

На правах рукописи

Румянцева Алла Александровна

**Асимптотика  $\delta$ -субгармонических функций и их  
ассоциированных мер. Применение в вопросах  
полноты систем экспонент**

**01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный  
анализ**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

Уфа – 2010

Работа выполнена на кафедре программирования и экономической информатики ГОУ ВПО „Башкирский государственный университет“

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Юлмухаметов Ринад Салаватович**

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Гайсин Ахтяр Магазович**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент  
**Исаев Константин Петрович**

**Ведущая организация:** ГОУ ВПО „Сыктывкарский  
государственный университет“

Защита состоится 21 января 2011 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 в Учреждении российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН по адресу: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН.

Автореферат разослан \_\_\_\_ декабря 2010 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат физ.-мат. наук

С.В. Попенов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию связи между асимптотическим поведением разности двух субгармонических функций и асимптотическим поведением разности их ассоциированных мер, а также применению полученных результатов к вопросам полноты систем экспонент. Разность двух субгармонических функций будем называть  $\delta$ -субгармонической функцией.

Частным случаем задачи о связи между асимптотикой в бесконечности разности двух субгармонических функций и асимптотическим поведением разности их ассоциированных мер являются задачи построения целых функций с заданным поведением в бесконечности, а также задача об изменении поведения целой функции при сдвигах ее нулей. В диссертации используется представление Рисса для субгармонических функций: если  $u$  — функция, субгармоническая в области  $G$ , то в  $G$  существует неотрицательная борелевская мера  $\mu$  такая, что в любой ограниченной области  $G_1$ ,  $\overline{G_1} \subset G$ , имеет место представление Рисса

$$u(z) = \int_{G_1} \ln |z - w| d\mu(w) + h(z)$$

с функцией  $h$ , гармонической в  $G_1$ . Мера  $\mu$  называется мерой, ассоциированной с  $u$  по Риссу (ассоциированной мерой). В частности, субгармоническими являются функции вида  $\ln |f|$ , где  $f$  — аналитическая функция.

Исследования по указанным темам проводили В.С. Азарин, А.Ф. Гришин, И.Ф. Красичков-Терновский, С.Ю. Фаворов, Б.Н. Хабибуллин, Р.С. Юлмухаметов, D. Drasin, J. Korevaar, Yu. Lyubarskii, Ortega-Cerda, K. Seip, M.L. Sodin и другие.

Задача о полноте систем экспонент в различных функциональных пространствах является классической.

С историей и современным состоянием дел в задаче о полноте систем экспонент в пространствах функций, определенных и аналитических в плоской области, можно ознакомиться в монографиях Б.Я. Левина, М.А. Евграфова, И.И. Ибрагимова, А.Ф. Леонтьева.

Исследования полноты систем экспонент в различных пространствах функций, определенных на интервале вещественной оси, достаточно полно освещены в ряде обзоров и монографий. Перечислим лишь некоторых авторов: Н. Винер, Р. Пэли, Н. Левинсон, М.М. Джрбашян, Л. Шварц, Р.М. Янг, П. Кусис, В.П. Хавин, Б. Ерикке, А.М. Седлецкий, Б.Н. Хабибуллин.

### **Цель работы.**

Исследовать асимптотическое поведение разности двух субгармонических функций и асимптотическое поведение разности их ассоциированных мер. Исследовать связь между ними. Применить полученные результаты к вопросам полноты систем экспонент.

### **Методика исследования.**

В работе используются методы функционального анализа и аналитические методы из теории целых и субгармонических функций, свойства выпуклых функций и приемы выпуклого анализа.

### **Содержание основных результатов и их новизна.**

Все основные результаты диссертации являются новыми и соответствуют проблематике данного раздела анализа. Они состоят в следующем:

1. Введено новое понятие множеств класса  $C_\gamma$ .
2. Доказаны различные свойства множеств класса  $C_\gamma$ .
3. Доказаны теоремы о связи роста  $\delta$ -субгармонической функции и ассоциированных мер вне исключительных множеств степенной малости.
4. Доказана теорема о сведении (редукции) проблемы полноты систем экспонент в пространстве  $H(D)$  к соответствующей задаче в круге.
5. Доказаны новые теоремы о неполноте систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси.

### **Теоретическая и практическая ценность.**

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и дополняют исследования задач об асимптотике разности субгармонических функций и задач о полноте систем экспонент В.С. Азарина, Р.С. Юлмухаметова, А.М. Седлецкого. Разработанные методы могут быть использованы для дальнейших исследований в данной области. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях, проводимых в Институте математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирском государственном университете, Санкт-Петербургском отделении Математического института РАН, Ростовском государственном университете, Казанском государственном университете, Сыктывкарском государственном университете.

### Апробация работы.

Результаты работы докладывались на семинарах Института математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН под руководством член-корреспондента В.В. Напалкова; на семинарах в Башкирском государственном университете под руководством доктора физико-математических наук, профессора Р.С. Юлмухаметова; на Международной конференции "Нелинейные уравнения и комплексный анализ" (2008 г.); на Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего в Московском государственном университете (2009 г.); на Международной конференции "Нелинейные уравнения и комплексный анализ" (2009 г.); на Международной конференции "Sixth Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis" в университете г. Севилья (Испания, 2009 г.); на Международной конференции "Ломоносов-2010" в Московском государственном университете (2010 г.); на 19-ой летней конференции по математическому анализу в Международном математическом институте им. Л. Эйлера (2010 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [2], [3]. Работы [1], [2], [3] входят в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК РФ.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертации рассматривается задача о связи между асимптотическим поведением  $\delta$ -субгармонической функции и асимптотическим поведением разности ассоциированных мер.

В диссертации введено новое понятие — множества класса  $C_\gamma$ : для заданного числа  $\gamma \in \mathbb{R}$  множество  $A$  на плоскости называется множеством класса  $C_\gamma$ , если существует покрытие множества  $A$  кругами  $B(z_j, r_j) = \{z : |z_j - z| < r_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , так, что выполняется условие

$$\sum_{R/2 < |z_j| < 2R} r_j = o(R^{\gamma+1}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

Доказаны различные свойства множеств класса  $C_\gamma$ :

**1.** *Множество  $A$  принадлежит классу  $C_\gamma$  тогда и только тогда, когда существует покрытие этого множества кругами  $B(z_j, r_j)$  так, что выполняется условие*

1. Если  $\gamma > -1$ , то

$$\sum_{|z_j| \leq R} r_j = o(R^{\gamma+1}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

2. Если  $\gamma < -1$ , то

$$\sum_{|z_j| \geq R} r_j = o(R^{\gamma+1}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

Следующее свойство является удобным при использовании множеств класса  $C_\gamma$ .

**2.** Пусть  $\gamma \leq 0$  и  $A \in C_\gamma$ . Тогда для любого положительного числа  $q > 0$  (если  $\gamma = 0$ , то  $q < \frac{1}{8}$ ) и для всех  $z \in \mathbb{C}$  с достаточно большим  $|z|$  найдется  $t \in (q; 2q)$  такое, что окружность  $C(z, t) = \{w : |w - z| = t|z|^{\gamma+1}\}$  не пересекается с множеством  $A$ .

Также установлена связь между классами  $C_\gamma$  и их пересечением  $\mathcal{C} = \bigcap_{\gamma} C_\gamma$ .

**3.** Пусть  $u(z)$  — некоторая вещественнозначная функция на плоскости,  $v(t)$  — неотрицательная функция на  $(0, +\infty)$ . Тогда если для любого  $\gamma \in \mathbb{R}$  найдутся множество  $A_\gamma \in C_\gamma$  и постоянная  $M_\gamma$  такие, что выполняется соотношение

$$u(z) \leq M_\gamma v(|z|), \quad z \notin A_\gamma,$$

то для любой положительной монотонно возрастающей до  $+\infty$  функции  $\chi(t)$  на  $(0, +\infty)$  найдется множество  $A \in \mathcal{C}$  так, что выполняется соотношение

$$u(z) \leq v(|z|)\chi(|z|), \quad z \notin A.$$

В начале первой главы систематизированы свойства функций, используемых в диссертации для оценок.

Через  $k(t)$  обозначаются функции на  $(0, +\infty)$ , используемые для характеристики роста  $\delta$ -субгармонических функций и ассоциированных мер. Общие требования к этим функциям:

K1) функция  $k(t) > 0$  и монотонно неубывающая и

$$\ln t = O(k(t)).$$

K2) для некоторой константы  $K$  и для всех  $t > 0$  верно

$$k(et) \leq Kk(t).$$

Для функции  $k(t)$ , удовлетворяющей условиям K1), K2), выполняются также следующие условия:

1. Для всех  $t \geq e$  имеет место неравенство

$$k(t) \leq k(e)t^{\ln K},$$

в частности,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln k(t)}{\ln t} = \sigma \leq \ln K.$$

2. Если  $q = [\sigma]$  — целая часть  $\sigma$ , то:

а) функция

$$k_q(t) = t^q \int_1^t \frac{k(\tau) d\tau}{\tau^{q+1}}$$

удовлетворяет условию K1) и при  $t \geq e$  — условию K2):

$$k_q(et) \leq (K + e^q)k_q(t);$$

б) функция

$$k_{00}(t) = \int_1^t \left( \int_1^r \frac{k(\tau) d\tau}{\tau} \right) \frac{dr}{r}$$

удовлетворяет условию K1) и при  $t \geq e^2$  — условию K2):

$$k_{00}(et) \leq (K + 2)k_{00}(t);$$

в) если интеграл сходится, то функция

$$\bar{k}_q(t) = t^{q+1} \int_t^\infty \frac{k(\tau) d\tau}{\tau^{q+2}}$$

при  $t \geq 0$  обладает свойствами K1), K2):

$$\bar{k}_q(et) \leq e^{q+1} \bar{k}_q(t);$$

г) если функцию  $k_{00}(t)$  продолжить на отрезок  $[0, 1]$  нулем, то функция  $k_{00}(|z|)$  субгармонична на плоскости, причем

$$\Delta k_{00}(|z|) = k(|z|)|z|^{-2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Для борелевской меры  $\mu$  (не обязательно положительной) на плоскости через  $\mu(z, t)$  будем обозначать  $\mu$ -меру круга  $B(z, t) = \{w : |w - z| < t\}$  и положим

$$M(\mu)(z) = \max_{R \leq |z|/2} \left| \int_0^R \frac{\mu(z, t)}{t} dt \right|.$$

Функция  $M(\mu)(z)$  в диссертации используется для характеристики асимптотического поведения меры  $\mu$ .

**Определение.** Будем говорить, что некоторое асимптотическое соотношение выполняется вне множеств степенной малости, если для любого  $\gamma$  найдется множество  $A_\gamma \in C_\gamma$ , вне которого это соотношение выполняется.

Основным результатом первой главы диссертации являются следующие две теоремы.

**Теорема 1.**

*Пусть  $u_1, u_2$  — субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный порядок роста,  $\mu_1, \mu_2$  — ассоциированные по Риссу меры этих функций и функция  $k(t)$  удовлетворяет условиям  $K1), K2)$ . Тогда если соотношение*

$$|u_1(z) - u_2(z)| = O(k(|z|)), \quad |z| \longrightarrow \infty,$$

*выполняется вне множеств степенной малости, то соотношение*

$$M(\mu_1 - \mu_2)(z) = O(k(|z|)), \quad |z| \longrightarrow \infty,$$

*тоже выполняется вне множеств степенной малости.*

**Теорема 2.**

*Пусть*

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln k(t)}{\ln t}$$

*и  $q = [\sigma]$  — целая часть  $\sigma$ . Если соотношение*

$$M(\mu_1 - \mu_2)(z) = O(k(|z|)), \quad |z| \longrightarrow \infty, \tag{1}$$

*выполняется вне множеств степенной малости, то существует гармоническая на всей плоскости функция  $H(z)$  так, что соотношение*

$$\begin{aligned}
|u_1(z) - u_2(z) + H(z)| &= O\left(\int_1^{|z|} \left(\int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right) \frac{dt}{t} + \right. \\
&+ \frac{1}{q+1} \int_1^{|z|} \frac{k(\tau)d\tau}{\tau} + \chi(q)|z|^q \int_1^{|z|} \frac{k(t)dt}{t^{q+1}} + \\
&\left. + \frac{1}{q+1}|z|^{q+1} \int_{|z|}^{\infty} \frac{k(t)dt}{t^{q+2}} + k(1) \ln |z|\right), \quad (2)
\end{aligned}$$

где  $\chi(0) = 0$  и  $\chi(q) = \frac{1}{q}$  при  $q > 0$ , выполняется вне множеств степенной малости.

Доказательство первой теоремы заметно проще доказательства второй теоремы и по существу сводится к следующей лемме:

**Лемма 1.2.** Пусть  $u$  — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста, то есть для некоторых  $\delta, \rho$

$$u(z) \leq \delta|z|^\rho, \quad |z| > 1,$$

и  $A$  — открытое множество на плоскости. Тогда существует постоянная  $C$ , не зависящая от множества  $A$ , такая, что для всех  $w \in \mathbb{C}$ ,  $|w| > 1$ , и  $R \in \left(0, \frac{|w|}{2}\right)$  выполняется оценка

$$\int_{C(w,R) \cap A} |u(\zeta)| ds(\zeta) \leq C|w|^\rho s(C(w,R) \cap A) \ln \frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R) \cap A)},$$

где  $ds(\zeta)$  — элемент длины дуги окружности  $C(w,R) = \{z : |w - z| = R\}$ .

Из этой леммы следует, что для множеств  $A$  степенной малости интегралы

$$\int_{C(w,R) \cap A} |u(\zeta)| ds(\zeta)$$

также имеют малый рост и для доказательства теоремы 1 остается воспользоваться формулой Привалова:

Пусть  $u$  — субгармоническая функция в области  $G$ ,  $\mu$  — ассоциированная мера. Если в точке  $z$   $u(z) > -\infty$ , то

$$\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\phi}) d\phi = u(z) + \int_0^r \frac{d\mu(t)}{t}.$$

Здесь  $\mu(t)$  обозначает  $\mu$ -меру круга  $B(z, t)$ .

Доказательство второй теоремы сначала проводится при более жестком условии на ассоциированные меры: мы предполагаем, что соотношение (1) выполняется всюду. При этом жестком условии выполняется утверждение.

**Лемма 1.7.** Пусть  $u_1, u_2$  — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры  $\mu_1, \mu_2$  удовлетворяют условию (1) всюду. Положим  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ ,  $u = u_1 - u_2$  и

$$\tilde{u}(\zeta) = \int u\left(\zeta + \frac{1}{2}\zeta z\right)\alpha(z)dm(z), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Тогда имеют место оценки

$$|\tilde{u}(\zeta) - u(\zeta)| \leq k(|\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

$$|\Delta\tilde{u}(\zeta)| \leq Mk(|\zeta|)|\zeta|^{-2}, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

где  $M = 4K\alpha_1(2 + \pi\alpha_0)$  и  $\alpha_0, \alpha_1$  — некоторые постоянные, определяемые функцией  $\alpha(x)$ .

Заключительным этапом доказательства теоремы 2 при жестком условии на ассоциированные меры является следующая лемма.

**Лемма 1.8.** Пусть функция  $k(t)$  удовлетворяет условиям  $K1), K2)$  и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln k(t)}{\ln t} = \sigma.$$

Положим  $q = [\sigma]$  и пусть

$$G_q(z) = (1 - z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^q}{q}}$$

— первичный множитель, а непрерывная функция  $a(w)$  удовлетворяет оценке

$$|a(w)| \leq Ak(|z|)(|z|^2 + 1)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда функция

$$u(z) = \int_{|w| < 1} \ln |z - w| a(w) dm(w) + \int_{|w| \geq 1} \ln G_q\left(\frac{z}{w}\right) a(w) dm(w)$$

при  $|z| \geq 2$  удовлетворяет оценке

$$|u(z)| \leq 2\pi A' 4^{q+2}(q+2) \left( k_{00}(|z|) + \frac{k_0(|z|)}{q+1} + \chi(q)k_q(|z|) + \frac{\bar{k}_q(|z|)}{q+1} \right) + A\pi k(1) \ln |z|.$$

Эта лемма доказывается на основе известной теоремы о множителях Вейерштрасса.

**Теорема В.** *Предположим, что  $\mu$  — неотрицательная борелевская мера в  $\mathbb{C}$ , и пусть  $\mu(t)$  — мера круга  $B(0, t)$ ,  $\mu(0) = 0$  и функция*

$$N(r) = \int_0^r \frac{\mu(t)}{t} dt$$

*принадлежит классу сходимости порядка не выше  $q + 1$ , то есть*

$$\int^\infty \frac{N(r) dr}{r^{q+2}} < \infty.$$

*Тогда интеграл*

$$v(z) = \int_{|w| \geq 1} \ln G_q\left(\frac{z}{w}\right) d\mu(w).$$

*сходится абсолютно в окрестности  $\infty$  и равномерно для  $|z| \leq R$  при любом фиксированном положительном  $R$ . Кроме того, если  $|z| \geq 1$ , то*

$$v(z) \leq 4^{q+2}(q+2) \left( q|z|^q \int_1^{|z|} \frac{N(r) dr}{r^{q+1}} + (q+1)|z|^{q+1} \int_{|z|}^\infty \frac{N(r) dr}{r^{q+2}} \right).$$

Доказательство теоремы в сформулированном виде теперь вытекает из следующих двух лемм.

**Лемма 1.9.** *Пусть ассоциированные меры  $\mu_1, \mu_2$  субгармонических функций  $u_1, u_2$  удовлетворяют условию (1) и функции  $\tilde{u}_j$ ,  $j = 1, 2$  определены как в лемме 1.7:*

$$\tilde{u}_j(\zeta) = \int u_j\left(\zeta + \frac{1}{2}\zeta z\right) \alpha(z) dm(z), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

*Тогда вне множеств степенной малости выполняется соотношение*

$$|\tilde{u}(z) - u(z)| = O(k(|z|)),$$

*где  $\tilde{u} = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$ ,  $u = u_1 - u_2$ . Кроме того, если функции  $u_j$  имеют конечный тип при порядке  $\rho$ , то*

$$|\text{grad } \tilde{u}(z)| \leq M(\alpha)|z|^{\rho-1}, \quad |z| \geq 1.$$

**Лемма 1.10.** *Ассоциированные меры  $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$  субгармонических функций  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$  удовлетворяют условию (1) всюду в комплексной плоскости.*

Вторая глава диссертации посвящена применению результатов первой главы к вопросам полноты системы экспонент в различных линейных топологических пространствах.

Пусть  $X$  — некоторое линейное топологическое пространство. Мы имеем в виду следующие случаи:

а) пространство  $X$  является подпространством пространства аналитических функций  $H(G)$  на некоторой области  $G$  комплексной плоскости;

б) пространство  $X$  является подпространством пространства локально интегрируемых функций на интервале вещественной оси.

Задача о полноте системы экспонент  $e^{\lambda_k z}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , в пространстве  $X$  состоит в выяснении условий на последовательность показателей  $\lambda_k$ , при которых система  $e^{\lambda_k z}$  полна в пространстве  $X$ . Поскольку рассматривать такого рода задачу имеет смысл лишь в том случае, когда система всех экспонент  $e^{\lambda z}$ , лежащих в  $X$  полна в  $X$ , то естественно для решения использовать преобразование Фурье-Лапласа.

Если  $S$  — линейный непрерывный функционал на пространстве  $X$ , то преобразованием Фурье-Лапласа  $\widehat{S}$  этого функционала называется функция

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}).$$

Если считать, что в пространстве  $X$  лежат все экспоненты, то преобразование Фурье-Лапласа оказывается целой функцией. Тем самым пространство

$$\widehat{X} = \{\widehat{S}, S \in X^*\}$$

оказывается подпространством пространства целых функций  $H(\mathbb{C})$ . В результате с помощью описанной конструкции вопрос о полноте системы экспонент  $e^{\lambda_k z}$  в пространстве  $X$  сводится к вопросу о существовании ненулевой целой функции в пространстве  $\widehat{X}$ , обращающейся в нуль в точках  $\lambda_k$ .

Обычно пространство  $\widehat{X}$  выделяется посредством различных ограничений на рост функций. Поэтому вопрос о полноте системы экспонент сводится к вопросу существования целой функции с нулями в точках  $\lambda_k$  и с некоторыми ограничениями на рост. Так, например, задача о полноте системы экспонент в пространстве  $H(D)$ , где  $D$  — ограниченная выпуклая область на плоскости, эквивалентна задаче (не)существования ненулевой целой функции, обращающейся в нуль в показателях системы и имеющей индикатрису роста строго меньше опорной функции об-

ласти  $D$ . Более точно, система  $e^{\lambda_k z}$  полна в пространстве  $H(D)$  лишь тогда, когда не существует ненулевой целой функции  $L(\lambda)$ , которая бы обращалась в нуль в точках  $\lambda_k$  и удовлетворяла условию

$$|L(\lambda)| \leq C_L e^{H_D(\lambda) - \varepsilon_L |\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

здесь

$$H_D(\lambda) = \max_{z \in D} \operatorname{Re} \lambda z$$

— опорная функция области  $D$ ,  $\varepsilon_L$  — некоторая положительная константа. Классические теоремы теории целых функций о связи роста функции и распределения ее корней, например, теорема Линделефа, имеют дело с радиальными характеристиками роста. Переход к радиальным условиям мы обеспечим с помощью следующей теоремы Юлмухаметова Р.С.:

**Теорема А.** Пусть  $u$  субгармонична на всей плоскости и имеет конечный порядок роста  $\rho$ . Тогда существует целая функция  $L$  такая, что для любого  $\gamma \geq \rho$

$$|u(z) - \ln |L(z)|| \leq c_\gamma \ln |z|, \quad z \notin E_\gamma,$$

причем исключительное множество  $E_\gamma$  может быть покрыто кругами  $\{z : |z - z_j| < r_j\}$  так, что

$$\sum_{|z_j| > R} r_j = o(R^{\rho - \gamma}), \quad R \rightarrow \infty.$$

Исходя из этого факта, в первом параграфе второй главы доказывается теорема о сведении (редукции) проблемы полноты систем экспонент в пространстве  $H(D)$  к соответствующей задаче в круге.

Пусть  $D$  — ограниченная выпуклая область, ее опорная функция

$$h(\varphi) = \max_{z \in D} \operatorname{Re} e^{i\varphi} z = r^{-1} H_D(r e^{i\varphi})$$

дважды дифференцируема и

$$M = \max_{\varphi \in [0; 2\pi]} (h''(\varphi) + h(\varphi)) < \infty.$$

Тогда функция

$$u(r e^{i\varphi}) = MR - h(\varphi)r$$

субгармонична на всей плоскости. По теореме А существует целая функция  $L$ , которая вне множества степенной малости удовлетворяет соотношению

$$|u(\lambda) - \ln |L(\lambda)|| = O(\ln |\lambda|), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Через  $\Lambda_0$  обозначим множество нулей функции  $L$ . Систему экспонент с множеством показателей  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  обозначим через  $\text{exp } \Lambda$ .

**Теорема 2.1.** Система экспонент  $\text{exp } \Lambda$  не полна в пространстве  $H(D)$  тогда и только тогда, когда существует ненулевая целая функция  $G(z)$ , которая обращается в нуль в точках  $\lambda \in \Lambda \cup \Lambda_0$  и для некоторого  $\varepsilon > 0$  удовлетворяет условию

$$|G(re^{i\varphi})| \leq e^{(M-\varepsilon)r},$$

т.е.  $G(z)$  — целая функция экспоненциального типа меньшего  $M$ .

Во втором параграфе второй главы задача о полноте систем экспонент изучается в весовых пространствах на вещественной оси.

Пусть  $a > 0$ ,  $\alpha \in (1; 2]$  и  $L_2(\mathbb{R}, a|t|^\alpha)$  — гильбертово пространство локально-интегрируемых функций  $f$  на вещественной оси с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2a|t|^\alpha} dt.$$

Для реализации описанной выше схемы использования преобразования Фурье-Лапласа применяется следующая теорема:

**Теорема Е'.** Целые функции  $F$ , удовлетворяющие условиям

$$|F(x + iy)| \leq C_F e^{b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad x + iy \in \mathbb{C},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)|^2 e^{-2b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta}{2}-1} dx dy < \infty$$

и только такие функции допускают представление

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t - 2a|t|^\alpha} \bar{g}(t) dt$$

с функцией  $g$ , удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 e^{-2a|t|^\alpha} dt < \infty.$$

Из этой теоремы по теореме Банаха немедленно получаем следующий результат.

**Теорема 2.2.** Система экспонент  $e^{\lambda_k x}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , полна в пространстве  $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$  тогда и только тогда, когда не существует ненулевой целой функции  $F(\lambda)$ , которая обращается в нуль в точках  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и удовлетворяет условиям предыдущей теоремы.

С помощью несложных выкладок интегральные условия можно заменить на равномерные условия на рост функций.

**Теорема 2.3.** 1. Если система экспонент  $e^{\lambda_k x}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , не полна в пространстве  $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$ , где  $\alpha \in (1; 2]$ , то существует ненулевая целая функция  $F(\lambda)$ , которая обращается в нуль в точках  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и удовлетворяет условию

$$|F(x + iy)| \leq C_F e^{b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad x + iy \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

2. Если существует ненулевая целая функция  $F(\lambda)$ , которая обращается в нуль в точках  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и еще в  $n = [\beta]$  точках  $z_1, \dots, z_n$  (здесь  $[\beta]$  — целая часть  $\beta$ ) и удовлетворяет оценке (3), то система экспонент  $e^{\lambda_k x}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  не полна в пространстве  $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$ .

И в заключение обоснован переход к радиальным равномерным условиям на рост функций.

**Теорема 2.4.** 1. Если система экспонент  $\exp \Lambda$  не полна в пространстве  $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$ , где  $\alpha \in (1; 2]$ , то существует ненулевая целая функция  $G(\lambda)$ , которая обращается в нуль в точках  $\lambda \in \Lambda \cup \Lambda_0$  и удовлетворяет условию

$$|G(z)| \leq C e^{\frac{b}{\alpha}|z|^\beta} |z|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

2. Если существует ненулевая целая функция  $G(\lambda)$ , которая обращается в нуль в точках  $\lambda \in \Lambda_0 \cup \Lambda$ , и еще в двух "дополнительных" наборах точек  $z_1, \dots, z_n$ ,  $n = [\beta]$ ,  $\zeta_1, \dots, \zeta_N$ ,  $N = [\beta] + [C]$  (здесь  $[\beta]$  — целая часть  $\beta$  и  $C$  — некоторая константа), а также удовлетворяет оценке (4), то система экспонент  $\exp \Lambda$  не полна в пространстве  $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$ .

Автор выражает благодарность своему **научному руководителю Р.С. Юлмухаметову** за неоценимую помощь в работе.

## Работы автора по теме диссертации

- [1] Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси* // ДАН, 2009. Т. 429, № 2, С. 155–158.
- [2] Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси* // Уфимский мат. журнал, 2010, Т. 2, № 1, С. 97–109.
- [3] Румянцева А.А. *Асимптотика  $\delta$ -субгармонических функций и их ассоциированных мер* // Уфимский мат. журнал, 2010, Т. 2, № 3, С. 83–107.
- [4] Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Об условиях полноты систем экспонент в весовом гильбертовом пространстве на вещественной оси* // Труды института математики с ВЦ УНЦ РАН, 2008, вып. 1, С. 173–184.
- [5] Румянцева А.А. *О полноте систем экспонент в пространстве функций аналитических в выпуклой области* // Материалы международной конференции "Современные проблемы математики механики и их приложений", посвященной 70-летию ректора МГУ Садовниченко В.А., 2009, С. 92.



