x = x_0 t^{-1}, \quad y = t y_0, \quad z = t z_0,$$

где x_0, y_0, z_0 – лагранжевы переменные. Эта поверхность симметричный эллипсоид с полуосями $a = t^{-2}$, $b = c = t$.

При $t \rightarrow 0$ одна полуось неограниченно увеличивается, а две другие полуоси стремятся к нулю. Получаем, что любая сфера превращается в иглу (рис. 3).

При $t \rightarrow \infty$ одна полуось стремится к нулю, а две другие полуоси неограниченно увеличиваются. Получаем, что любая сфера превращается в диск (рис. 4).

В п. 5.3 ПОДМОДЕЛЬ 7, при специальных значениях начальных данных для неизвестных матриц A, S и векторов $\vec{\omega}, \vec{u}_0$, сведена к системе двух диф-

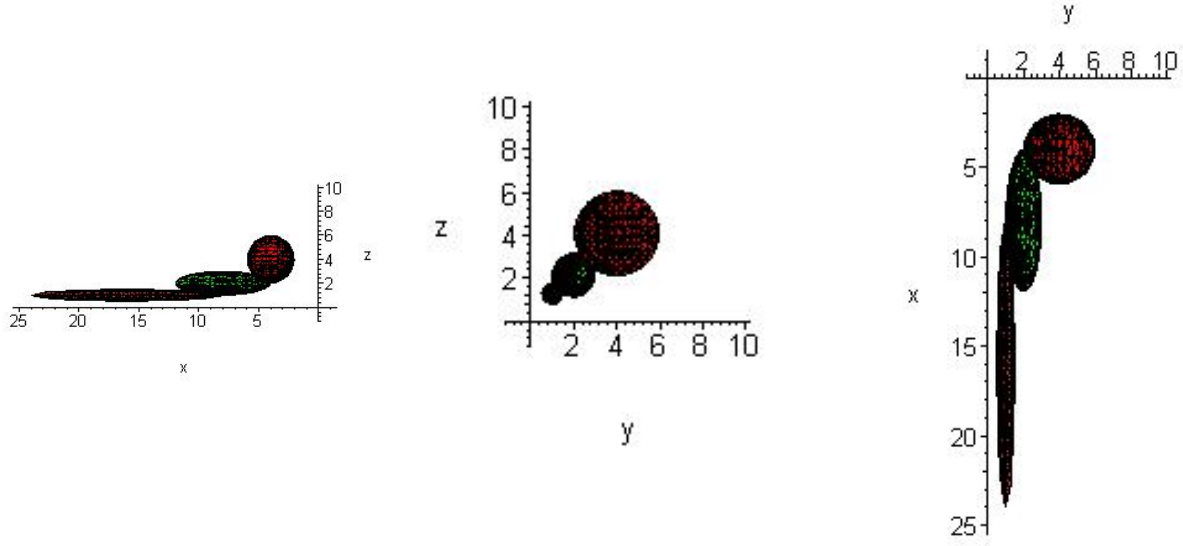


Рис. 3: Вытягивание выделенного объема газа в иглу.

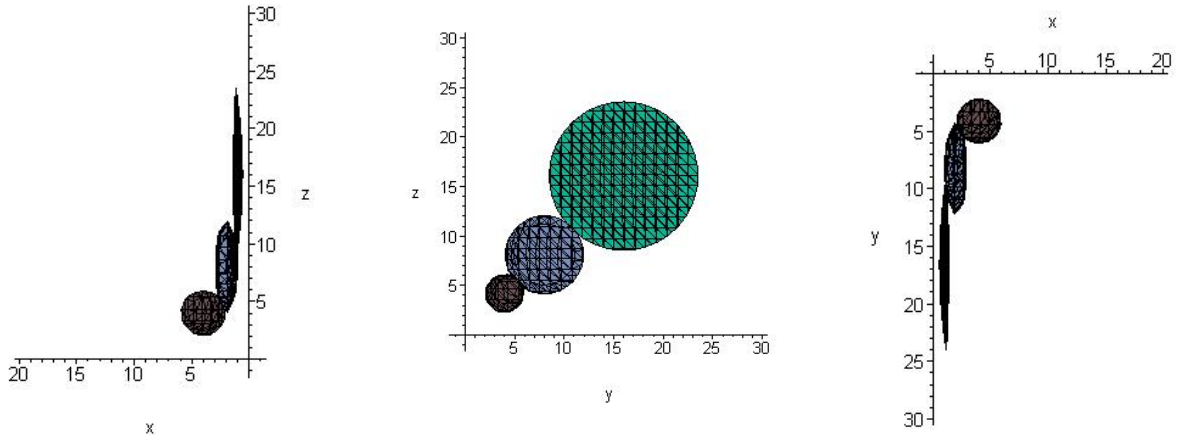


Рис. 4: Превращение выделенного объема газа в диск.

ференциальных уравнений. После растяжения переменной $\tau \rightarrow \sqrt{\epsilon}\tau$, где ϵ – малый параметр, для нулевого приближения с точностью до ϵ получено уравнение Риккати

$$4\mu_g = 1 + g^2 + \mu^2, \quad (P)$$

где $\mu \sim \tau'$, $g \sim \tau\omega_A$, $\vec{\omega}_A = \omega_A(1, 0, 0)$ – вектор, задающий антисимметричную часть матрицы A . При $\vec{u}_0 = 0$ уравнения мировых линии частиц имеют вид

$$x = x_0, \quad \varphi = \varphi_1 + \sqrt{\epsilon}\varphi_2 + O(\epsilon),$$

$$r = r_0\sqrt{\tau} \left(1 + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \int \frac{\cos 2\varphi_1}{M\tau} d\tau \right) + O(\epsilon),$$

где $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$,

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_{01} + \int \frac{G}{2\tau M} d\tau, \quad \varphi_2 = \tilde{\varphi}_{02} - \int \frac{\sin 2\varphi_1}{2\tau M} d\tau,$$

$\tilde{\varphi}_{01}$, $\tilde{\varphi}_{02}$ – постоянные, которые согласуются с пределами интегрирования, $M(\tau) = F(G(\tau))$, $g = G(\tau)$, $\int_{g_1}^g F(g) dg = 2 \ln \frac{\tau}{\tau_1}$, $\mu = F(g)$ – решение уравнения (P), удовлетворяющее нулевым начальным данным. Начальные данные $\varphi(0) = \varphi_{01} + \sqrt{\varepsilon} \varphi_{02}$, $r(0) = r_0$.

Траектории частиц изображены на рис. 5. Каждая частица газа движется по своей траектории. Частицы, находящиеся на одной траектории в начальный момент времени, движутся по ней. Доказано, что траектории частиц выпрямляются. Таким образом, получаем выпрямляющийся разлет газа из вихря представленный на рис. 5.

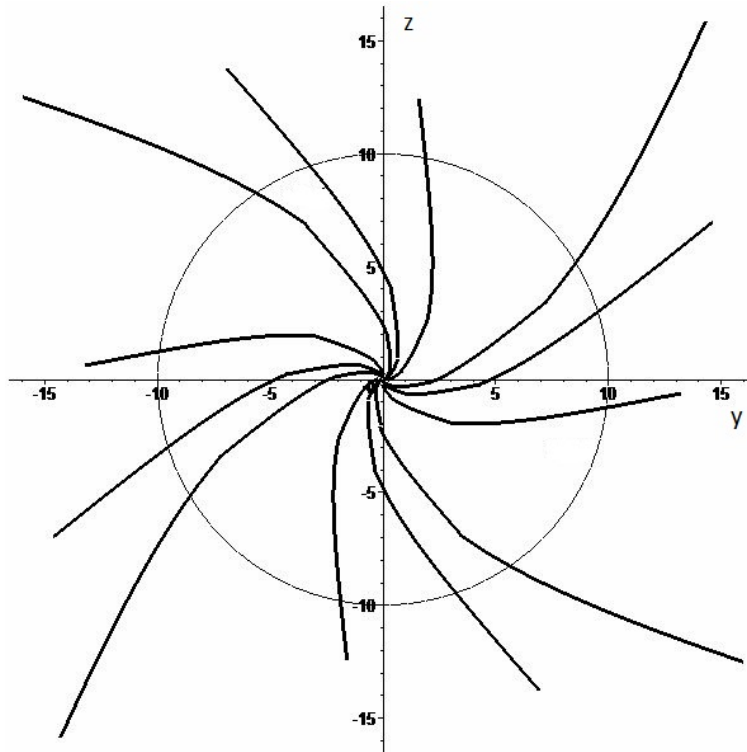


Рис. 5: Выпрямляющийся разлет частиц газа.

В **заклучении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В диссертации решены следующие новые задачи.

1. Развита метод разделения переменных в переопределенных функционально-дифференциальных уравнениях.

2. Проведена полная классификация уравнений состояния, для которых существуют подмодели УГД с линейным полем скоростей.

3. Найдены новые интегралы для каждой подмодели движения газа с линейным полем скоростей.

4. Изучены движения газа с линейным полем скоростей: радиальный разлет частиц газа из точечного источника, схлопывание шара в иголку или диск, выпрямляющийся разлет газа из вихря.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Тарасова (Юлмухаметова) Ю.В. Движение газа с линейным полем скоростей и плотностью, зависящей только от времени // Труды 37-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН. 2006. С. 258–262.

2. Тарасова (Юлмухаметова) Ю.В. Главная подмодель движения газа с линейным полем скоростей // Труды 38-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН. 2007. С. 210–213.

3. Тарасова (Юлмухаметова) Ю.В. Частное решение одной подмодели движения газа с линейным полем скоростей // Труды 39-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН. 2008. С. 175–179.

4. Тарасова (Юлмухаметова) Ю.В. Подмодели движения газа с линейным полем скоростей, определяемые матрицами ранга 1 // Труды Института механики УНЦ РАН, Уфа: Нефтегазовое дело, 2008. Вып. 6. С. 137–142.

5. Тарасова (Юлмухаметова) Ю.В. Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей с нулевой вспомогательной матрицей // Труды 40-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН. 2009. С. 192–196.

6. Тарасова (Юлмухаметова) Ю.В. Подмодели движения газа с линейным полем скоростей и с нулевой вспомогательной матрицей // Уфимский математический журнал. 2009. Т.1. №3. С. 125–131.

7. Тарасова (Юлмухаметова) Ю.В. Классификация подмоделей движения газа с линейным полем скоростей в газовой динамике // СибЖИМ. 2009. Т. 12, №4 С. 128–136.

8. Юлмухаметова Ю.В. Подмодели движения газа с линейным полем скоростей в вырожденном случае // СибЖИМ. 2011. Т. 14, №2 С. 139–150.

ЮЛМУХАМЕТОВА Юлия Валерьевна

ПОДМОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

Специальность:

01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 14.11.2011. Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс
Усл. печ. л. 1.0. Уч.-изд.л. 1.0.
Тираж 100 экз. Заказ №351

ФГБОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический
университет

Центр оперативной полиграфии
450000, Уфа-центр, ул. К.Маркса, 12.