На правах рукописи

Путинцева Анастасия Андреевна

Целые функции типа синуса. Применение к исследованию систем экспонент в весовых гильбертовых пространствах

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Уфа – 2011

Работа выполнена на кафедре программирования и экономической информатики ГОУ ВПО „Башкирский государственный университет“

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Юлмухаметов Ринад Салаватович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Кривошеев Александр Сергеевич**
	кандидат физико-математических наук, **Ким Виталий Эдуардович**
Ведущая организация:	ГОУ ВПО „Сыктывкарский государственный университет“

Защита состоится 13 мая 2011 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 в Учреждении российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН по адресу: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН.

Автореферат разослан ____ апреля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук С.В. Попенов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию систем экспонент в пространствах $L_2(I,h)$, состоящих из функций, определенных и локально интегрируемых на интервале I, для которых конечна норма

$$||f||^2 := \int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt.$$

Весовая функция h предполагается выпуклой на интервале I.

Рассматриваются такие свойства систем экспонент как полнота, минимальность, безусловная базисность и способы суммирования рядов по этим системам. В проведенных исследованиях по сложившейся традиции систематически используются целые функции с заданным асимптотическим поведением, в данной диссертации — целые функции типа синуса.

В теории функций комплексного переменного важную роль играют субгармонические функции. Систематическое изучение субгармонических функций началось с основополагающих работ Ф. Рисса, в которых доказан ряд свойств субгармонических функций и приведены важные примеры таких функций. В частности, субгармоническими в области $D \subseteq \mathbb{C}$ являются функции вида $\ln|f(z)|$, где f — аналитическая функция в области D.

К вопросу о том, насколько произвольная субгармоническая функция может отличаться от функций вида $\ln|f|$, в сущности сводятся многие задачи комплексного анализа (В.С. Азарин, Н.У. Аракелян, М.А. Евграфов, А.Ф. Леонтьев, С.Ю. Фаворов, A. Beurling, J. Hadamard, P. Kosis, P. Malliavin, G. Polya).

Пристальное внимание многих математиков привлекли прежде всего безусловные базисы из экспонент в весовых пространствах $L_2(I,w)$. Современным состоянием исследований в этом направлении можно ознакомиться в монографии А.М. Седлецкого[1]. В работе Б.Я. Левина, Ю.И. Любарского[2] было начато изучение безусловных базисов из экспонент в гильбертовых подпространствах пространства $H(D)$ аналитических в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$. Для пространства Смирнова $E_2(D)$ на выпуклом многоугольнике были построены безусловные базисы из экспонент.

---

[1]Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* М.: Физматлит. 2005. 504 с.

[2]Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, №3. С. 658–702.

Ю.И. Любарским была предпринята неудачная попытка построить базисы из экспонент в $E_2(D)$ на выпуклой области с гладкой границей. В диссертациях В.И. Луценко, В.В. Напалкова (мл.), К.П. Исаева доказано, что в пространствах Смирнова и Бергмана на выпуклых областях, содержащих на границе гладкую дугу, безусловных базисов из экспонент не существует. Наконец, в работе К.П. Исаева, Р.С. Юлмухаметова[3] показано, что в пространствах Бергмана на выпуклых областях, на границе которых есть точка с ненулевой кривизной, безусловных базисов из экспонент не существует. В диссертации Р.А. Башмакова этот результат перенесен на весовые пространства на интервалах.

В данной диссертации доказаны некоторые достаточные условия отсутствия безусловных базисов в гильбертовых пространствах общего вида. На основе этих условий доказано отсутствие безусловных базисов из экспонент в пространствах $L_2(I,h)$ из более широкого класса,чем было получено в диссертации Р.А. Башмакова.

Цель работы.

Исследование целых функций типа синуса и систем экспонент, построенных по нулям этих функций. Применение полученных результатов к вопросам существования безусловных базисов в весовых гильбертовых пространствах.

Методика исследования.

В работе используются методы функционального анализа и аналитические методы из теории целых и субгармонических функций, свойства выпуклых функций и методы выпуклого анализа.

Содержание основных результатов и их новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми и соответствуют проблематике данного раздела анализа. Они состоят в следующем:

1. Доказана теорема о допустимой точности асимптотики целой функции типа синуса.

2. Доказаны теоремы о полноте и минимальности систем экспонент, построенных по нулям целой функции типа синуса, в пространстве $L_2(I,h)$.

[3] Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками.* //Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т.71, №6. С. 69–90.

3. Получены достаточные условия отсутствия безусловных базисов из экспонент в гильбертовых пространствах общего вида.

4. Доказана теорема об отсутствии базисов Рисса в пространстве $L_2(I,h)$.

5. Сформулирован метод суммирования рядов из экспонент по нулям целой функции типа синуса в пространстве $L_2(I,h)$.

Теоретическая и практическая ценность.

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и дополняют исследования задач о приближении субгармонических функций и задач о безусловных базисах из экспонент Б.Я. Левина, Ю.И. Любарского, Р.С. Юлмухаметова, А.М. Седлецкого, В.И. Луценко, К.П. Исаева, Р.А. Башмакова. Разработанные методы могут быть использованы для дальнейших исследований в данной области. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях, проводимых в Институте математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирском государственном университете, Санкт-Петербургском отделении Математического института РАН, Ростовском государственном университете, Казанском государственном университете, Сыктывкарском государственном университете и др.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались на семинарах Института математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН под руководством член-корреспондента В.В. Напалкова; на семинарах в Башкирском государственном университете под руководством доктора физико-математических наук, профессора Р.С. Юлмухаметова; на VI молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения - 2007"(Казань, 2007 г.); на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2008 г.); на Международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании", посвященная 100-летию БашГУ (2009 г.); на Международной конференции "Нелинейные уравнения и комплексный анализ" (2008 г., 2010 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1], [5], [7], [8]. Работы [7], [8] входят в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК РФ.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и библиографии. Она изложена на 114 страницах, библиография содержит 60 наименований. Нумерация приведенных теорем и лемм та же, что и в соответствующих разделах диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** содержатся необходимые сведения из истории вопроса и описание основных результатов диссертации.

Первые теоремы о приближении субгармонических функций u функциями вида $\ln|f|$, где f — аналитическая функция, носят асимптотический характер. Например, теорема Полиа утверждает существование целой функции с заданным индикатором, то есть любая однородная субгармоническая функция на плоскости асимптотически приближается логарифмом модуля целой функции. Обобщением этого результата Полиа служит теорема Левина-Пфлюгера о том, что для любой ρ — однородной субгармонической функции u, то есть $u(tz) = t^\rho u(z),\ t \geq 0, z \in \mathbb{C}$, существует целая функция f, которая вне множества E удовлетворяет соотношению

$$|u(z) - \ln|f(z)|| = o(|z|^\rho),\ |z| \longrightarrow \infty,\ z \notin E.$$

При этом исключительное множество E может быть покрыто кругами $\{z : |z - z_j| < r_j\}$ так, что

$$\sum_{|z_j|<R} r_j = o(R),\ R \longrightarrow \infty.$$

Множества, допускающие покрытия кругами с таким свойством, называются C_0 - множествами. В 1969 году В.С. Азарин обобщил теорему Левина-Пфлюгера, заменив условие ρ - однородности на условие

$$u(z) \leq \text{Const.}\ |z|^\rho,\ |z| > 1.$$

В то же время для функций вида $H_D(z) = \max\limits_{\lambda\in\overline{D}} \text{Re}\ \lambda z$, где D — многоугольник или круг, были известны более точные результаты (А.Ф. Леонтьев, Ю.И. Мельник). А именно, существует целая функция f, которая на множестве $\{z : |z - \zeta| > 1,\ f(\zeta) = 0\}$ удовлетворяет соотношению

$$|H_D(z) - \ln|f(z)|| = O(\ln|z|),\ |z| \longrightarrow \infty,$$

На примере функции $u(z) = \frac{1}{2}\ln|z|$ легко убедиться в том, что логарифмическая асимптотика не улучшаема в классе всех субгармонических функций конечного порядка. В самом деле, предположим, что вне некоторого C_0 - множества E целая функция f удовлетворяет условию

$$|\frac{1}{2}\ln|z| - \ln|f(z)|| = o(\ln|z|),\ |z| \longrightarrow \infty,\ z \notin E.$$

По свойствам C_0 - множеств найдется последовательность окружностей $|z| = R_n$, $R_n \longrightarrow +\infty$, лежащая вне множества E. Тогда

$$\ln|f(R_n e^{i\varphi})| \leq (\frac{1}{2} + o(1))\ln R_n,$$

значит, по теореме Лиувилля функция f является постоянной. Тогда исключительное множество E должно содержать окрестность бесконечности и не может быть C_0 - множеством. Аппроксимация с неулучшаемой логарифмической точностью получена Р.С. Юлмухаметовым (1985 г.) в виде следующей теоремы.

Теорема 0.1. *Пусть субгармоническая на плоскости функция $u(z)$ имеет конечный порядок роста, то есть*

$$u(z) \leq Const.\ (|z| + 1)^\rho,\ z \in \mathbb{C}.$$

Тогда существует целая функция f, удовлетворяющая условию: при любом γ найдется исключительное множество E_γ, вне которого выполняется асимптотическое соотношение

$$|u(z) - \ln|f(z)|| = C_\gamma \ln|z|,\ |z| \longrightarrow \infty,\ z \notin E_\gamma,$$

при этом множество E_γ может быть покрыто кругами $B(z_j, r_j)$, так, что

$$\sum_{R \leq |z_j| \leq 2R} r_j = o(R^\gamma),\ R \longrightarrow \infty.$$

В этой теореме, как и в теореме В.С. Азарина, асимптотика разности и размеры исключительных множеств оптимально сбалансированы. В то же время в вопросах представления функций рядами экспонент активно применялись целые функции с заданным поведением в бесконечности. Впервые такие функции были использованы Б.Я. Левиным (1961 г.) в задаче о негармонических рядах Фурье в пространстве $L_2(-\pi; \pi)$. Позднее в работе Б.Я. Левина[4] (1969 г.) они были названы целыми функциями

[4]Левин Б.Я. *Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа.*// Матем. физика и функц. анализ, ФТИНТ АН УССР. 1969. Вып. 1. С. 136–146.

типа синуса. Целая функция типа синуса — это целая функция экспоненциального типа, которая вне некоторой вертикальной полосы $|\operatorname{Re}\ z| < K$ удовлетворяют соотношению

$$0 < c \le |L(z)|e^{-\pi|\operatorname{Re}\ z|} \le C < \infty.$$

В работе Б.Я. Левина, Ю.И. Любарского (1975 г.) в целях применения к разложению в ряды экспонент функций, аналитических в выпуклом многоугольнике D, введен класс целых функций S_D, представляющих собой обобщение целых функций типа синуса. Функция $S(\lambda)$ принадлежит классу S_D, если при некоторых положительных константах c, C, K (зависящих от функции S) вне множества $\{\lambda : \operatorname{Re}\ \lambda e^{-i\theta_j} > 0,\ |\operatorname{Im}\lambda e^{-i\theta_j}| < K\}$, где θ_j — направления внешних нормалей к сторонам многоугольника, выполняется соотношение

$$c < |S(\lambda)|e^{-H(\lambda)} < C.$$

Здесь $H(\lambda) = \max\limits_{z\in\overline{D}} \operatorname{Re}\ \lambda z-$ опорная функция многоугольника D. Позднее Ю.И. Любарским (1986 г.) были сконструированы и применены для исследования рядов экспонент аналоги целых функций типа синуса для выпуклых областей с гладкой границей. Аналогами целых функций типа синуса названы целые функции S экспоненциального типа, обладающие свойствами:

а) все корни λ_k простые и при некотором $\varepsilon > 0$ круги $B(\lambda_k, \varepsilon\sqrt{|\lambda_k|})$ попарно не пересекаются;

б) для любого $\varepsilon > 0$

$$0 < c_\varepsilon \le |S(\lambda)|e^{-H(\lambda)} \le C_\varepsilon < \infty,$$

$\lambda \notin B(\lambda_k, \varepsilon\sqrt{|\lambda_k|}),\ k = 1, 2, ...$

В диссертации Р.С. Башмакова и в работе [7] на основе анализа ранее введенных и упомянутых выше понятий аналогов целых функций типа синуса определено новое понятие целой функции типа синуса для непрерывной субгармонической функции:

Определение. *Пусть $u(z)$ непрерывная субгармоническая функция на плоскости и $\tau(u, z)$ – радиус наибольшего круга с центром в точке z, в котором функция $u(z)$ отклоняется от пространства гармонических функций на этом круге не более чем на 1:*

$$\tau(u, z) = \sup\{r > 0 :\ \exists\ h(w) - \textit{гармоническая функция в круге}$$

$$B(z,r): \sup_{w\in B(z,r)} |h(w)-u(w)|\le 1\}.$$

Функцией типа синуса для функции $u(z)$ будем называть целую функцию L, удовлетворяющую условиям:

1. Все нули z_n, $n\in\mathbb{N}$, функции L простые и при некотором $\varepsilon>0$ круги $B(z_n,\varepsilon\tau(u,z_n))$, $n\in\mathbb{N}$, попарно не пересекаются.

2. При любом $\varepsilon>0$ вне множества кругов $B(z_n,\varepsilon\tau(u,z_n))$, $n\in\mathbb{N}$, выполняется соотношение

$$|\ln|L(z)|-u(z)|\le A(\varepsilon).$$

Из соображений субгармоничности и из определения величины $\tau(u,z)$ вытекает свойство

$2'$. *Для всех $z\in\mathbb{C}$ выполняется оценка сверху*

$$\ln|L(z)|\le u(z)+A_1(\varepsilon).$$

Множество функций типа синуса для функции u будем обозначать через $\mathcal{S}(u)$.

В первом параграфе **Главы 1** в общем виде описаны геометрические характеристики

$$\rho(u,y)=\sup\left\{t>0:\ \int_{y-t}^{y+t}|u'_+(\tau)-u'_+(y)|\,d\tau\le 1\right\}$$

для выпуклых на вещественной оси функций и определенная ранее $\tau(u,z)$ для непрерывных субгармонических функций. При этом выпуклая на вещественной оси функция $u(x)$ рассматривается как субгармоническая на комплексной плоскости $u(z)=u(\mathrm{Re}\ z)$. Доказан ряд лемм, описывающих свойства геометрических характеристик и их сравнимость между собой.

Во втором параграфе приводятся свойства функции $F(z)=e^z-1$, а так же описывается процесс атомизации,необходимые для конструирования функции типа синуса.

В третьем параграфе на основе результатов первых двух доказана основная теорема 1.1.

Теорема 1.1. *Пусть u — выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Предположим, что найдется функция $\alpha(x)\ge 1$, удовлетворяющая условиям*

а) При некоторой константе A для любого $x\in\mathbb{R}$ для всех $y\in[x-\rho(u,x);x+\rho(u,x)]$ имеет место соотношение

$$|\alpha(y)-\alpha(x)|\le A.$$

b) Сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x)} \frac{dx}{\rho(u,x)} < \infty.$$

c) При некоторой константе $a > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ для всех $y_1, y_2 \in [x - 2\alpha(x)\rho(u,x); x + 2\alpha(x)\rho(u,x)]$ имеет место соотношение

$$\frac{\rho(u,y_1)}{\rho(u,y_2)} \geq a.$$

Тогда существует целая функция типа синуса для функции $u(z) = u(Re\ z)$.

А также доказана необходимая для дальнейших исследований систем экспонент в пространстве $L_2(I,h)$ теорема о существовании функция типа синуса для

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{t\in I}(xt - h(t)),\ x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1.2. *Пусть $\widetilde{h}$ — сопряженная по Юнгу функции $h(t)$ на ограниченном интервале $(a;b)$. Предположим, что при некоторой константе $c > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ для всех*

$$y_1, y_2 \in [x - 2\rho(u,x)\ln\rho(u,x); x + 2\rho(u,x)\ln\rho(u,x)]$$

имеет место соотношение

$$\frac{\rho(u,y_1)}{\rho(u,y_2)} \geq c.$$

Тогда существует целая функция типа синуса для функции $u(z) = \widetilde{h}(Re\ z)$.

В дополнение доказана лемма, упрощающая вычисление геометрических характеристик в конкретных примерах:

Лемма 1.8. *Пусть $u(x)$ — дважды дифференцируемая выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Допустим, что всех $x \in \mathbb{R}$ при некоторых константах $A, B > 0$ выполняется соотношение*

$$\frac{u''(y_1)}{u''(y_2)} \leq B, \quad \forall y_1, y_2 \in I(x) := \left[x - \frac{A}{\sqrt{u''(y)}}; x + \frac{A}{\sqrt{u''(y)}}\right].$$

Тогда

$$\min\left(A, \frac{1}{AB}\right)\frac{1}{\sqrt{u''(y)}} \leq \rho(u,x) \leq \max\left(A, \frac{B}{A}\right)\frac{1}{\sqrt{u''(x)}}.$$

В четвертом параграфе на основе свойств функции типа синуса, рассмотренных там же, доказана теорема о допустимой точности асимптотики.

Теорема 1.3. *Пусть функция $u(z)$ субгармонична на всей плоскости, дважды непрерывно дифференцируема и*

$$\frac{1}{|z|} \leq \Delta u(z) \leq \frac{2}{|z|}, \quad |z| \geq 1,$$

Пусть $L(z)$ - функция типа синуса для функции $u(z)$. Возьмем круг $B(0,r)$ так, чтобы мера этого круга по ассоциированной мере μ_u была равна $\frac{1}{4}$ и положим $v(z) = u(z) - \int\limits_{B(0,r)} \ln|z-w| d\mu_u(w)$. Тогда для любой возрастающей до ∞ функции $\gamma(x)$ множество

$$E = \{z : \ |v(z) - \ln|L(z)|| \geq \frac{1}{4}\ln(|z|+2) + \gamma(|z|)\}$$

покрывается системой кругов $B(z_j, r_j)$ так, что выполняется оценка

$$\sum_{|z_j|\leq R} r_j = o(R), \ R \longrightarrow +\infty,$$

то есть это множество является C_0 - множеством.

В то же время, для любой целой функции $f(z)$, для любого $q \in (0; \frac{1}{4})$, для любого покрытия множества

$$E_q = \{z : \ |u(z) - \ln|f(z)|| \geq q \ln|z|\},$$

кругами $B(z_j, r_j)$ найдется $R(q) > 0$ так, что выполняется соотношение

$$\sum_{|z_j|\leq R} r_j \geq R, \ R > R(q).$$

Таким образом, исключительное множество E_q при $q < \frac{1}{4}$ не может быть C_0 - множеством.

Во **второй главе** диссертации изучаются свойства систем экспонент такие, как полнота, минимальность, безусловная базисность, базисность по Риссу в пространствах $L_2(I,h)$. Основным инструментом в этих исследованиях является преобразование Фурье-Лапласа и следующая теорема из работы В.И. Луценко, Р.С. Юлмухаметова[5] (1990 г.).

[5]Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства.* // Математ. заметки, 1990. Т. 48, № 5. С. 139–144.

Для функционала S на пространстве $L_2(I,h)$ его преобразованием Фурье-Лапласа называется функция

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda t}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

По известному общему виду функционалов на гильбертовых пространствах получаем, что преобразование Фурье-Лапласа непрерывного функционала имеет вид

$$\widehat{S}(\lambda) = \int_I \overline{f(t)} e^{-2h(t)+\lambda t}\, dt,$$

где функция $f \in L_2(I,h)$ порождает функционал S.

Теорема A. *Пусть* $\widetilde{h}(x) = \sup\limits_{t\in I}(xt - h(t))$— *сопряженная по Юнгу к функции* $h(t)$ *и определим* $\rho(\widetilde{h},x)$ *из условия*

$$\int\limits_{x-\rho(\widetilde{h},x)}^{x+\rho(\widetilde{h},x)} |\widetilde{h}'_+(x) - \widetilde{h}'_+(t)|dt = 1.$$

Тогда

1. Обобщенное преобразование Лапласа $\widehat{S}(z) = S(e^{zt})$ *функционала* S *на* $L_2(I,h)$ *является целой функцией, удовлетворяющей условиям*

$$|\widehat{S}(z)| \le C_S \exp(\widetilde{h}(x)),$$

$$\|\widehat{S}\|^2 := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{S}(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho(\widetilde{h},x) d\widetilde{h}'_+(x)dy \le (\pi e)^2 \|S\|^2.$$

2. Имеют место нижняя и верхняя оценки

$$(\pi e)^{-1}\|S\| \le \|\widehat{S}\| \le \pi e\|S\|.$$

Кроме того, верно обратное утверждение: если F — *целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая условиям*

$$|F(z)| \le C_F \exp \widetilde{h}(x), \;\; z = x+iy,$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho(\widetilde{h},x) d\widetilde{h}'_+(x)dy < \infty,$$

то существует функционал S *на* $L_2(I,h)$ *такой, что*

$$\widehat{S}(z) \equiv F(z), \; z \in \mathbb{C}.$$

Первый параграф **Главы 2** посвящен вопросам полноты и минимальности системы экспонент, построенной по нулям функции типа синуса.

Пусть Λ — некоторое множество точек на плоскости. Систему экспонент $e^{\lambda z}$, $\lambda \in \Lambda$, будем обозначать через $\mathcal{E}(\Lambda)$. Для голоморфной функции L через Λ_L обозначим множество нулей функции L (без учета кратностей).

Теорема 2.2. *Пусть h — выпуклая функция на ограниченном интервале $I = (a; b)$, u — выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Пусть далее $L \in \mathcal{S}(u)$. Система экспонент $\mathcal{E}(\Lambda_L)$ полна в пространстве $L_2(I, h)$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{u(x)}{|x|} + \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{u(x)}{|x|} \geq b - a.$$

Теорема 2.3. *Пусть u — выпуклая функция на $\mathbb{R}$, $L \in \mathcal{S}(u)$, h — выпуклая функция на ограниченном интервале I. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda_L)$ будет минимальной в пространстве $L_2(I, h)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2(u(x) - \widetilde{h}(x))}}{|x| + 1} \rho(u, x) d\widetilde{h}'_+(x) < \infty,$$

$$\frac{e^{u(x)}}{|x| + 1} \leq C e^{\widetilde{h}(x)}.$$

Теоремы 2.2 и 2.3 усиливают и уточняют результаты, изложенные в диссертации Р.А. Башмакова. Как следствие доказано, что система, построенная по нулям функции $L \in \mathcal{S}(\widetilde{h})$, полна и минимальна.

Во втором параграфе получены условия отсутствия безусловных базисов в гильбертовом пространстве общего вида.

Пусть $H(E)$ — некоторое гильбертово пространство функций, определенных на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{C}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

H1. Норма в пространстве H слабее равномерной нормы на E, то есть для некоторой константы A и для любой ограниченной функции f из H выполняется оценка

$$||f||_H \leq A \sup_{z \in E} |f(z)|.$$

H2. Экспоненты $\exp(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, принадлежат пространству E и эта система полна в пространстве H.

$\widehat{H}$ - пространство преобразований Фурье-Лапласа функционалов на гильбертовом пространстве H, с наведенным скалярным произведением. $K(\lambda) = ||e^{\lambda z}||^2$.

Теорема 2.8. *Пусть $H(E)$ — гильбертово пространство, удовлетворяющее условиям H1, H2 и $\sqrt{K(\lambda)}$ — функция Бергмана пространства $\widehat{H}$. Предположим, что для любого положительного числа p найдется число $\delta = \delta(p) > 0$, такое, что функция $\tau(\lambda) = \tau(\ln K(z), \lambda, p)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\min_{z \in B(\lambda, 2\tau(\lambda))} \tau(z) \geq \delta\tau(\lambda).$$

и $\tau(\lambda) = o(|\lambda|)$, при $|\lambda| \longrightarrow \infty$. Тогда в пространстве H безусловных базисов из экспонент не существует.

Получено условие отсутствия базисов Рисса из экспонент в пространстве $L_2(I, h)$, обобщившее соответствующий результат в диссертации Р.А. Башмакова.

Теорема 2.9. *Пусть для любого $p > 0$ найдется некоторое число $\delta = \delta(p) > 0$ со свойством: существует последовательность $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, такая, что интервалы*

$$I_k = \{x : \ |x - x_k| \leq 2\tau(\ln K(z), x_k, p)\}$$

попарно не пересекаются и

$$\min_{x \in I_k} \tau(\ln K(z), x, p) \geq \delta(p)\tau(\ln K(z), x_k, p).$$

Пусть далее для любого $\varepsilon > 0$ найдется отрезок $[m; s]$, $s > m$, целочисленного ряда со свойствами

1) Если $I_{m,s} = \bigcup\limits_{m \leq k \leq s} I_k$, $I^0_{m,s}$ — наименьший отрезок вещественной оси, содержащий $I_{m,s}$, $d_{m,s}$ — сумма длин интервалов, составляющих $I_{m,s}$, а $d^0_{m,s}$ — длина отрезка $I^0_{m,s}$, то $d_{m,s} \geq (1 - \varepsilon)d^0_{m,s}$;

2) Выполняется оценка $\max\limits_{k \in [m,s]} \tau(\ln K(z), x_k, p) \leq \varepsilon d^0_{m,s}$.

Тогда в пространстве $L_2(I, h)$ базисов Рисса из экспонент не существует.

В третьем параграфе сформулирована теорема об отсутствии базисов Рисса из экспонент в пространстве $L_2(I, h)$, отличном от классического $L_2(I)$.

Теорема 2.11. *Если в пространстве $L_2(I, h)$ существует базис Рисса из экспонент, то $e^{h(t)} \asymp 1$, то есть пространство $L_2(I, h)$ изоморфно (как банахово пространство) классическому пространству $L_2(I)$.*

Четвертый параграф посвящен описанию метода суммирования рядов из экспонент по нулям функции $L(z) \in \mathcal{S}(\widetilde{h})$, с некоторыми „геометрическими условиями“ на расположение ее нулей в вертикальных полосах на плоскости. Если функция $\beta(x),\ x \in \mathbb{R}$, $0 < \beta(x) \leq 1$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\rho(\widetilde{h}, x)\, d\widetilde{h}'_{+}(x) < \infty$$

то верна теорема:

Теорема 2.14. *В заданных геометрических условиях на* $L(z)$ *положим*

$$h_1(t) = \frac{1}{2} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2xt} \beta(x)\rho(\widetilde{h}, x) d\widetilde{h}'_{+}(x)$$

и пусть S_k *— система функционалов на* $L_2(I, h)$*, биортогональная к системе экспонент* $e^{\lambda_k t}$*. Тогда для любой функции* $f \in L_2(I, h_1)$*, для любого* n*, ряды*

$$f_n(t) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{\infty} S_j(f) e^{z_j t}, \quad f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(t)$$

сходятся в норме пространства $L_2(I, h)$.

Автор выражает благодарность своему **научному руководителю Р.С. Юлмухаметову** за неоценимую помощь в работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Башмаков Р.А., Путинцева А.А. *Полнота системы экспонент в пространстве* $L_2(I, \exp h)$. // Вестник УГАТУ. Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т.9, № 3(21) С. 80–87.

[2] Путинцева А.А. *Критерий минимальности системы экспонент в пространстве* $L_2(I, \exp h)$. // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы VI молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения-2007". 2007. Т.35. С. 203–204.

[3] Путинцева А.А. *О преобразовании Фурье-Лапласа на весовом гильбертовом пространстве.* // Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. 2008. С. 118–119.

[4] Исаев К.П., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Построение аналитической в полосе функции с заданной асимптотикой.* // Труды института математики с ВЦ УНЦ РАН . Выпуск 1. 2008. С. 100–108.

[5] Исаев К.П., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Представление рядами экспонент в весовых пространствах на вещественной оси.* // Уфимский математический журнал. 2009. Т. 1, № 1. С. 16–37.

[6] Исаев К.П., Путинцева А.А., Трунов К.В. *Конструкция целых функций типа синуса.* // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании", посвященная 100-летию БашГУ. Сборник трудов. Т.1 Математика. 2009. С. 174–182.

[7] Башмаков Р.А., ПутинцеваА.А., Юлмухаметов Р.С. *Целые функции типа синуса и их применение.* // Алгебра и Анализ. 2010. Т. 22, № 5. С. 49–68.

[8] Путинцева А.А. *Базисы Рисса в весовых пространствах.* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 1. С. 47–52.