На правах рукописи

КОСТРИГИНА Ольга Сергеевна

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО ДАРБУ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2011

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО " Уфимский государственный авиационный технический университет"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Жибер Анатолий Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Газизов Рафаил Кавыевич; кандидат физико-математических наук, доцент Картак Вера Валерьевна

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук Институт механики Уфимского научного центра РАН

Защита состоится 23 декабря 2011 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 при Учреждении Российской академии наук Институте математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН по адресу: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН.

Автореферат разослан ______ ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.057.01,
кандидат физико-математических наук С.В. Попенов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию проблемы интегрируемости нелинейных гиперболических систем уравнений вида

$$u^i_{xy} = F^i(x, y, u, u_x, u_y), \quad i = 1, 2, \dots, n, \; u = (u^1, u^2, \dots, u^n). \qquad (1)$$

Последние описывают широкий класс нелинейных явлений в самых различных областях теоретической и математической физики.

Изучаемые системы (1) обладают нетривиальной группой внутренних симметрий, генерируемой алгеброй Ли - Беклунда, что позволяет для их классификации использовать "симметрийный" подход. Симметрийный метод классификации эффективен в случае эволюционных уравнений, однако при симметрийной классификации гиперболических уравнений возникают серьезные технические трудности даже в простейшей ситуации.

В данной работе для решения классификационной задачи используется метод, основанный на изучении структуры характеристических алгебр (колец) системы. Идеи этого алгебраического подхода были предложены в конце XIX века в классических работах Дарбу, Гурса, Вессио[1] и других авторов, однако окончательное его формирование произошло сравнительно недавно.

Важный вклад в развитие этого метода внесла работа Шабата А.Б., Ямилова Р.И. [2], в которой исследовалась система гиперболических уравнений вида

$$u^i_{xy} = a_{i1}e^{u^1} + \dots + a_{in}e^{u^n}, \; i = 1, 2, \dots, n, \qquad (2)$$

В этой работе было введено понятие характеристической алгебры Ли векторных полей и было показано, что характеристическая алгебра системы уравнений (2) конечномерна тогда и только тогда, когда коэффициенты a_{ij} определяют матрицу Картана простой алгебры Ли. Далее, в статье Лезнова А.Н., Смирнова В.Г., Шабата А.Б.[3] для систем гиперболических уравнений более общего вида

$$u^i_{xy} = F^i(u), \; i = 1, 2, \dots, n$$

[1]Darboux G. *Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal.* – Paris: Gauthier-Villars. – 1896. – V. 1 - 4.

Goursat E. *Lecons sur l'integration des équations aux dérivées partielles du second order á deux variables indépendantes.* – Paris: Herman. – 1896, 1898. – Tome I, II.

Vessiot E. *Sur les equations aux derivees partialles du second order, $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, inteqrables par la methode de Darboux* // J. Math. Pure Appl. – 1939 – V. 18. – № 9. – P. 1 - 61.

[2]Шабат А. Б., Ямилов Р. И. *Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана*// Препринт БФ АН СССР, Уфа. – 1981. - 23 с.

[3]Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // Теоретическая и математическая физика. – 1982. – Т. 51. – № 1. – С. 10 - 21.

была выдвинута гипотеза о том, что условием интегрируемости в квадратурах является конечномерность ее характеристической алгебры.

В последнее время понятие характеристической алгебры (кольца) было обобщено на дифференциально-разностные и полностью дискретные уравнения и на этой основе проведена классификация некоторых классов интегрируемых цепочек[4].

Целью работы является развитие и применение метода, основанного на изучении структуры характеристических алгебр (колец), для классификации интегрируемых нелинейных гиперболических систем уравнений. Доказательство критерия интегрируемости по Дарбу, выделение класса интегрируемых систем, построение x, $y-$интегралов и точных решений.

Методы исследования. В работе применяются классические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, теории интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений, а также теории алгебр Ли.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказан критерий независимости $x(y)-$интегралов нелинейной гиперболической системы уравнений. Приведены необходимые и достаточные условия интегрируемости по Дарбу, установлена связь между порядками интегралов системы и размерностью характеристических колец Ли.

2. Для решения задачи классификации двухкомпонентных гиперболических систем уравнений с экспоненциальной правой частью предложен подход, основанный на изучении структуры характеристических алгебр Ли линеаризованной системы.

3. Для $n-$компонетной системы уравнений приведены необходимые и достаточные условия существования полного набора интегралов первого порядка. Получен полный список интегрируемых двухкомпонентных систем уравнений, построены их $x-$ и $y-$интегралы.

4. Проведена полная классификация систем уравнений с тремя интегралами первого порядка и одним второго. Приведены явные формулы для $x-$ и $y-$интегралов этих систем.

5. Получен класс нелинейных гиперболических систем уравнений, обладающих двумя интегралами первого порядка и двумя второго. Для найденных систем уравнений построены $x-$ и $y-$ интегралы, общие решения, а также решения задач Гурса.

[4]Habibullin I., Zheltukhina N. and Pekcan A. *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$ // J. Math. Phys. **50** (2009) 102710.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы в исследовании нелинейных гиперболических систем уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2006 г.);

2. 38, 40-е региональные молодежные конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2007, 2009 гг.);

3. Уфимская международная математическая конференция, посвященная памяти А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2007 г.);

4. Российская конференция "Математика в современном мире", посвященная 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2007 г.);

5. Международная конференция MOGRAN-13 "Симметрии и точные решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений" (Уфа, 2009 г.);

6. Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании" (Уфа, 2009, 2010 гг.);

7. Международная научная конференция "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" (Владикавказ, 2010 г.);

8. VII Международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", посвященная 110-летию академика М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2010 г.);

9. Всероссийская школа-конференция молодых исследователей и V Всероссийская конференция, посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова "Актуальные проблемы прикладной математики и механики" (Абрау-Дюрсо, 2010 г.);

10. Всероссийская конференция "Нелинейные волны: теория и новые приложения", посвященная памяти чл.-корр. РАН В.М. Тешукова и приуроченная к 65-летию со дня его рождения (Новосибирск, 2011 г.);

11. Международная конференция "Спектральная теория операторов и ее приложения", посвященная памяти выдающегося ученого-математика, д.ф.-м.н., профессора Анатолия Гордеевича Костюченко (Уфа, 2011 г.);

12. VI Уфимская международная конференция "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения" (Уфа, 2011 г.);

13. научный семинар кафедры математики Уфимского государствен-

ного авиационного технического университета под руководством профессора В.А. Байкова (Уфа, 2011 г.);

14. научный семинар кафедры дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета под руководством профессоров А.В. Жибера и И.Т. Хабибуллина (Уфа, 2010, 2011 гг.);

15. научный семинар по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с ВЦ УНЦ РАН под руководством профессоров Л.А. Калякина и В.Ю. Новокшенова (Уфа, 2011 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 22 работы, из них статьи [1]-[5] в журналах из списка ВАК.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 56 наименований. Объем диссертации составляет 146 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во *введении* проведен обзор литературы по теме диссертации, описаны постановка задачи, методы исследования и приведено краткое содержание работы.

Для удобства дальнейшего изложения введем набор переменных

$$\begin{aligned} x,\ y,\ u,\ u_1 = u_x,\ u_2 = u_{xx},\ u_3 = u_{xxx}, \ldots, \\ \bar{u}_1 = u_y,\ \bar{u}_2 = u_{yy},\ \bar{u}_3 = u_{yyy}, \ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Легко видеть, что всякая смешанная производная от u может быть выражена через функции (3), которые нельзя связать между собой, пользуясь уравнениями (1) и их дифференциальными следствиями. Поэтому во всех определениях и выкладках они считаются независимыми переменными.

Обозначим через $\bar{D}(D)$ — оператор полного дифференцирования по переменной y (x) в пространстве локально аналитических функций, каждая из которых зависит от конечного числа переменных (3).

Определение 0.2. *Функция* $\omega = \omega(x, y, u, u_1, \ldots, u_m)$ *называется* $x-$*интегралом* $m-$*го порядка системы уравнений* (1), *если* $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_m^i}\right)^2 \neq 0$ *и* $\bar{D}\omega = 0$. *Аналогично,* $\bar{\omega} = \bar{\omega}(x, y, u, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p)$ – $y-$*интеграл* $p-$*го порядка системы уравнений* (1), *если* $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{u}_p^i}\right)^2 \neq 0$ *и* $D\bar{\omega} = 0$.

Определение 0.3. X*-интегралы* $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^k$ *порядков* $s_1, s_2, \ldots, s_k$ *соответственно, называются независимыми, если* $D^j\omega^i,\ i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 0, 1, \ldots, s - s_i,\ s = \max_j(s_j)$ *функционально независимы.*

В статье Гурьевой А. М., Жибера А. В.[5] показано, что максимальное число независимых $x-$интегралов равно порядку n исходной системы.

Определение 0.4. *Система уравнений (1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует полный набор независимых* $x-$ *и* $y-$ *интегралов.*

В *первом параграфе* приводится критерий независимости интегралов системы уравнений (1). Доказано, что интегралы независимы тогда и только тогда, когда они независимы в главном.

Для того, чтобы сформулировать основной результат *второго параграфа*, определим $x-$ и $y-$характеристические кольца системы уравнений (1).

Обозначим через $\Im$ пространство локально аналитических функций, каждая из которых зависит от конечного числа переменных x, y, $\bar{u}_1$, u, u_1, $u_2, \ldots \ldots, u_k, \ldots$. Оператор $\bar{D}$ на функциях из $\Im$ действует по правилу

$$\bar{D} = \bar{u}_2^i X_i + X_{n+1},$$

где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^i}, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$X_{n+1} = \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u}_1^i \frac{\partial}{\partial u^i} + F^i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + D(F^i) \frac{\partial}{\partial u_2^i} + \ldots + D^{k-1}(F^i) \frac{\partial}{\partial u_k^i} + \ldots .$$

$X-$характеристическое кольцо Ли уравнений (1) есть кольцо A, порожденное векторными полями $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$. Аналогично определяется $y-$ характеристическое кольцо Ли $\bar{A}$.

Классификация нелинейных гиперболических систем уравнений, интегрируемых по Дарбу, основана на следующем критерии.

Теорема 2.1. *Система уравнений (1) интегрируема по Дарбу, если и только если, характеристические кольца Ли* A *и* $\bar{A}$ *конечномерны.*

Кроме того, зная порядки интегралов системы уравнений (1), можно определить размерность ее характеристических колец.

Теорема 2.2. *Пусть система уравнений* (1) *имеет полный набор независимых* $x-$*интегралов* $\omega^i(x, y, u, u_1, \ldots, u_{s_i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *тогда размерность ее* $x-$*характеристического кольца Ли* A *определяется следующим образом:*

[5] Гурьева А. М., Жибер А. В. *О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений* // Вестник УГАТУ. – 2005. – Т. 6. – № 2 (13). – С. 26 - 33.

a) если существуют p, q, r *такие, что* $F^p_y \cdot F^q_{\bar{u}^r_1} \neq 0$, *то*

$$\dim A = 1 + n + \sum_{i=1}^{n} s_i;$$

b) если $F^i_y = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *и существуют* p, q : $F^p_{\bar{u}^q_1} \neq 0$, *то*

$$\dim A = n + \sum_{i=1}^{n} s_i;$$

c) если $F^i_{\bar{u}_1} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *и существует* p : $F^p_y \neq 0$, *то*

$$\dim A = 1 + \sum_{i=1}^{n} s_i;$$

d) если $F^i_y = F^i_{\bar{u}_1} = 0$ *для любого* $i = 1, 2, \ldots, n$, *то*

$$\dim A = \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

Кроме этого, в случаях b и d предполагается, что $x-$*интегралы не зависят от переменной* y.

В *параграфе 3 главы 1* для системы уравнений вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x) \ (u^i_{xy} = F^i, \ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

приведено необходимое условие интегрируемости по Дарбу. А именно, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $x-$*характеристическое кольцо Ли* A *системы уравнений* (4) *имеет размерность* $m < \infty$. *Тогда правые части системы* (4) *удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

$$\frac{\partial^{n_i} F^k}{\partial (u^i)^{n_i}} = \sum_{j=1}^{n_i - 1} \alpha^i_j \frac{\partial^j F^k}{\partial (u^i)^j},$$

$$n_i \leq m - n, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что из теоремы 3.1. следует, что если $x-$характеристическое кольцо системы уравнений (4) конечномерно, то правые части $F^1, F^2, \ldots, F^n$ являются квазиполиномами переменных $u^1, u^2, \ldots, u^n$.

Для доказательства теоремы 3.1., как и большинства последующих, используется следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть* $u-$*решение системы уравнений* (1) *и векторные поля* Z *и* $\bar{Z}$ *имеют вид*

$$Z=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i^j\frac{\partial}{\partial u_i^j},\ \alpha_i^j=\alpha_i^j(x,y,\bar{u}_1,u,u_1,u_2,\ldots,u_{k_{ij}}),$$
$$\bar{Z}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_i^j\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i^j},\ \bar{\alpha}_i^j=\alpha_i^j(x,y,u,u_1,\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_{k_{ij}}).$$

Тогда соотношения

$$[D,Z]=0,\ [\bar{D},\bar{Z}]=0$$

выполняются тогда и только тогда, когда $Z=0$ *и* $\bar{Z}=0$ *соответственно.*

Вторая глава посвящена задаче классификации интегрируемых систем уравнений вида

$$u^i_{xy}=F^i(u,u_x,u_y),\quad i=1,2,\ldots,n,\ u=(u^1,u^2,\ldots,u^n).$$

В *параграфе 4* показано, что двухкомпонентная система уравнений

$$u_{xy}=f(u,v),\ v_{xy}=\phi(u,v) \tag{5}$$

с интегралом первого порядка приводится к вырожденной

$$u_{xy}=f(u,v),\ v_{xy}=0.$$

А для систем уравнений (5) с интегралами второго порядка справедливы следующие утверждения.

Лемма 4.1. *Если система уравнений* (5) *имеет интегралы второго порядка* $\omega(u,v,u_1,v_1,u_2,v_2)$, $W(u,v,u_1,v_1,u_2,v_2)$, *то их можно привести к виду:*

$$\begin{aligned}\omega&=u_2+c_{11}u_1^2+c_{12}u_1v_1+c_{22}v_1^2,\\ W&=v_2+d_{11}u_1^2+d_{12}u_1v_1+d_{22}v_1^2,\end{aligned} \tag{6}$$

где $c_{11},\ c_{12},\ c_{22},\ d_{11},\ d_{12},\ d_{22}$ *– произвольные постоянные.*

Теорема 4.1. *Система уравнений* (5) *с интегралами* (6) *сводится к одному из следующих видов:*

$$u_{xy}=a_{11}e^u+a_{12}e^v,\ v_{xy}=a_{21}e^u+a_{22}e^v, \tag{7}$$

либо

$$u_{xy}=(\delta_1+u+\delta_2v)e^v,\quad v_{xy}=e^v.$$

Из теоремы 2.1. следует, что если система уравнений

$$u^i_{xy} = F^i(u, u_x, u_y), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; u = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$$

интегрируема по Дарбу, то характеристические кольца линеаризованной системы

$$v^i_{xy} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F^i}{\partial u^j} v^j + \frac{\partial F^i}{\partial u^j_x} v^j_x + \frac{\partial F^i}{\partial u^j_y} v^j_y \right), \; i = 1, 2, \ldots, n$$

конечномерны.

В *параграфе 5* рассматриваются экспоненциальные системы уравнений (7). При этом для решения задачи классификации используется подход, основанный на исследовании структуры характеристической алгебры линеаризации системы уравнений:

$$p_{xy} = a_{11} e^u p + a_{12} e^v q, \quad q_{xy} = a_{21} e^u p + a_{22} e^v q.$$

Получены все уравнения для которых размерность характеристической алгебры линеаризации не превышает 9. Показано, что правые части этих систем задаются матрицами Картана простой алгебры Ли.

В *параграфе 6* исследуются системы уравнений

$$u^i_{xy} = F^i(u, u_1, \bar{u}_1), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; u = (u^1, u^2, \ldots, u^n) \tag{8}$$

с полным набором $x-$ и $y-$интегралов первого порядка

$$\omega^i(u, u_1), \; \bar{\omega}^i(u, \bar{u}_1), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Показано, что правая часть системы уравнений (8), (9) имеет следующий вид

$$F^i(u, u_1, \bar{u}_1) = -\Gamma^i_{kj}(u) u^k_1 \bar{u}^j_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Согласно теореме 2.2., размерность $x-$ и $y-$характеристических колец Ли системы уравнений (8), (9) равны $2n$. Это условие позволяет получить следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Система уравнений (8), (10) обладает максимальным числом $x-$ и $y-$интегралов первого порядка, если и только если, выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma^p_{kj} - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma^p_{ki} + \Gamma^q_{kj} \Gamma^p_{qi} - \Gamma^q_{ki} \Gamma^p_{qj} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma^p_{jk} - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma^p_{ik} + \Gamma^q_{jk} \Gamma^p_{iq} - \Gamma^q_{ik} \Gamma^p_{jq} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Соотношения (11) позволяют полностью описать двухкомпонентные системы уравнений (8)-(10).

Теорема 6.2. *Любая система уравнений*

$$u^i_{xy} = -\Gamma^i_{kj}(u) u^k_1 \bar{u}^j_1, \quad i = 1, 2,$$

обладающая полным набором $x-$ и $y-$интегралов первого порядка, с точностью до точечных преобразований сводится к следующей

$$u^1_{xy} = u^2_1 \bar{u}^1_1, \quad u^2_{xy} = \alpha^{'}(u^1) u^1_1 \bar{u}^1_1 + \alpha(u^1) u^2_1 \bar{u}^1_1. \tag{12}$$

Интегралы системы (12) вычисляются по формулам

$$\bar{\omega}^1 = e^{-u^2} \bar{u}^2_1 \quad \text{и} \quad \bar{\omega}^2 = -\alpha(u^1)\bar{u}^1_1 + \bar{u}^2_1,$$
$$\omega^1 = -\alpha(u^1) u^1_1 + u^2_1, \quad \omega^2 = -\left(A^{'}(u^1) + \alpha(u^1) A(u^1)\right) u^1_1 + A(u^1) u^2_1,$$

где

$$A(u^1) = \int e^{-\int \alpha(u^1) du^1} du^1.$$

В *седьмом параграфе* проведена классификация двухкомпонентных систем уравнений

$$u^i_{xy} = F^i(u, u_1, \bar{u}_1), \quad i = 1, 2, \ u = (u^1, u^2), \tag{13}$$

обладающих тремя интегралами первого порядка и одним второго

$$\omega^1(u, u_1), \ \omega^2(u, u_1, u_2), \ \bar{\omega}^1(u, \bar{u}_1), \ \bar{\omega}^2(u, \bar{u}_1). \tag{14}$$

Доказано, что система уравнений (13) обладает интегралами вида (14) тогда и только тогда, когда

$$u^1_{xy} = u^1_1 \bar{u}^2_1, \ u^2_{xy} = \bar{r}(u^1, \bar{u}^1_1, \bar{u}^2_1) u^1_1,$$

где функция $\bar{r}$ является решением следующего уравнения

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1} + \bar{u}^2_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{u}^1_1} + \bar{r} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{u}^2_1} + \bar{u}^1_1 \frac{P^{'}(u^1)}{2} + P(u^1) \bar{u}^2_1 = 0.$$

При этом

$$\omega^1 = e^{-u^2} u^1_1, \ \omega^2 = u^2_2 - u^2_1 \frac{D\omega^1}{\omega} - \frac{\left(u^2_1\right)^2}{2} + \frac{1}{2} P(u^1) e^{2u^2} (\omega^1)^2,$$

а $y-$интегралы $\bar\omega^1$ и $\bar\omega^2$ определяются из уравнений в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1}+\bar u_1^2\frac{\partial}{\partial \bar u_1^1}+\bar r\frac{\partial}{\partial \bar u_1^2}\right)\bar\omega=0,\ \frac{\partial}{\partial u^2}\bar\omega=0.$$

В *третьей главе* рассматриваются нелинейные гиперболические системы уравнений (13) с интегралами вида

$$\omega^1(u,u_1),\ \omega^2(u,u_1,u_2),\ \bar\omega^1(u,\bar u_1),\ \bar\omega^2(u,\bar u_1,\bar u_2). \tag{15}$$

Показано, что система уравнений (13) с интегралами (15), удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial u_1^1}\left(\frac{\omega^1_{u_1^1}}{\omega^1_{u_1^2}}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial u_1^2}\left(\frac{\omega^1_{u_1^1}}{\omega^1_{u_1^2}}\right)\right)^2\neq 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial \bar u_1^1}\left(\frac{\bar\omega^1_{\bar u_1^1}}{\bar\omega^1_{\bar u_1^2}}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial \bar u_1^2}\left(\frac{\bar\omega^1_{\bar u_1^1}}{\bar\omega^1_{\bar u_1^2}}\right)\right)^2\neq 0,\end{aligned} \tag{16}$$

сводится к одному из следующих видов

$$\begin{aligned}u^1_{xy}&=A(u,u_1)\bar A(u,\bar u_1)+\tilde\Phi^1_{kj}(u)u_1^k\bar u_1^j,\\ u^2_{xy}&=\bar u_1^k\varphi_k(u)A(u,u_1)+u_1^k\psi_k(u)\bar A(u,\bar u_1)+\tilde\Phi^2_{kj}(u)u_1^k\bar u_1^j,\end{aligned}$$

либо

$$u^i_{xy}=\Gamma^i_{kj}(u)u_1^k\bar u_1^j,\quad i=1,2. \tag{17}$$

Условия (16) означают, что интегралы ω^1 и $\bar\omega^1$ точечной заменой $u^1=\varphi(p,q)$, $u^2=\psi(p,q)$ не приводятся к виду $\omega^1=W(p,q,p_1)$, $\bar\omega^1=\bar W(p,q,\bar p_1)$.

Отметим, что при преобразовании $u^i\to p^i(u^1,u^2)$, $i=1,2$ система уравнений (17) не меняет вид, при этом функции p^i можно выбрать так, что $\Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{22}=0$. Кроме этого будем предполагать, что $\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{21}=0$. Таким образом, мы рассматриваем систему уравнений:

$$u^1_{xy}=\Gamma^1_{1j}(u)u_1^1\bar u_1^j,\quad u^2_{xy}=\Gamma^2_{i2}(u)u_1^i\bar u_1^2 \tag{18}$$

с полным набором интегралов (15).

Из теоремы 2.2. следует, что размерность характеристических колец A и $\bar A$ для системы уравнений (18) с интегралами (15) равна 5. Изучение структуры характеристических колец позволяет получить условия на правые части системы. А именно справедливо утверждение.

Теорема 9.1. *Система уравнений* (18) *обладает набором* $x-$*интегралов* (15) *тогда и только тогда, когда справедливы соотношения*

$$\frac{\partial^2\Gamma^2_{22}}{\partial u^1\partial u^1}=\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial lnF}{\partial u^1},$$
$$\frac{\partial^2\Gamma^2_{22}}{\partial u^1\partial u^2}=\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial lnF}{\partial u^2},$$
$$-2\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial u^1}=\frac{\partial^2 lnF}{\partial u^1\partial u^2},$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1}+\Gamma^1_{11}-\frac{\partial lnF}{\partial u^1}\right)\left(\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u^1}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}\right)=0,$$
$$-\Gamma^2_{22}\left(\frac{\partial lnF}{\partial u^2}+\Gamma^2_{22}\right)=\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\partial lnF}{\partial u^2}+\Gamma^2_{22}\right),$$
$$\Gamma^2_{12}\left(F-\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial u^1}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u^2}-\Gamma^2_{22}+\Gamma^1_{12}-\frac{\partial lnF}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u^1}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}\right),$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2}+\Gamma^1_{12}\right)\left(\frac{\partial lnF}{\partial u^1}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}\right)+\Gamma^2_{12}\left(\frac{\partial lnF}{\partial u^2}+\Gamma^2_{22}\right)-F=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1}+\Gamma^1_{11}\right)\left(\frac{\partial lnF}{\partial u^1}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}\right)+\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u^1}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}=0,$$

где

$$F(u^1,u^2)=\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u^1}-\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial u^2}.$$

Рассматривая $y-$характеристическое кольцо системы уравнений (18), получаем “симметричный” вариант теоремы 9.1.

Анализ полученных условий позволяет доказать, что система уравнений (18) с полным набором интегралов (15) приводится к одной из следующих:

$$u^1_{xy}=\frac{u^1_1\bar u^1_1}{X}+\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{\alpha Y}\right)u^1_1\bar u^2_1,\quad u^2_{xy}=\frac{u^2_1\bar u^2_1}{Y}+\left(\frac{1}{\alpha X}+\frac{1}{\alpha^2 Y}\right)u^1_1\bar u^2_1,$$
$$X=u^1+u^2+c,\quad Y=\frac{u^1}{\alpha^2}+u^2-c, \tag{19}$$

либо

$$u^1_{xy}=\frac{u^2}{X}u^1_1\bar{u}^1_1+\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{\alpha Y}\right)u^1u^1_1\bar{u}^2_1,$$
$$u^2_{xy}=\frac{u^1}{Y}u^2_1\bar{u}^2_1+\left(\frac{\alpha}{X}+\frac{1}{Y}\right)u^2u^1_1\bar{u}^2_1, \qquad (20)$$
$$X=u^1u^2+d_2,\quad Y=u^1u^2+c_2,\quad \frac{\alpha+1}{\alpha}d_2=(\alpha+1)c_2,$$

где c – произвольная постоянная, $c_2,\ d_2,\ \alpha$ – ненулевые постоянные.

В *параграфах 10 - 12* для систем уравнений (19), (20) приводится построение $x-$ и $y-$интегралов, точных решений, а также решений задач Гурса с данными на характеристиках

$$u^1(x_0,y)=\phi_1(y),\quad u^2(x_0,y)=\phi_2(y),$$
$$u^1(x,y_0)=\psi_1(x),\quad u^2(x,y_0)=\psi_2(x).$$

Так, например, система уравнений (19) при $\alpha=1$ имеет интегралы

$$\omega^1=2u^2-\frac{u^2_1}{z}+2c\ lnz,\ \bar{\omega}^1=2u^1-\frac{\bar{u}^1_1}{\bar{z}}-2c\ ln\bar{z},$$
$$\omega^2=\frac{z_1}{z}-z,\quad \bar{\omega}^2=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}}-\bar{z},$$

где

$$z=\frac{u^1_1}{X},\ \bar{z}=\frac{\bar{u}^2_1}{Y},\ z_1=Dz,\ \bar{z}_1=\bar{D}\bar{z},$$

при этом общее решение дается формулами

$$u^1(x,y)=\frac{A(x)+B(y)}{(C(x)+D(y))^2}+c\ ln\frac{1}{C(x)+D(y)}-\frac{B'(y)}{D'(y)(C(x)+D(y))}+\frac{c}{2},$$
$$u^2(x,y)=\frac{A(x)+B(y)}{(C(x)+D(y))^2}-c\ ln\frac{1}{C(x)+D(y)}-\frac{A'(x)}{C'(x)(C(x)+D(y))}-\frac{c}{2},$$

а решение задачи Гурса представимо в виде

$$u^1(x,y)=\frac{d(y)(\phi_1(y)-\phi_2(y)+2c\ln d(y))+\phi_2(y_0)}{r(x)+d(y)-1}-c\ln(r(x)+d(y)-1)+$$
$$+\frac{(\psi_1(x)+c\ln r(x))r(x)^2-\psi_1(x_0)r(x)}{(r(x)+d(y)-1)^2}+$$
$$+\frac{(\phi_2(y)-c\ln d(y))d(y)^2-\phi_2(y_0)d(y)}{(r(x)+d(y)-1)^2},$$

$$
\begin{aligned}
u^2(x,y) = & \frac{r(x)(\psi_2(x)-\psi_1(x)-2c\ln r(x))+\psi_1(x_0)}{r(x)+d(y)-1} + c\ln(r(x)+d(y)-1)+ \\
& + \frac{(\psi_1(x)+c\ln r(x))r(x)^2-\psi_1(x_0)r(x)}{(r(x)+d(y)-1)^2} + \\
& + \frac{(\phi_2(y)-c\ln d(y))d(y)^2-\phi_2(y_0)d(y)}{(r(x)+d(y)-1)^2},
\end{aligned}
$$

где

$$
d(y) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} \frac{\phi_2'(y)}{c-\phi_1(y)-\phi_2(y)}dy\right),
$$

$$
r(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{\psi_1'(x)}{c+\psi_1(x)+\psi_2(x)}dx\right).
$$

Заключение содержит обзор полученных результатов.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Васильевичу Жиберу за всестороннюю поддержку, постоянное внимание и помощь в работе.

Публикации по теме диссертации в изданиях из перечня ВАК

1. Жибер А.В., Костригина О.С. *Точно интегрируемые модели волновых процессов*// Вестник УГАТУ. – 2007. – Т. 9. – № 7 (25). – С. 83 - 89.

2. Костригина О.С. *Двухкомпонентные гиперболические системы уравнений экспоненциального типа с конечномерной характеристической алгеброй Ли* // Уфимский математический журнал. – 2009. – Т. 1. – №3 – С. 57 - 64.

3. Жибер А. В., Костригина О. С. *Характеристические алгебры нелинейных гиперболических систем уравнений* // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2010. – Т. 3. – № 2. – С. 173 - 184.

4. O. S. Kostrigina and A. V. Zhiber *Darboux-integrable two-component nonlinear hyperbolic systems of equations* // J. Math. Phys. 52, 033503 (2011); (32 pages).

5. Жибер А.В., Костригина О.С. *Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Уфимский математический журнал. – 2011. – Том 3. – № 3. – С. 67 - 79.

Публикации в других изданиях

6. Жибер А.В., Костригина О.С. *Нелинейные гиперболические системы уравнений с интегралами первого порядка* // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Труды участников. Ростов-на-Дону: РГУ. – 2006. – С. 228 - 229.

7. Костригина О.С. *О нелинейных гиперболических системах уравнений с конечномерной характеристической алгеброй Ли* // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 38-й Региональной молодежной конференции. Екатетеринбург: ИММ УрО РАН . – 2007. – С. 164 - 168.

8. Костригина О.С. *Двухкомпонентные гиперболические системы уравнений лиувиллевского типа* // Материалы Уфимской международной математической конференции, посвященной памяти А.Ф. Леонтьева. Уфа: ИМ с ВЦ УНЦ РАН. – 2007. – Т. 2. – С. 24 - 25.

9. Жибер А.В., Костригина О.С. *Интегрируемые двумерные динамические системы и характеристические алгебры Ли* // Труды ИМ УНЦ РАН. – 2007. – вып. 5. – С. 195 - 201.

10. Жибер А.В., Костригина О.С. *О нелинейных гиперболических системах уравнений, интегрируемых по Дарбу* // Российская конференция "Математика в современном мире", посвященная 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Новосибирск: Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН. – 2007. (http://math.nsc.ru/conference/conf50/Abstracts.pdf).

11. Жибер А.В., Костригина О.С. *Нелинейные гиперболические системы уравнений и характеристические алгебры Ли* // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 40-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН . – 2009. – С. 131 - 135.

12. Жибер А.В., Костригина О.С. *Характеристические алгебры Ли и нелинейные гиперболические системы уравнений* // Международная конференция MOGRAN-13 "Симметрии и точные решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений". Тезисы докладов. Уфа: УГАТУ, ИМ с ВЦ УНЦ РАН, ИМ УНЦ РАН. – 2009. – С. 15.

13. Костригина О.С. *Двухкомпонентные гиперболические системы уравнений с интегралами первого и второго порядка* // "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". Тезисы докладов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. Уфа: РИЦ БашГУ. – 2009. – С. 18.

14. Костригина О.С. *Двухкомпонентные гиперболические системы уравнений с интегралами первого и второго порядка.* //Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". Математика. Т. 1. Уфа: РИЦ БашГУ. – 2009. – С. 209 - 215.

15. Жибер А.В., Костригина О.С. *Характеристические алгебры Ли и нелинейные гиперболические системы уравнений* // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов международной научной конференции. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. – 2010. – С. 190 - 191.

16. Жибер А.В., Костригина О.С. *Характеристические алгебры Ли и нелинейные гиперболические системы уравнений* // Итоги науки. Юг России. Математический форум. "Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям."– Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. – 2010. – Т. 4. – С. 240 - 251.

17. Жибер А.В., Костригина О.С. *Характеристические алгебры Ли и классификация интегрируемых нелинейных гиперболических систем уравнений* // VII Международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", посвященная 110-летию академика М.А. Лаврентьева. Тезисы докладов. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН. – 2010. – С. 28.

18. Жибер А.В., Костригина О.С. *Нелинейные интегрируемые системы уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Актуальные проблемы прикладной математики и механики. Тезисы докладов Всероссийской школы-конференции молодых исследователей и V Всероссийской конференции, посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова (Абрау - Дюрсо, 13-18 сентября 2010 г.) – 2010. С. 39 - 40.

19. Костригина О.С. *Построение общего решения одной двухкомпонентной нелинейной гиперболической системы уравнений* // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: Тезисы докла-

дов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. Уфа: РИЦ БашГУ. – 2010. – С. 4.

20. Кострыгина О.С. *Построение общего решения одной двухкомпонентной нелинейной гиперболической системы уравнений* // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании”. Математика. Т. 1. Уфа: РИЦ БашГУ. – 2010. – С. 66 - 75.

21. Жибер А.В., Кострыгина О.С. *Точно интегрируемые модели волновых процессов* // Всероссийская конференция “Нелинейные волны: теория и новые приложения”, посвященная памяти чл.-корр. РАН В.М. Тешукова и приуроченная к 65-летию со дня его рождения. – Новосибирск. – 2011. – С. 31.

22. Жибер А.В., Кострыгина О.С. *Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка* // VI Уфимская международная конференция “Комплексный анализ и дифференциальные уравнения” посвященная 70-летию чл.корр.РАН В.В. Напалкова. Сборник тезисов. Уфа: ИМВЦ. – 2011. – С. 63 - 64.