На правах рукописи

Мякинова Ольга Владимировна

Спектральные свойства неполуограниченного сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций

01.01.02 —дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Уфа — 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений ГОУ ВПО „Башкирский государственный университет“

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор **Яудат Талгатович Султанаев**
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор **Зиганур Юсупович Фазуллин**
	доктор физико–математических наук, **Денис Иванович Борисов**
Ведущая организация:	ГОУ ВПО „Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова“

Защита состоится 21 января 2011 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 в Учреждении российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН по адресу: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН

Автореферат разослан ____ декабря 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук С.В. Попенов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Одной из основных задач в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов является задача исследования их спектральных свойств: качественного и количественного характера спектра, индексов дефекта и спектральных асимптотик оператора в зависимости от поведения их коэффициентов. Систематическое исследование этих задач началось в начале 20 века в работах [1], [3]–[18], [20]–[22]. Существенный вклад в развитие спектральной теории дифференциальных операторов внесли советские математики ([1], [3], [6], [8]–[11], [12]–[17], [20], [21]). Заметим, что в основном в этих работах исследовались скалярные дифференциальные операторы. Мы в нашей работе исследуем дифференциальные операторы в пространстве вектор-функций.

Дадим необходимые в дальнейшем определения.

Как известно, самосопряженное дифференциальное выражение с вещественными коэффициентами четного порядка необходимо имеет вид:

$$l_1 y = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p_{n-k}(x) y^{(k)})^{(k)},$$

где $p_j(x)$, $j=\overline{0,n}-$ вещественные функции.

Определение. Выражение $l_1 y$, рассматриваемое на конечном интервале (a,b) при условии, что коэффициенты $\frac{1}{p_0(x)}$,$p_1(x)$,$p_2(x), ..., p_n(x)$ суммируемы во всем (a,b), называется самосопряженным регулярным дифференциальным выражением. В противном случае выражение $l_1 y$ называется сингулярным самосопряженным дифференциальным выражением.

Рассмотрим линейное дифференциальное выражение

$$\tilde{l}y = (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p_{n-k}(x) y^{(k)})^{(k)}, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

где $p_k(x)$, $k=\overline{1,n}$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Дифференциальное выражение $\tilde{l}y$, рассматриваемое на всех допустимых функциях y из пространства $L_2[0,\infty)$, определяет в этом пространстве оператор L. Рассмотрим сужение этого оператора на множество всех финитных достаточно гладких функций, обращающихся в нуль при $x > R$, $R > 0$ (выбор R, вообще говоря, различен для различных y). Обозначим замыкание сужения указанного оператора через L_0.

Определение. Оператор L_0 называется минимальным дифференциальным оператором, порожденным дифференциальным выражением $\tilde{l}y$ в $L_2[0, \infty)$.

Определение. Система уравнений

$$Y' = (\Lambda(x) + M(x))\, Y,$$

рассматриваемая на некотором промежутке $[x_0, \infty)$, $x_0 > 0$, называется L – диагональной, если матрица Λ является диагональной, причем ее элементы локально суммируемы, разность их действительных частей знакопостоянна, а все элементы матрицы M – суммируемые на $[x_0, \infty)$ функции.

Пусть L – симметрический оператор в гильбертовом пространстве H, λ – произвольное комплексное число, такое что Im $(\lambda) \neq 0$. Обозначим через R_λ и $R_{\overline{\lambda}}$ области значений операторов $L - \lambda I$ и $L - \overline{\lambda} I$, где I – тождественный оператор. Очевидно, что R_λ и $R_{\overline{\lambda}}$ - подпространства в H, не обязательно замкнутые. Ортогональные дополнения $N_\lambda = H - R_\lambda$ и $N_{\overline{\lambda}} = H - R_{\overline{\lambda}}$ называются дефектными подпространствами оператора L.

Известно, что при любом комплексном λ из верхней полуплоскости

$$\dim N_\lambda = \dim N_i,\, \dim N_{\overline{\lambda}} = \dim N_{-i}.$$

Положим

$$m = \dim N_i, \quad l = \dim N_{-i}.$$

Пара чисел (m, l) называется индексами дефекта симметрического оператора L. Известно ([10],с.202-203), что индексы дефекта оператора L_0, порожденного самосопряженным дифференциальным выражением с вещественнозначными коэффициентами, одинаковы (m, m) и удовлетворяют оценке:

$$n \leqslant m \leqslant 2n.$$

Одним из методов, используемых для нахождения индексов дефекта оператора L_0, является метод исследования асимптотического поведения при $x \to \infty$ фундаментальной системы решений уравнения $\tilde{l}y = \lambda y$. Этот метод берет свое начало в работах N.Levinson. Затем указанный метод был существенно усовершенствован в работах М.А.Наймарка [10], И.М. Рапопорта [11] и М.В. Федорюка [20], [21].

В недавних работах Р.С. Исмагилова и А.Г. Костюченко ([4], [5]), посвященных исследованию спектральных свойств неполуограниченных дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, отмечено практическое отсутствие результатов об индексах дефекта таких операторов.

Формула асимптотического распределения собственных значений полуограниченных операторов Штурма-Лиувилля и Шредингера впервые была установлена Э.Т.Титчмаршем. После работ Э.Т.Титчмарша и Б.М. Левитана [8], [9] усовершенствовавшего его метод, вопросам распределения собственных значений было посвящено значительное количество работ. При этом не только усовершенствовались методы исследования, но и расширился класс рассматриваемых операторов. Вместе с оператором Штурма-Лиувилля рассматривались обыкновенные дифференциальные операторы произвольного порядка, операторы в частных производных.

Цель работы. Исследование спектральных свойств, а именно, индексов дефекта, качественного и количественного характера спектра минимального дифференциального оператора L_0, порожденного в $L_2[0,\infty)$ дифференциальным выражением следующего вида:

$$ly = y^{(4)} + Q(x)y, \tag{1}$$

$0 \leqslant x < \infty$, $y = (y_1(x), y_2(x))$, $Q(x)$ – вещественнозначная симметрическая матрица.

Методика исследования. В работе используются методы асимптотической теории дифференциальных уравнений, методы теории функций комплексного переменного и разработанный Я.Т. Султанаевым метод повторной диагонализации.

Содержание основных результатов и их новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми и соответствуют проблематике данного раздела теории дифференциальных уравнений. Они состоят в следующем:

1. Получены асимптотики фундаментальной системы решений уравнения

$$l(y) = \lambda y,\ \mathrm{Im}\ \lambda \neq 0,\ 0 \leqslant x < \infty,$$

где $y = (y_1(x), y_2(x))$, как в случае "умеренного", так и в случае "быстрого" вращения собственных векторов матрицы коэффициентов.

2. Исследованы индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением $l(y)$ в $L_2[0,\infty)$.

3. Получены теоремы о дискретности спектра самосопряженного вещественного расширения оператора L_0.

4. Получены асимптотики фундаментальной системы решений уравнения

$$l(y) = \lambda y,\ 0 \leqslant x < \infty$$

при $\lambda \to \infty$, равномерно по x.
5. Исследовано асимптотическое поведение функции распределения собственных значений оператора L_0.

Теоретическая и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы специалистами в области дифференциальных уравнений, работающими в МГУ им. М.В. Ломоносова, Саратовском государственном университете им. Н.Г.Чернышевского, Евразийском национальном университете им. Л.Н.Гумилева, Башкирском государственном университете, Башкирском государственном педагогическом университете им. М. Акмуллы.

Апробация работы. Основные результаты докладывались на Международной научной конференции "Современные проблемы анализа и преподавания математики", посвящённой 105-летию академика Сергея Михайловича Никольского (2010), международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего (2009), на III Конгрессе математиков тюркского мира (2010), на семинаре Института математики с ВЦ УНЦ РАН, кафедры математического анализа Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы и на семинарах кафедры дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] — [5], примыкающие к теме диссертации результаты — в [6]. Работы [1]–[4] выполнены совместно с Я.Т. Султанаевым. Из результатов этих работ в диссертацию автором включены только результаты, полученные им лично.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и библиографии. Она изложена на 100 страницах, библиография содержит 41 наименование. Нумерация теорем, лемм и т. п. сплошная, трехиндексная.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа состоит из двух частей, связанных между собой исследованием спектральных характеристик дифференциального оператора.
Содержание главы 1.

Введем следующие обозначения:

$$\phi(x) = \frac{1}{2} arctg \frac{q_{22} - q_{11}}{2q_{12}}.$$

Назовем функцию $\phi'(x)$ скоростью вращения собственных векторов матрицы $Q(x)$.

Параграф 1 главы 1 настоящей диссертации посвящен исследованию асимптотического поведения при $x \to \infty$ фундаментальной системы решений уравнения

$$ly = \lambda y, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0 \tag{1.1.1}$$

в случае, когда скорость вращения собственных векторов матрицы $Q(x)$ ограничена.

Введем в рассмотрение вектор-столбец $z = (y, y', y'', y''')$. Тогда уравнение $ly = \lambda y$ можно записать в виде системы 1-го порядка
$z' = A(x, \lambda) z$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -Q(x) + \lambda I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Приводя Q к диагональному виду замено

$$z = diag\left\{U_1, U_1, U_1, U_1\right\} w = Uw,$$

получим систему

$$w' = (U^{-1}AU)w - U^{-1}U'w,$$

где

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\Lambda + \lambda I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$U^{-1}U' = \operatorname{diag}\left\{\tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}\right\}$, $\tilde{p} = \phi'(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Поскольку в данном случае скорость вращения ограничена: $|\phi'(x)| < c$, то главными будут элементы матрицы $U^{-1}AU$.

Известно, что матрица с элементами

$$C = \begin{pmatrix} \overline{\mu_1}(x)^{-3/2} & -\overline{\mu_2}(x)^{-3/2} & -i\overline{\mu_3}(x)^{-3/2} & i\overline{\mu_4}(x)^{-3/2} \\ \overline{\mu_1}(x)^{-1/2} & -(-\overline{\mu_2}(x))^{-1/2} & i(-i\overline{\mu_2}(x))^{-1/2} & -i(i\overline{\mu_4}(x))^{-1/2} \\ \overline{\mu_1}(x)^{1/2} & (-\overline{\mu_2}(x))^{1/2} & -i(-\overline{\mu_3}(x))^{1/2} & -(i\overline{\mu_4}(x))^{1/2} \\ \overline{\mu_1}(x)^{3/2} & -(-\overline{\mu_2}(x))^{3/2} & -i(-i\overline{\mu_3}(x))^{3/2} & i(i\overline{\mu_4}(x))^{3/2} \end{pmatrix}$$

приводит $U^{-1}AU$ к диагональному виду:

$$C^{-1}U^{-1}AUC = \Lambda = \mathrm{diag}\left\{\mu_i\right\}_{i=1}^{8}.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.1.1. *Пусть выполнены условия: для достаточно больших* x_0 *и при* $x > x_0$
1) $|\phi'(x)| < const$,
2) $0 < A \leqslant \left|\frac{\mu_i(x)}{\mu_j(x)}\right| \leqslant B,\ i,j = 1,2,$
3) $\int_{x_0}^{\infty} \left|\mu_i^{-1/4}(x)\right| dx < \infty,\ \int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{\mu_i'^2(x)}{\mu_i^{9/4}(x)} + \frac{\mu_i''(x)}{\mu_i^{5/4}(x)}\right| dx < \infty,$
$\int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{\phi''(x)}{\mu_i^{1/4}(x)}\right| dx < \infty,\ i = 1,2.$
4) $|\mu_i'(x)| \leqslant C\,|\mu_i(x)|^{\alpha},\ C = const,\ i = 1,2,\ 0 < \alpha < 5/4.$
Тогда система (1.1.1) имеет восемь линейно независимых решений $y_j(x,\lambda)$, *таких, что при* $x \to \infty$

$$y_1 = \psi_1(x,\lambda) exp\left\{\int_0^x (\lambda - \mu_1(t))^{1/4} dt\right\}(1 + o(1)),$$

$$y_2 = \psi_1(x,\lambda) exp\left\{-\int_0^x (\lambda - \mu_1(t))^{1/4} dt\right\}(1 + o(1)),$$

$$y_3 = \psi_1(x,\lambda) exp\left\{i\int_0^x (\lambda - \mu_1(t))^{1/4} dt\right\}(1 + o(1)),$$

$$y_4 = \psi_1(x,\lambda) exp\left\{-i\int_0^x (\lambda - \mu_1(t))^{1/4} dt\right\}(1 + o(1)),$$

$$y_5 = \psi_2(x,\lambda) exp\left\{\int_0^x (\lambda - \mu_2(t))^{1/4} dt\right\}(1 + o(1)),$$

$$y_6 = \psi_2(x,\lambda) exp\left\{-\int_0^x (\lambda - \mu_2(t))^{1/4} dt\right\}(1 + o(1)),$$

$$y_7 = \psi_2(x,\lambda) exp\left\{i\int_0^x (\lambda - \mu_2(t))^{1/4} dt\right\}(1 + o(1)),$$

$$y_8 = \psi_2(x,\lambda) exp\left\{-i\int_0^x (\lambda - \mu_2(t))^{1/4} dt\right\}(1 + o(1)),$$

где
$\psi_1(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt[8]{(\lambda-\mu_1(x))^3}} \begin{pmatrix} \cos\phi(x) \\ -\sin\phi(x) \end{pmatrix},\ \psi_2(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt[8]{(\lambda-\mu_2(x))^3}} \begin{pmatrix} \sin\phi(x) \\ \cos\phi(x) \end{pmatrix}.$

Случай, когда $\phi'(x)$ является быстрорастущей, т.е. $\left|\frac{\mu_i(x)}{\phi'(x)}\right| \leqslant c$, рассматривается в теореме 1.2.1 главы 1.

Теорема 1.2.1. *Пусть выполнены условия: функции $\mu_i(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$, и существует x_0 такое, что для всех $x > x_0$*
1) $|\mu_i'(x)| \leqslant C_1 |\mu_i(x)|^{\alpha}$, $C_1 = const$, $i = \overline{1,2}$, $0 < \alpha < 5/4$.
2) $0 < A \leqslant \left|\frac{\mu_i(x)}{\mu_j(x)}\right| \leqslant B$, $i, j = 1, 2$.
3) $\int_{x_0}^{\infty} |\mu_i(x)|^{-1/2}\, dx < \infty$, $\int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{\mu_i''(x)}{\mu_i^2(x)}\right| dx < \infty$, $\int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{\phi''}{\mu_i^{3/2}(x)}\right| dx < \infty$, $i = 1, 2$.
4) $\left|\frac{\mu_i(x)}{\phi'(x)}\right| \leqslant C_2$, $C_2 = const$, $i = 1, 2$.
Тогда система $l(y) = \lambda y$ имеет восемь линейно независимых решений $y_j(x, \lambda)$, таких, что при $x \to \infty$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \tilde{\psi}_1(x,\lambda) e^{\int_0^x m^{1/4} dt}(1+o(1)), \quad & y_2 &= \tilde{\psi}_2(x,\lambda) e^{\int_0^x m^{1/4} dt}(1+o(1)),\\
y_3 &= \tilde{\psi}_1(x,\lambda) e^{i\int_0^x m^{1/4} dt}(1+o(1)), \quad & y_4 &= \tilde{\psi}_2(x,\lambda) e^{i\int_0^x m^{1/4} dt}(1+o(1)),\\
y_5 &= \tilde{\psi}_1(x,\lambda) e^{-\int_0^x m^{1/4} dt}(1+o(1)), \quad & y_6 &= \tilde{\psi}_2(x,\lambda) e^{-\int_0^x m^{1/4} dt}(1+o(1)),\\
y_7 &= \tilde{\psi}_1(x,\lambda) e^{-i\int_0^x m^{1/4} dt}(1+o(1)), \quad & y_8 &= \tilde{\psi}_2(x,\lambda) e^{-i\int_0^x m^{1/4} dt}(1+o(1)),
\end{aligned}
$$

где $\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{\sqrt[8]{m^3(x)}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\tilde{\psi}_2 = \frac{1}{\sqrt[8]{m^3(x)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $m(x) = \frac{\mu_1(x)+\mu_2(x)-2\lambda}{2}$.

Поясним смысл условий теоремы. Условия 1), 3) означают, что функции $\mu_i(x)$ удовлетворяют условию регулярности роста Титчмарша-Левитана, функции $|\mu_i(x)|$ имеют определенный рост на бесконечности. Условие 2) означает, что собственные значения матрицы $Q(x)$ растут "в одну силу". Четвертое условие означает, что рассматривается случай "быстрого вращения" собственных векторов матрицы $Q(x)$.

Заметим, что в случае степенного роста функций $|\mu_i(x)| \approx x^{\alpha}$ при $x \to \infty$ и степенного роста функции $\phi(x) \approx x^{\beta}$ при $x \to \infty$ все эти условия выполняются, если $\alpha > 2$, $\alpha < \beta < 1 + 5\alpha/4$.

Асимптотические формулы теорем 1.1.1 и 1.1.2 позволяют, в ряде случаев находить индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением (1.1.1) в ряде частных случаев. Их исследованию посвящен параграф 3 главы 1. Справедливы теоремы:

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1.1. Тогда 1)Если* $\mu_i(x) \to +\infty$, $i = 1, 2$, *то индексы дефекта оператора* L_0 *равны* $(4, 4)$.
2)Если $\mu_i(x) \to -\infty$, $i = 1, 2$, *то индексы дефекта оператора* L_0 *равны* $(6, 6)$.
3)Если $\mu_i(x) \to +\infty$, $\mu_j(x) \to -\infty$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, *то индексы дефекта оператора* L_0 *равны* $(5, 5)$.

Теорема 1.3.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.2.1. Тогда индексы дефекта оператора* L_0 *равны* $(4, 4)$.

В четвертом параграфе даны приложения результатов §§1-3 к исследованию спектра самосопряженных расширений минимального дифференциального оператора и доказан ряд теорем:

Теорема 1.4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1.1. Тогда если* $\mu_i \to +\infty$, $i = 1, 2$ *при* $x \to +\infty$, *то спектр всякого самосопряженного расширения* L_u *оператора* L_0 *дискретен.*

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1.1. Тогда если* $\mu_i \to -\infty$, $i = 1, 2$ *при* $x \to +\infty$, *то спектр всякого самосопряженного расширения* L_u *оператора* L_0 *дискретен.*

Теорема 1.4.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1.2. Тогда если* $\mu_i \to -\infty$, $i = 1, 2$ *при* $x \to +\infty$, *то спектр всякого самосопряженного расширения* L_u *оператора* L_0 *дискретен.*

Содержание главы 2.

В §1 исследовано асимптотическое поведение фундаментальной системы решений уравнения $ly = \lambda y$ равномерно по $x \to \infty$ при $\lambda \to \infty$ по кривой Γ, где $\Gamma = \{\lambda = \sigma + i\tau, \tau = \sigma^\gamma, 0 < \gamma < 1\}$, в случае "быстрого" вращения. Доказана

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия: для* $x > x_0$ *при достаточно больших* x_0

1) $|\mu_i'(x)| \leqslant c\,|\mu_i(x)|^\alpha$, $c = const$, $i = \overline{1, 2}$, $0 < \alpha < 5/4$.

2) $\int_{x_0}^{\infty} |\mu_i(x)|^{-1/2}\, dx < \infty$, $\int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{\mu_i''(x)}{\mu_i^2(x)}\right| dx < \infty$, $i = 1, 2$.

3) $0 < A \leqslant \left|\frac{\mu_i(x)}{\mu_j(x)}\right| \leqslant B$, $i, j = 1, 2$.

4) $\left|\frac{\mu_i(x)}{\phi'(x)}\right| \leqslant C_1, \int_{x_0}^{\infty}\left|\frac{\phi''(x)}{\mu_i^{3/2}(x)}\right| dx < \infty$, $C_1 = const$, $i = 1, 2$.

Тогда система $l(y) = \lambda y$ имеет восемь линейно независимых решений $y_j(x,\lambda)$, для которых при $\lambda \in \Gamma$, $\lambda \to \infty$ имеют место асимптотические формулы, равномерные по x, $0 \leqslant x < \infty$

$$y_1 = \tilde{\psi}_1(x,\lambda)e^{\int\limits_0^x m^{1/4}dt}(1+o(1)), \;\; y_2 = \tilde{\psi}_2(x,\lambda)e^{\int\limits_0^x m^{1/4}dt}(1+o(1)),$$

$$y_3 = \tilde{\psi}_1(x,\lambda)e^{i\int\limits_0^x m^{1/4}dt}(1+o(1)), \;\; y_4 = \tilde{\psi}_2(x,\lambda)e^{i\int\limits_0^x m^{1/4}dt}(1+o(1)),$$

$$y_5 = \tilde{\psi}_1(x,\lambda)e^{-\int\limits_0^x m^{1/4}dt}(1+o(1)), \;\; y_6 = \tilde{\psi}_2(x,\lambda)e^{-\int\limits_0^x m^{1/4}dt}(1+o(1)),$$

$$y_7 = \tilde{\psi}_1(x,\lambda)e^{-i\int\limits_0^x m^{1/4}dt}(1+o(1)), \;\; y_8 = \tilde{\psi}_2(x,\lambda)e^{-i\int\limits_0^x m^{1/4}dt}(1+o(1)),$$

где $\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{\sqrt[8]{m^3(x)}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\quad \tilde{\psi}_2 = \frac{1}{\sqrt[8]{m^3(x)}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $m(x) = \frac{\mu_1(x)+\mu_2(x)-2\lambda}{2}$.

В §2 построена функция Грина вещественного самосопряженного расширения оператора L_u. Далее выводится асимптотическая формула для $N(L,\lambda)$ с помощью известной формулы Т.Карлемана для следа резольвенты. Здесь использована широко известная теория "R-функции" и тауберовых теорем. В результате установлена следующая

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1, а также условия*

1) $\mu_i(x) \leqslant -c|x|^{4/3+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, $c > 0$,

2) $A_1 \leqslant \left|\frac{\delta(-t)}{\delta(t)}\right| \leqslant A_2$, $\alpha\delta(t) \leqslant t\delta(t)' \leqslant \beta\delta(t)$, $0 < \alpha < \beta < 1$,

при больших $|t|$.
Тогда для функции $N(\lambda)$- числа собственных значений оператора L_0, не превосходящих λ, имеют место асимптотические формулы $N(t) \sim \delta(t)$.

Автор выражает благодарность своему **научному руководителю Я.Т. Султанаеву** за неоценимую помощь в работе.

Работы автора по теме диссертации

1. **Мякинова О.В., Султанаев Я.Т.** *Об асимптотике спектра неполуограниченного сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций.* Доклады АН, 2010, т. 432, №1, С. 18-21.
2. **Султанаев Я.Т., Мякинова О.В.** *Индексы дефекта сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций.* Мат. заметки, 2009, т.86, № 6, С. 950-953.
3. **Мякинова О.В.** *Об асимптотике спектра векторного сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка.* Вестник Башкирского университета, 2009. Т.14, № 4, С. 1307-1309.
4. **Султанаев Я.Т., Мякинова О.В.** *Об индексах дефекта сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций.* Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений," посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего, 30 марта-02 апреля 2009 г. 2009. С. 216.
5. **Мякинова О.В.** *Об индексах дефекта сингулярного векторного дифференциального оператора.* "VI региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике, физике и химии": сборник трудов. Том II. Математика – Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. 234 с.
6. **Мякинова О.В.** *Асимптотика решений сингулярного дифференциального уравнения четвертого порядка.* "Международная уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых": Сборник трудов: Математика. Том III. – Уфа: РИО БашГУ, 2005. - 339 с.

Литература

[1] Белогрудь В.П., Костюченко А.Г. О плотности спектра оператора Штурма-Лиувилля // Успехи матем. наук. 1973. т.28. №2. с.227-228.

[2] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория – М.: ИЛ. 1962.

[3] Исмагилов Р.С. Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций // Мат. заметки. 1971. т.9. № 6. с. 667-675.

[4] Исмагилов Р. С., Костюченко А. Г. Об асимптотике спектра неполуограниченного векторного оператора Штурма-Лиувилля // Функц. анализ и его прил., 42:2 (2008), с. 11-22.

[5] Исмагилов Р. С., Костюченко А. Г. О спектре векторного оператора Шрёдингера // Функц. анализ и его прил., 41:1 (2007), с. 39-51.

[6] Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы) // М.: Наука. 1979.

[7] Коддингтон Э.А. Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений – М.:ИЛ, 1958.

[8] Левитан Б.М. Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных операторов // В сб.: Междунар. конгресс математиков в Ницце. 1970. М.: Наука. 1972. с. 145-157.

[9] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию(самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы) – М.:Наука.1970.

[10] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы – М.: Наука, 1969.

[11] Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений – Киев.: Изд-во АН УССР.1954.

[12] Субханкулов М.А. Тауберовы теоремы с остатком – М.: Наука. 1976.

[13] Султанаев Я.Т. Двусторонняя тауберова теорема для отношений // Известия вузов. Математика. 1974. №1. с. 103-112.

[14] Султанаев Я.Т. Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций // Диф. уравнения. 1974. т.10. №9. с.1673-1683.

[15] Султанаев Я.Т. Об индексах дефекта и спектре неполуограниченного оператора Штурма-Лиувилля // ДАН СССР. 1984. т.276. №5. с. 1072-1074.

[16] Султанаев Я.Т. Асимптотика дискретного спектра одномерных сингулярных операторов в неопределенном случае // Изв. АН Каз. ССР, Сер. Физ-матем., 1975. №3. с.86-88.

[17] Султанаев Я.Т. Асимптотика спектра сингулярных дифференциальных операторов в неопределенном случае // Вестник МГУ. Серия I.Математика. Механика. 1975.№3. с.21-30.

[18] Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка – М.: Ин. лит. ч.1. 1960, ч.2.1961.

[19] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа – М.: ФМ. ч.2. 1963.

[20] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Наука.1983.

[21] Федорюк М.В. Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов // Труды ММО. т.15. 1966. с. 296-345.

[22] Eastham M.S.P., Grudniewicz C.G.M. Asymptotic theory and deficiency indices for the higher-order differential equations – J.London Math.Soc.1981. 2-d ser. vol.24. part 2. p. 256-271.