На правах рукописи

Сафин Эльдар Маратович

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2011

Работа выполнена в отделе математической физики
Института математики с вычислительным центром УНЦ РАН
и в отделе физико-математических и технических наук
ГАНУ Института прикладных исследований АН РБ

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор, чл.-корр. АН РБ
Сабитов Камиль Басирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Солдатов Александр Павлович

доктор физико-математических наук,
профессор Ильясов Явдат Шавкатович

Ведущая организация: Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН

Защита состоится 13 мая 2011 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 в Учреждении российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН по адресу: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН.

Автореферат разослан "   " марта 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук С.В. Попенов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными является теория краевых задач для уравнений смешанного типа. Такой интерес объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их важными практическими приложениями в околозвуковой газовой динамике, в магнито и гидродинамических течениях с переходом через скорость звука, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и других областях.

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в известных работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта, где были впервые поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа, теперь известных как "задача Трикоми"и "задача Геллерстедта".

В дальнейшем созданием теории краевых задач для уравнений смешанного типа занимались Ф.И. Франкль, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, S. Agmon, L. Nirenberg, M.N. Protter, C.S. Morawetz, Л. Берс, В.Ф. Волкодавов, В.Н. Врагов, Т.Д. Джураев, В.И. Жегалов, А.Н. Зарубин, Ю.М. Крикунов, А.Г. Кузьмин, О.А. Ладыженская, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, С.П. Пулькин, О.А. Репин, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, Р.С. Хайруллин, Хе Кан Чер и др. В этих работах наряду с задачами Трикоми и Геллерстедта были поставлены и изучены новые краевые задачи для уравнений смешанного типа.

Впервые на необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой – гиперболическое, было указано в работе И.М. Гельфанда[1], где рассматривается пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Затем Г.М. Стручина, Я.С. Уфлянд, Л.А. Золина показали другие применения этих задач.

О.А. Ладыженская и Л. Ступялис в многомерном пространстве рассмотрели начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

После этих статей появилось множество работ, где изучаются зада-

[1]Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. – 1959. – Т. XIV. – Вып. 3 (87). – С. 3 – 19.

ча Трикоми и ее обобщения, задачи со смещениями, задача типа задачи Бицадзе-Самарского и другие нелокальные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка. Это работы Х.Г. Бжихатлова, В.Н. Врагова, Т.Д. Джураева, В.А. Елеева, Н.Ю. Капустина, А.М. Нахушева, К.Б. Сабитова и других.

К.Б. Сабитовым для уравнений

$$L_1(u) = \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1 u = 0, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy} + \lambda_2 u = 0, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$L_2(u) = \begin{cases} u_x - u_{yy} - \lambda_1 u = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u = 0, & y < 0, \end{cases} \tag{2}$$

где λ_1, λ_2 - числовые параметры, рассмотрен аналог известной задачи Трикоми и изучен характер влияния гиперболической части уравнений (1) и (2) на корректность постановки задачи Трикоми. Показано, что единственность решения задачи T в классе регулярных решений уравнения (1) существенным образом зависит от параметров λ_1 и λ_2. Если даже $\lambda_1 > 0$, что в области параболичности гарантирует выполнение принципа экстремума, то найдется такое λ_2, при которых однородная задача Трикоми имеет ненулевое неотрицательное решение. А задача Трикоми для уравнения (2) вообще не имеет ни вещественного, ни комплексного спектра.

Так же К.Б. Сабитов[2] исследовал задачу с граничными условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0, \ -\alpha \le t \le \beta$, $u(x,-\alpha) = \psi(x), \ 0 \le x \le 1$, для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = 0, & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) | \ 0 < x < 1, \ -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $b \ge 0$ – заданные действительные числа. Методом спектрального анализа при некоторых условиях α и β установлен критерий единственности и решение поставленной задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

В работе К.Б. Сабитова, Л.Х. Рахмановой[3] исследована начально-краевая и нелокальные задачи для уравнений смешанного параболо-

[2]Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2008. – Т.86. – Вып. 2. – С. 273 – 279.

[3]Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х. Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения – 2008. – Т.44. – № 9. – С. 1175 – 1181.

гиперболи-ческого типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $m = const > 0$, $b = const \geq 0$, в прямоугольной области D. Здесь также методами спектральных разложений при при некоторых условиях на α и β установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования решений поставленных задач.

Данная диссертационная работа посвящена изучению обратных краевых задач для уравнения смешанного типа, о важности такого рода исследований отмечалось в работах М.А. Лаврентьева, Ф.И. Франкля, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко.

Ранее обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались в научных школах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова и их учеников и последователей А.М. Денисова, А.В. Баева, А.И. Прилепко, В.В. Васина, В.П. Танана, В.Г. Романова, А.И. Кожанова и многих других.

В тоже время практически отсутствуют исследования, посвященные решению обратных задач для уравнений смешанного типа.

Целью работы является постановка и доказательство единственности, существования и устойчивости решений обратных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = f(x,t), \tag{3}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u, & t < 0, \end{cases} \quad f(x,t) = \begin{cases} f_1(x), & t > 0, \\ f_2(x), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $b \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Научная новизна. Основные научные результаты диссертации являются новыми и получены автором лично.

1. Доказательство единственности, существования и устойчивости решения обратных задач для уравнения смешанного параболо - гиперболического типа с неизвестной правой частью, не зависящей от времени, в прямоугольной области с граничными условиями первого – третьего родов. В каждой из поставленных задач установлен критерий единственности, решение построено в виде суммы ряда по

собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи, доказана устойчивость решения по граничным данным.

2. Доказательство единственности, существования и устойчивости решения обратных задач для уравнения смешанного параболо - гиперболического типа с неизвестной правой частью, зависящей от времени, в прямоугольной области с граничными условиями первого – третьего родов. В каждой из поставленных задач установлен критерий единственности, решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи, доказана устойчивость решения по граничным данным.

Методика исследования. При доказательстве единственности, существования и устойчивости решений обратных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа использованы методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных и спектрального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений смешанного типа.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научном семинаре лаборатории дифференциальных уравнений отдела физико-математических и технических наук Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан, затем Института прикладных исследований Академии наук Республики Башкортостан (н.р. – проф. К.Б. Сабитов, 2006 – 2011 гг.), на семинарах: дифференциальные уравнения математической физики (н.р. – проф. Л.А. Калякин, проф. В.Ю. Новокшенов, февраль 2011 г.) и вычислительная математика и смежные вопросы (н.р. – проф. М.Д. Рамазанов, проф. Я.Ш. Ильясов, март 2011 г.) Института математики с вычислительным центром УНЦ РАН, также на следующих всероссийских и международных конференциях: «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы», посвященная юбилеям академиков РАН Ильина В.А. и Моисеева Е.А. (г. Стерлитамак, 2008 г.), «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (г. Эльбрус, 2008 г.), «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию академика В.А. Садовничего (г. Москва, 2009 г.), «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Нальчик - Эльбрус, 2009 г.), «Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Лобачевские чтения - 2009» (Казань, 2009 г.), «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Нальчик - Хабез, 2010 г.), «Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Лобачевские чтения - 2010» (Казань, 2010 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[11], при этом статьи [1]–[3] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК. В совместных работах [1]–[3] постановка задач принадлежит научному руководителю К.Б. Сабитову.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 103 наименования. Общий объем диссертации – 106 страниц.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю К.Б. Сабитову за предложенную тематику исследований, полезные замечания, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** даётся обзор литературы, формулируются постановки задач, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

В **главе 1** исследуются обратные задачи для уравнения смешанного парaболо-гиперболического типа с неизвестной правой частью, не зависящей от времени. Методом спектрального анализа установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач.

Рассмотрим уравнение (3) в области $D = \{(x,t)|\ \ 0 < x < 1,\ \ -\alpha < t < \beta\}$, $\alpha, \beta > 0$ при $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$:

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f(x), & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = f(x), & t < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для уравнения (4) в этой области D поставлены и решены следующие обратные задачи.

Задача 1.1. *Найти в области D функции u(x,t) и f(x), удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{5}$$

$$f(x) \in C(0,1) \cap L[0,1]; \tag{6}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{7}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{8}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{10}$$

где $\psi(x)$ *и* $\varphi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 1.2. *Найти в области D функции u(x,t) и f(x), удовлетворяющие условиям* (5) – (9) *и*

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta,$$

здесь $\psi(x)$ *и* $\varphi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $\varphi'(0) = \varphi'(1) = \psi'(0) = \psi'(1) = 0$.

Задача 1.3. *Найти в области D функции u(x,t) и f(x), удовлетворяющие условиям* (5) – (9) *и*

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta,$$

где h_1, h_2 *– заданные положительные числа,* $\psi(x)$ *и* $\varphi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $\varphi'(0) - h_1\varphi(0) = 0$, $\varphi'(1) + h_2\varphi(1) = 0$, $\psi'(0) - h_1\psi(0) = 0$, $\psi'(1) + h_2\psi(1) = 0$.

Рассмотрим **задачу 1.1.** Методом спектрального анализа построено решение задачи (5) – (10) в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \pi k x, \tag{11}$$

$$f(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \pi k x, \tag{12}$$

где

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha\beta b}(k)} \left(e^{-\lambda_k^2 \beta} - e^{-\lambda_k^2 t}\right) + \varphi_k, & t > 0, \\ \dfrac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha\beta b}(k)} \left[e^{-\lambda_k^2 \beta} - (\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t)\right] + \varphi_k, & t < 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$f_k = \left[\varphi_k - \frac{\varphi_k - \psi_k}{\delta_{\alpha\beta b}(k)} e^{-\lambda_k^2 \beta}\right] \lambda_k^2, \tag{14}$$

$$\lambda_k = \sqrt{b^2 + (\pi k)^2},$$

$$\psi_k = \sqrt{2} \int\limits_0^1 \psi(x) \sin \pi k x dx, \quad \varphi_k = \sqrt{2} \int\limits_0^1 \varphi(x) \sin \pi k x dx,$$

при условиях

$$\delta_{\alpha\beta b}(k) = e^{-\lambda_k^2 \beta} - (\cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Если $\delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ при $k = p$ и некоторых α, β и b, тогда задача (5) – (10) при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{f_p}{\lambda_p^2} + e^{-\lambda_p^2 t}\right) \sin \pi p x, & t > 0, \\ \left(\dfrac{f_p}{\lambda_p^2} + \cos \lambda_p t - \lambda_p \sin \lambda_p t\right) \sin \pi p x, & t < 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$f_p(x) = f_p \sin \pi p x, \quad f_p = -\lambda_p^2 e^{-\lambda_p^2 \beta}. \tag{17}$$

Выражение $\delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ при фиксированных $k = p$, $p \in \mathbb{N}$, $b \geq 0$ и $\beta > 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{(-1)^n}{\lambda_p} \arcsin \theta_p + \frac{\pi n}{\lambda_p} - \frac{\gamma_p}{\lambda_p}, \ \ p, n \in \mathbb{N},$$

$$\theta_p = e^{-\lambda_p^2 \beta} / \sqrt{1 + \lambda_p^2}, \ \ \gamma_p = \arcsin(1/\sqrt{1 + \lambda_p^2}).$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Если существует решение задачи* 1.1, *т.е. задачи* (5) – (10), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (15) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

При доказательстве единственности решения используется только полнота системы функций $\{\sqrt{2} \sin \pi k x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Поскольку $\alpha, \beta,\ b$ – любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших k выражение $\delta_{\alpha\beta b}(k)$ может стать достаточно малым, то есть возникает проблема "малых знаменателей"[4]. Чтобы не было такой ситуации, надо показать существование чисел α, β и b, что при достаточно больших k выражение $\delta_{\alpha\beta b}(k)$ отделено от нуля.

[4]Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. – 1963. – Т. XVIII. – Вып. 6 (114). – С. 91 – 192.

Приводимые ниже леммы 1.1 – 1.4 являются достаточными условиями отделенности выражения $\delta_{\alpha\beta b}(k)$ от нуля.

Лемма 1.1. *Если* $\alpha \in \mathbb{N}$ *и* $b = 0$, *то существует число* C_β *– зависящее от* β, *такое, что при любом* $k \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка* $|\delta_{\alpha\beta 0}(k)| \geq C_\beta > 0$.

Лемма 1.2. *Если* $\alpha = p/q, \;\; p, q \in \mathbb{N}, \;\; (p, q) = 1, \; p/q \notin \mathbb{N}, \; b = 0$, *то существует число* C_β *– зависящее от* β, *такое, что при любом* $k \in \mathbb{N}$, $k > q/\pi$, *справедлива оценка* $|\delta_{\alpha\beta 0}(k)| \geq C_\beta > 0$.

Лемма 1.3. *Если* $\alpha \in M = \{\alpha \mid \alpha = \sqrt{d} + p, \;\; p \in \mathbb{Z}, \;\; \sqrt{d} > -p, \;\; d = 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, *то существуют положительные постоянные* C_α *и* β_α *зависящие от* α *такие, что при* $b = 0$ *и всех* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\beta \geq \beta_\alpha$ *справедливо неравенство* $|\delta_{\alpha\beta 0}(k)| > C_\alpha > 0$.

Лемма 1.4. *Если* $\alpha = p/q, \;\; p, q \in \mathbb{N}, \;\; (p, q) = 1$, b *– положительное действительное число, то при любом* $k \in \mathbb{N}$, $k > K_{\alpha b} = (pb^2 + q\pi)/\pi^2$ *справедлива оценка* $|\delta_{\alpha\beta b}(k)| \geq C_\beta > 0$, *где* C_β *– положительная постоянная, зависящая от* β.

Таким образом, из лемм 1.1 – 1.4 следует, что существуют числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b \geq 0$ и положительные константы K_0 (здесь и далее $K_0 \in \mathbb{N}$) и C_0, вообще говоря, зависящие от α, β, b, такие что при $k \geq K_0, \; k \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство

$$|\delta_{\alpha\beta b}(k)| > C_0 > 0. \tag{18}$$

Если при указанных α, β и b выражение $\delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ при некоторых $k = l_1, ..., l_m$, где $1 \leq l_1 < ... < l_m \leq K_0$; l_n, $n = \overline{1, m}$, m – заданные натуральные числа, то задача (5) – (10) разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\int\limits_0^1 \varphi(x) \sin \pi k x dx = 0, \;\; \int\limits_0^1 \psi(x) \sin \pi k x dx = 0, \;\;\; k = l_1, ..., l_m, \tag{19}$$

и решение в этом случае определяется рядами

$$u(x,t) = \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{l_1 - 1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2 - 1} + ... + \sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right) u_k(t) \sin \pi k x + \sum_p A_p u_p(x,t), \tag{20}$$

$$f(x) = \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{l_1 - 1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2 - 1} + ... + \sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right) f_k \sin \pi k x + \sum_p A_p f_p(x), \tag{21}$$

где в суммах $\sum\limits_p$ индекс p принимает значения $l_1, ..., l_m$, $A_p \neq 0$ – произвольная постоянная, а выражения $u_k(t)$, f_k, $u_p(x,t)$ и $f_p(x)$ определяются соответственно по формулам (13), (14), (16) и (17), конечные суммы выражений (20) и (21) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Теорема 1.2. *Пусть* $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) = \psi^{(i)}(1) = 0,\ i = 0,2,$ *и выполнены условия* (18) *при всех* $k > K_0$. *Тогда если* $\delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots, K_0$, *то задача* (5) – (10) *однозначно разрешима и это решение определяется рядами* (11) и (12); *если* $\delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ *при некоторых* $k = l_1, ..., l_m \leq K_0$, *то задача* (5) – (10) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (19), *и решение в этом случае определяется рядами* (20), (21).

При обосновании устойчивости построенного решения (11) и (12) вводятся следующие нормы:

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} = \|u(x,t)\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^1 |u(x,t)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_\pm)} = \max_{\overline{D}_\pm} |u(x,t)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left(\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} |f^{(k)}(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2, *тогда для решения* (11), (12) *задачи* 1.1 *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leq K_{01} \left(\|\varphi\|_{W_2^0} + \|\psi\|_{W_2^0} \right),\ t \geq 0,$$

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leq K_{02}(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1}),\ t \leq 0,$$

$$\|f(x)\|_{L_2} \leq K_{03}(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^0}),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_+)} \leq K_{04}(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1}),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_-)} \leq K_{05}(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2}),$$

$$\|f(x)\|_{C[0,1]} \leq K_{06}(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^0}),$$

где постоянные $K_{0i},\ i = \overline{1,6}$, не зависят от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

При решении задач 1.2 и 1.3 применяется тот же спектральный метод и для их решений установлен критерий единственности, сами решения построены в виде сумм ортогонального ряда и установлена устойчивость по граничным данным.

Глава 2 посвящена изучению обратных задач для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с неизвестной правой частью, зависящей от времени. Методом спектральных разложений установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленных задач.

Для уравнения (3) в прямоугольной области D при $f_1(x) \neq f_2(x)$ поставлены и исследованы следующие обратные задачи.

Задача 2.1. *Найти в области D функции u(x,t) и f(x,t), удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{22}$$

$$f_i(x) \in C(0,1) \cap L[0,1], \quad i = 1,2; \tag{23}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t), \;\; (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{24}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \;\; 0 \leq x \leq 1; \tag{25}$$

$$u_t(x,-\alpha) = g(x), \;\; 0 \leq x \leq 1; \tag{26}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \;\; 0 \leq x \leq 1; \tag{27}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{28}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2.2. *Найти в области D функции u(x,t) и f(x,t), удовлетворяющие условиям* (22) – (27) *и*

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \;\; -\alpha \leq t \leq \beta,$$

здесь $\psi(x)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$, $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$, $g'(0) = g'(1) = 0$.

Задача 2.3. *Найти в области D функции u(x,t) и f(x,t), удовлетворяющие условиям* (22) – (27) *и*

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \;\; u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = 0, \;\; -\alpha \leq t \leq \beta,$$

где h_1, h_2 – заданные положительные числа, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi'(0) - h_1\varphi(0) = 0$, $\varphi'(1) + h_2\varphi(1) = 0$, $\psi'(0) - h_1\psi(0) = 0$, $\psi'(1) + h_2\psi(1) = 0$.

Для примера здесь рассмотрим **задачу 2.1** решение которой построено в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin \pi k x, \tag{29}$$

$$f_i(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_{ik}\sin \pi k x, \quad i = 1, 2, \tag{30}$$

где

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{f_{1k}}{\lambda_k^2} + C_{1k}e^{-\lambda_k^2 t}, \quad t > 0, \\ \dfrac{f_{2k}}{\lambda_k^2} + \left(\dfrac{(f_{1k} - f_{2k})}{\lambda_k^2} + C_{1k}\right)\cos\lambda_k t - \lambda_k C_{1k}\sin\lambda_k t, \quad t < 0, \end{cases} \tag{31}$$

$$f_{1k} = \lambda_k^2\left[\varphi_k + \frac{\lambda_k(\varphi_k - \psi_k)\sin\lambda_k\alpha - g_k(1 - \cos\lambda_k\alpha)}{\lambda_k\Delta_{\alpha\beta b}(k)}e^{-\lambda_k^2\beta}\right], \tag{32}$$

$$f_{2k} = \lambda_k^2\left[\psi_k + \frac{\lambda_k^2(\varphi_k - \psi_k) - g_k[(1 - e^{-\lambda_k^2\beta})\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha]}{\lambda_k\Delta_{\alpha\beta b}(k)}\right], \tag{33}$$

$$C_{1k} = \frac{\lambda_k(\psi_k - \varphi_k)\sin\lambda_k\alpha + g_k(1 - \cos\lambda_k\alpha)}{\lambda_k\Delta_{\alpha\beta b}(k)}, \tag{34}$$

φ_k, ψ_k, g_k – коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ по системе $\{\sqrt{2}\sin\pi k x\}_{k=1}^{\infty}$, при условиях

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k) = \lambda_k(1 - \cos\lambda_k\alpha) + (1 - e^{-\lambda_k^2\beta})\sin\lambda_k\alpha \neq 0, \ k \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

Если нарушено условие (35) при некоторых α, β и b и $k = p$, то обратная задача (22) – (28), где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$, имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} \left[\dfrac{f_{1p}}{\lambda_p^2} + e^{-\lambda_p^2 t}\right]\sin\pi p x, \quad t > 0, \\ \left[\dfrac{f_{2p}}{\lambda_p^2} + \left(\dfrac{f_{1p} - f_{2p}}{\lambda_p^2} + 1\right)\cos\lambda_p t - \lambda_p\sin\lambda_p t\right]\sin\pi p x, \quad t < 0, \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} f_{1p}(x) &= f_{1p}\sin\pi p x, \quad f_{1p} = -\lambda_p^2 e^{-\lambda_p^2\beta}, \\ f_{2p}(x) &= f_{2p}\sin\pi p x, \quad f_{2p} = -\frac{\lambda_p^3}{\sin\lambda_p\alpha}. \end{aligned} \tag{37}$$

Выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ при фиксированных $k = p, \quad p \in \mathbb{N}$, $b \geq 0$ и $\beta > 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{2\pi n}{\lambda_p}, \;\; n, \; p \in \mathbb{N}, \tag{38}$$

или

$$\alpha = \frac{2\pi m}{\lambda_p} - \frac{2\xi_p}{\lambda_p}, \;\; m \in \mathbb{N}, \;\; \xi_p = \arcsin \frac{1 - e^{-\lambda_p^2 \beta}}{\sqrt{\lambda_p^2 + \left(1 - e^{-\lambda_p^2 \beta}\right)^2}}. \tag{39}$$

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи* 2.1, *т.е. задачи* (22) – (28), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

Поскольку выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ может обратиться в нуль при указанных выше значениях (38) и (39) параметра α, то вначале ответим на вопрос при каких α, β выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ при достаточно больших k отделено от нуля. Надо отметить, что при $b = 0$ выражение (38) принимает вид $\alpha = 2n/k$. Поэтому когда α принимает рациональные значения $\Delta_{\alpha\beta 0}(k) = 0$. Следовательно, для таких α решение задачи 2.1 вообще в виде ряда может не существовать.

Лемма 2.1. *Если* $\alpha \in M = \{\alpha \mid \alpha = \sqrt{d} + p, \; p \in \mathbb{Z}, \; \sqrt{d} > -p, \; d = 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, *то существует положительная постоянная* C_α, *зависящая от* α *такая, что при* $b = 0$ *и всех* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\left| \Delta_{\alpha\beta 0}(k) \right| > \frac{C_\alpha}{k}.$$

Отметим, что каждое иррациональное число α единственным образом разлагается в бесконечную цепную дробь $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, при этом целое число a_0 и натуральные числа $a_1, a_2, ...$ называются элементами числа α. Как известно[5], что элементы всякой квадратической иррациональности ограничены.

Лемма 2.2. *Пусть* α_1 *– положительное иррациональное число с неограниченными элементами,* $b = 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует бесконечное множество натуральных чисел* k *таких, что*

$$|\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| < \frac{\varepsilon C_3}{k}, \tag{40}$$

[5]Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.:Наука, 1978. – 112 с.

где C_3 – положительное число.

Из доказанной оценки (40) следует, что для таких $\alpha_1 > 0$, выражение $\Delta_{\alpha\beta 0}(k)$, которое является знаменателем отношений (32) – (34), может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому в этом случае решение в виде суммы рядов может не существовать.

Лемма 2.3. *Если α_1 – положительное рациональное число, b – положительное действительное число, то при любом $k \in \mathbb{N}$ и $k > K_{\alpha b} = (pb^2 + q\pi)/\pi^2$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k)| \geq \frac{C_{\alpha\beta b}}{k},$$

где $C_{\alpha\beta b}$ – положительная постоянная зависящая от α, β и b.

Таким образом из лемм 2.1 и 2.3 следует, что существуют положительные константы K_0 (здесь и далее $K_0 \in \mathbb{N}$) и C_0, вообще говоря, зависящие от α, β, b, такие что при $k > K_0$, $k \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k)| > \frac{C_0}{k} > 0. \tag{41}$$

Если при указанных α, β и b выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ при некоторых $k = l_1, ..., l_m$, где $1 \leq l_1 < ... < l_m \leq K_0$; l_n, $n = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, то задача (22) – (28) разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)\sin\pi kx dx = 0, \quad \int\limits_0^1 \psi(x)\sin\pi kx dx = 0, \quad \int\limits_0^1 g(x)\sin\pi kx dx = 0 \tag{42}$$

при $k = l_1, ..., l_m$, и решение в этом случае определяется рядами

$$u(x,t) = \left(\sum_{k=1}^{l_1-1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2-1} + ... + \sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right) u_k(t)\sin\pi kx + \sum_p A_p u_p(x,t), \tag{43}$$

$$f_i(x) = \left(\sum_{k=1}^{l_1-1} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2-1} + ... + \sum_{k=l_m+1}^{\infty}\right) f_{ik}\sin\pi kx + \sum_p A_p f_{ip}(x), \tag{44}$$

где $i = 1, 2$, в суммах $\sum\limits_p$ индекс p принимает значения $l_1, ..., l_m$, $A_p \neq 0$ – произвольная постоянная, а выражения f_{ik}, $u_k(t)$, $u_p(x,t)$ и $f_{ip}(x)$ определяются соответственно по формулам (31) – (33), (36) и (37), конечные суммы выражений (43) и (44) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Теорема 2.2. *Пусть функции* $\varphi(x),\ \psi(x)\in C^5[0,1],\ g(x)\in C^4[0,1]$ $\varphi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(1)=\psi^{(i)}(1)=0,\ g^{(j)}(0)=g^{(j)}(1)=0,\ i=0,2,4,$ $j=0,2$ *и выполнены условия* (41) *при всех* $k>K_0$. *Тогда если* $\Delta_{\alpha\beta b}(k)\neq 0$ *при* $k=1,2,\dots,K_0$, *то задача* (22) – (28) *однозначно разрешима и это решение определяется рядами* (29) *и* (30); *если* $\Delta_{\alpha\beta b}(k)=0$ *при некоторых* $k=l_1,...,l_m\leq K_0$, *то задача* (22) – (28) *разрешима тогда, когда выполнены условия ортогональности* (42), *и решение определяется рядами* (43), (44).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2, *тогда для решения* (29), (30) *задачи* 2.1 *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2}\leq M_{01}\left(\|\varphi\|_{W_2^1}+\|\psi\|_{W_2^1}+\|g\|_{W_2^0}\right),\ t\geq 0,$$

$$\|u(x,t)\|_{L_2}\leq M_{02}\left(\|\varphi\|_{W_2^2}+\|\psi\|_{W_2^2}+\|g\|_{W_2^1}\right),\ t\leq 0,$$

$$\|f_1(x)\|_{L_2}\leq M_{03}(\|\varphi\|_{W_2^2}+\|\psi\|_{W_2^0}+\|g\|_{W_2^0}),$$

$$\|f_2(x)\|_{L_2}\leq M_{04}(\|\varphi\|_{W_2^4}+\|\psi\|_{W_2^4}+\|g\|_{W_2^3}),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_+)}\leq M_{05}(\|\varphi\|_{W_2^2}+\|\psi\|_{W_2^2}+\|g\|_{W_2^0}),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_-)}\leq M_{06}(\|\varphi\|_{W_2^3}+\|\psi\|_{W_2^3}+\|g\|_{W_2^2}),$$

$$\|f_1(x)\|_{C[0,1]}\leq M_{07}(\|\varphi\|_{W_2^3}+\|\psi\|_{W_2^1}+\|g\|_{W_2^0}),$$

$$\|f_2(x)\|_{C[0,1]}\leq M_{08}(\|\varphi\|_{W_2^5}+\|\psi\|_{W_2^5}+\|g\|_{W_2^4}),$$

где постоянные $M_{0i},\ i=\overline{1,8}$, не зависят от функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

В случае задач 2.2 и 2.3 получены аналогичные результаты, т.е. установлены критерии единственности решения. Сами решения построены в виде сумм рядов и доказаны теоремы об устойчивости решения.

Публикации по теме диссертации

[1] *Сафин, Э.М.* Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, Э.М. Сафин // ДАН. – 2009. – Т. 429. – № 4. – С. 451 – 454.

[2] *Сафин, Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, Э.М. Сафин // Известия вузов. Математика. – 2010. – №4 (546). – С. 55 - 62.

[3] *Сафин, Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / К.Б. Сабитов, Э.М. Сафин // Матем. заметки. – 2010. – Т.87. – Вып. 6. – С. 907 – 918.

[4] *Сафин, Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного типа в прямоугольной области со смешанными граничными условиями / Э.М. Сафин // Труды Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы посвященной юбилеям академиков РАН Ильина В.А. и Моисеева Е.И. Уфа: Гилем. – 2008. – С. 168 – 173.

[5] *Сафин, Э.М.* Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / Э.М. Сафин // Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". – Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН. – 2008. – С. 237 – 239.

[6] *Сафин, Э.М.* Об одной обратной задаче для уравнения смешанного типа / Э.М. Сафин // Материалы Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений посвященной 70-летию академика В.А. Садовничего. М.: "Университетская книга". – 2009. – С. 204 – 205.

[7] *Сафин, Э.М.* Обратные задачи для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / Э.М. Сафин // Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". – Нальчик - Эльбрус: НИИ ПМА КБНЦ РАН. – 2009. – С. 302 – 304.

[8] *Сафин, Э.М.* Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа / Э.М. Сафин // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". – Казань: КГУ, 2009. – Т.38. – С. 247 – 249.

[9] *Сафин, Э.М.* Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа с граничными условиями третьего рода / Э.М. Сафин // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук

РБ. Серия "Физико-математические и технические науки". – Вып. 6. – 2009. – С. 118 – 126.

[10] *Сафин, Э.М.* Обратные задачи для уравнения параболо-гиперболического типа / Э.М. Сафин // Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". – Нальчик - Хабез: НИИ ПМА КБНЦ РАН. – 2010. – С. 85 – 87.

[11] *Сафин, Э.М.* Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа со смешанными граничными условиями / Э.М. Сафин // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы Девятой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2010". – Казань: КГУ, 2010. –Т.40. – С. 292 – 296.