На правах рукописи

Хабибуллин Фархат Булатович

ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НУЛЕЙ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Башкирский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Кривошеев Александр Сергеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук Каюмов Ильгиз Рифатович

доктор физико-математических наук Мусин Ильдар Хамитович

Ведущая организация: Южный федеральный университет

Защита состоится ____________________ 2012 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 при Институте математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН по адресу: 450077, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН.

Автореферат разослан ____________________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.057.01,
кандидат физико-математических наук Попенов С. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследование взаимосвязи между распределением нулей голоморфной функции в области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ростом модуля этой функции вблизи границы $\partial\Omega$ представляет значительный интерес не только как внутренний вопрос теории распределения значений (в частности, нулей) голоморфных функций, но и как необходимый, а зачастую и решающий этап исследования таких вопросов теории функций комплексного переменного, как теории аппроксимации, интерполяции, аналитического продолжения, спектрального синтеза и т.д.

В качестве основной отправной точки исследования распределения нулей голоморфных функций из весовых классов в ограниченных областях Ω можно рассматривать классический результат Р. Неванлинны о законченном описании множества нулей для алгебры H^∞ ограниченных голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и аналогичные результаты для классов Неванлинны и Неванлинны–Джрбашяна. Они породили широкий круг подобных исследований для самых различных типов весовых алгебр или пространств голоморфных в $\mathbb{D}$ функций, которые с незатухающей интенсивностью продолжаются и поныне. Не претендуя даже на минимально достаточный охват материалов по этой очень обширной и богатой результатами тематике, отметим здесь лишь обзоры С. В. Шведенко (1985 г.), А. Б. Александрова (1985 г.), П. Колвела (1985 г.), Х. Хеденмальма (1998 г.) и наиболее близкие нам по типу рассматриваемых алгебр и пространств монографии А. Джрбашяна и Ф. А. Шамояна (1988 г.), и Х. Хеденмальма, Б. Коренблюма и К. Жу (2000 г.), результаты законченного характера Ч. Н. Линдена (1956, 1964) и Ф. А. Шамояна (1978, 1983 гг.), существенно развившего исследования М. М. Джрбашяна, Ч. Горовица (1995 г.) для алгебр функций умеренного “степенного” и быстрого роста в $\mathbb{D}$, а также работы Б. Коренблюма (1975 г.), Е. Беллера и Ч. Горовица (1994 г.), К. Сейпа (1994–1995 гг.), Х. Бруны и Х. Массанеды (1995 г.), Д. Льюкинга (1996 г.) для алгебр и пространств функций медленного “логарифмического” роста в $\mathbb{D}$. Для весовых алгебр в произвольных ограниченных областях и в круге эти вопросы достаточно детально исследовались в недавних диссертациях Л. Ю. Чередниковой (2005 г.) и Е. Г Кудашевой (2010).

Наше исследование сконцентрировано на выявлении условий, при которых последовательность точек в единичном круге $\mathbb{D}$ или в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является подмножеством (подпоследовательностью) нулей или точной последовательностью нулей для заданного пространства голоморфных функций в Ω, выделяемого ограничением на рост вблизи границы этой области через поточечные оценки посредством системы субгармонических мажорант (весов). Рассматриваемые нами пространства, вообще говоря, не алгебры, т. е. поточечные произведения двух функций из таких пространств могут и не принадлежать им. Следует отметить, что исследования подобного рода в случае нерадиальной системы весов в $\mathbb{D}$ или же для произвольных ограниченных областей Ω если и есть, то имеют эпизодический характер при весьма специальных жестких ограничениях на систему субгармонических мажорант явного вида, если исключить упомянутые диссертации Л. Ю. Чередниковой (подпоследовательности нулей для алгебр) и Е. Г Кудашевой (последовательности нулей для функций умеренного роста в круге). Нередко подпоследовательность нулей для класса функций не является последовательностью нулей для этого класса. Особенно велика вероятность этого, если весовой класс определяется нерадиальными по существу весами. Все это актуализирует, как изучение последовательностей нулей, так и исследование подпоследовательностей нулей для весовых классов голоморфных функций.

Цели работы. Исследованы следующие аспекты очерченной выше тематики:

- достаточные условия для множеств неединственности (подпоследовательностей нулей) в весовых пространствах голоморфных в ограниченной области Ω функций, определяемых, вообще говоря, нерадиальной (в случае круга) системой субгармонических функций-весов;

- устойчивость подпоследовательностей нулей в таких весовых пространствах при их достаточно малых сдвигах в том смысле, что малые сдвиги нулей превращают их в подпоследовательность нулей для некоторого, возможно, чуть более широкого весового пространства голоморфных функций;

- достаточные условия для точных последовательностей нулей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ в весовых алгебрах и пространствах голоморфных в круге $\mathbb{D}$ функций, имеющих умеренный рост вблизи единичной окружности, а субгармонические функции-веса при этом имеют умеренный рост и не обязательно радиальны и положительны;

- устойчивость последовательностей нулей Λ в весовых алгебрах и пространствах из предыдущего пункта при малых сдвигах точек λ_k.

Методы исследования. В диссертации наряду со стандартной техникой теории функций комплексного переменного, теории субгармонических функций и функционального анализа используется модификация неконструктивного метода выметания из работ Б. Н. Хабибуллина, Л. Ю. Чередниковой, Е. Г. Кудашевой, основанного на аппарате мер и потенциалов Йенсена и позволяющего устанавливать достаточные условия для подпоследовательностей нулей (множеств неединственности) в весовых пространствах голоморфных функций в области Ω, а также для последовательностей нулей в круге $\mathbb{D}$, не прибегая к каким-либо явным представлениям этих функций. Широко привлекались также геометрические методы на плоскости.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) установлены достаточные условия для подпоследовательностей нулей (множеств неединственности) в весовых пространствах голоморфных в области Ω функций, определяемых, вообще говоря, *нерадиальной*, а иногда и *знакопеременной* системой субгармонических функций-весов;

2) даны новые условия устойчивости множеств неединственности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ для весовых пространств предыдущего пункта в терминах величины сдвига точек λ;

3) получены достаточные условия для точных последовательностей нулей в весовых пространствах голоморфных в $\mathbb{D}$ функций, определяемых, вообще говоря, *нерадиальной*, а иногда и *знакопеременной* системой субгармонических функций-весов умеренного роста (грубо оценивая, растущих медленнее функции $z \mapsto \frac{1}{1-|z|}$);

4) представлены новые условия устойчивости (под)последовательностей нулей $\Lambda = \{\lambda_k\}$ для весовых пространств предыдущего пункта в терминах величины сдвига точек λ, при которых новая полученная последовательность становится уже точной последовательностью нулей для некоторого, возможно чуть большего, весового пространства голоморфных в $\mathbb{D}$ функций.

Все результаты частью новые даже для весовых пространств с положительными и радиальными систем весами в круге, которые в основном только и рассматривались ранее другими исследователями. Все условия на (под)последовательности нулей формулируются в терминах разбиения Ω на малые подмножества и мажорирования числа точек последовательности Λ на этих подмножествах мерами Рисса субгармонических функций-весов, определяющих пространство.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных областях математики (теория функций, теория операторов, дифференциальные уравнения, теория аппроксимации и др.), где требуются информация о взаимосвязи распределения нулей голоморфных в области функций и их возможным минимальным ростом вблизи границы области определения. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях, проводимых в Институте математики с ВЦ УНЦ РАН, С.-Петербургском отделении Математического института РАН, Московском государственном университете, Южном федеральном университете, Приволжском федеральном университете (Казанском государственном университете) и Институте математики и механики при КГУ, Башкирском государственном университете, Брянском государственном педагогическом университете, а также в других ведущих российских и зарубежных (Украина, США, Испания, Норвегия, Израиль, Швеция, Китай, Франция и пр.) научных центрах.

Аппробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на нескольких Региональных школах-конференциях для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике (Уфа, БашГУ), трех Международных школах-конференциях для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, БашГУ, 2009–2011 гг.)Международной конференции «Геометрический анализ и его приложения» (Волгоградский государственный университет, Волгоград, 2004 г.), Международной конференции «Спектральная теория операторов и ее приложения», посвященной памяти профессора А. Г. Костюченко (Уфа, 2011 г.), X международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 2011 г.), на научных конференциях по научно-техническим программам Минобразования РФ (Уфа, БашГУ), на научно-исследовательских молодежных семинарах «Контрпримеры в алгебре, анализе, геометрии» кафедры высшей алгебры и геометрии (руководитель Б. Н. Хабибуллин), на VI Уфимской международной конференции «Комплексный анализ и дифференциальные уравнения» (Уфа, 2011 г.), на Общегородском научном семинаре по теории функций и функциональному анализу в Институте математики с ВЦ УНЦ РАН (руководитель чл.-корр. РАН В. В. Напалков).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ [1]–[9]. Четыре статьи [1], [2], [3], [4] опубликованы в журналах, входящих в список, рекомендованный ВАК. Перечень их — в конце автореферата. Из двух работ с соавторами [1]–[2] на защиту выдвигаются только те результаты, которые принадлежат лично диссертанту Ф. Б. Хабибуллину. Из тезисов совместных докладов на конференциях, объединяющих работы нескольких авторов (см. [5], [9]), диссертация содержит в себе также только части, разработанные лично диссертантом. Таким образом, все основные положения диссертации принадлежат Хабибуллину Ф. Б. и доказаны им.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из четырёх разделов (первый — Введение), разбитых на подразделы, и одной иллюстрации-чертежа. Объем диссертации — 98 страниц. Библиография — 68 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Во Введении (раздел 1.1, 1.2) излагается история вопроса, приводятся основные определения, понятия и соглашения, излагаются ключевые предшествующие результаты (Теоремы Р. Неванлинны, Ф. А. Шамояна, Б. Коренблюма, К. Сейпа, Д. Льюкинга, результаты Л. Ю. Чередниковой и Е. Г. Кудашевой и пр.).

Приведем сначала некоторые из основных определений, обозначений и соглашений, используемых в течение всей диссертации.

Всюду положительность числа, функции, меры и т. п. понимаем как $\geqslant 0$; аналогичное соглашение $\leqslant 0$ предлагается и для отрицательности. Если функция или отображение f на множестве A тождественно равна некоторому значению b, то пишем “$f \equiv b$ на A”; в противном случае — “$f \not\equiv b$ на A”. Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, *возрастающая*, если для любых $x_1, x_2 \in I$ неравенство $x_1 \leqslant x_2$ влечет за собой *нестрогое неравенство* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, и *убывающая*, если $-f$ — возрастающая.

Для $a \in [-\infty, +\infty]$ полагаем $a^+ := \max\{0, a\}$.

Для подмножества $D \subset \mathbb{C}$ через $\overline{D}$, ∂D, $\operatorname{diam} D$ обозначаем соответственно *замыкание, границу, диаметр* множества D в $\mathbb{C}$. Если $\overline{S}$ — компакт в D в индуцированной с $\mathbb{C}$ топологии, то S *предкомпактно в* D и обозначаем это как $S \Subset D$. Для $z \in \mathbb{C}$ и $S, D \subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{dist}(z, D)$ и $\operatorname{dist}(S, D)$ обозначаем евклидово расстояние соответственно от точки $z \in \mathbb{C}$ и множества S до множества D.

Последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}$ на области $\Omega \subset \mathbb{C}$ всегда предполагаются не имеющими точек сгущения в Ω.

Пусть f — голоморфная в области Ω функция. *Последовательность нулей* Zero_f *функции* $f \not\equiv 0$ определяется как последовательность, в которой каждая точка $\lambda \in \Omega$ повторяется равно столько раз, какова кратность нуля функции f в этой точке λ. Последовательность Λ в Ω называем *подпоследовательностью нулей функции* f (в записи $f(\Lambda) = 0$), если последовательность Zero_f включает в себя последовательность Λ с учетом кратности, т. е. число повторений каждой точки $\lambda \in \Omega$ в Zero_f не меньше числа повторений той же точки λ в последовательности Λ.

Пусть H — некоторый класс голоморфных функций в Ω, а Λ — последовательность в Ω. Если существует функция $f \in H$, для которой $\operatorname{Zero}_f = \Lambda$, то Λ — *последовательность нулей для* H. Если существует функция $f \not\equiv 0$ из H, для которой $f(\Lambda) = 0$, то Λ — *подпоследовательность нулей для* H. Каждая последовательность нулей Λ для H является подпоследовательностью нулей для H. Если H — линейное пространство над $\mathbb{C}$ или над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, то подпоследовательность нулей для H называем также *последовательностью неединственности для* H; в противном случае Λ — *последовательность единственности для* H. Каждой последовательности Λ в области Ω из можно сопоставить положительную целочисленную *считающую меру* n_Λ, построенную по правилу

$$n_\Lambda(B) := \sum_{\lambda_k \in B} 1, \quad B \subset \Omega, \tag{1}$$

— число точек λ_k, попавших в B.

Через $\operatorname{Hol}(\Omega)$ обозначаем линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ всех голоморфных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ функций f. Через $\operatorname{sbh}(\Omega)$ обозначаем класс всех субгармонических функций в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, включая в него и функцию $u \equiv -\infty$ на Ω; $\mathrm{sbh}^+(\Omega)$ — подкласс всех положительных функций из $\mathrm{sbh}(\Omega)$.

По произвольной функции (*весовой функции, весу*) $M\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ построим *весовое пространство голоморфных функций*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hol}(\Omega; M) :=& \bigl\{f \in \mathrm{Hol}(\Omega)\colon |f(z)| \leqslant C_f e^{M(z)},\ C_f \geqslant 0 \text{ — постоянная},\ z \in \Omega\bigr\}\\ =& \bigl\{f \in \mathrm{Hol}(\Omega)\colon\ \log|f| \leqslant M + c_f \text{ на } \Omega,\ c_f \text{ — постоянная}\bigr\}.\end{aligned}$$

Такое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ будет модельным на протяжении всей работы. Именно в такого вида пространствах и образованных из них всевозможных объединениях и будут исследоваться (под)последовательности нулей и их устойчивость при «малых шевелениях» этих (под)последовательностей.

Пусть $\mathcal{P}$ — семейство функций из $\mathrm{sbh}(\Omega)$, не содержащее функцию $\equiv -\infty$, которое далее называем *системой весов на* Ω, а функции из $\mathcal{P}$ — *весовыми*, или *весами*. Положим

$$\mathrm{Hol}^{\cup}(\Omega; \mathcal{P}) := \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{Hol}(\Omega; p).$$

Весовые классы в $\mathrm{Hol}(\Omega)$**.** Пусть $\mathcal{P}$ — *система весов на* Ω.

Пространства. Если система весов $\mathcal{P}$ обладает свойством

($\mathrm{H}^{\uparrow}$) *для любых* $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ *найдутся функция* $p \in \mathcal{P}$ *и постоянная* c, *при которых* $\max\{p_1(z), p_2(z)\} \leqslant p(z) + c$ *для всех* $z \in \Omega$,

то класс $\mathrm{Hol}^{\cup}(\Omega; \mathcal{P}) = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{Hol}(\Omega; p)$ образует векторное пространство над $\mathbb{C}$. В частности, если $\mathcal{P} = \{p\}$ — одна функция, то условие ($\mathrm{H}^{\uparrow}$) выполнено и

$$\mathrm{Hol}^{\cup}(\Omega; \mathcal{P}) = \mathrm{Hol}(\Omega; p) = \left\{f \in \mathrm{Hol}(\Omega)\colon\ \sup_{z \in \Omega}\bigl(\log|f(z)| - p(z)\bigr) < +\infty\right\}.$$

Если $p \in \mathrm{sbh}^+(\Omega)$, то для системы весов $\mathcal{P} = \{cp\colon c \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant c < 1\}$ выполнено условие ($\mathrm{H}^{\uparrow}$) и векторное пространство $\mathrm{Hol}^{\cup}(\Omega; \mathcal{P})$ обозначаем

$$H_p^1(\Omega) := \bigl\{f \in \mathrm{Hol}(\Omega)\colon \exists\, c_f < 1,\ \exists\, C_f \in \mathbb{R},\quad |f| \leqslant C_f \exp(c_f p)\bigr\}.$$

Если при этом $p(z) \to +\infty$ при $z \to \partial\Omega$, то

$$H_p^1(\Omega) = \left\{f \in \mathrm{Hol}(\Omega)\colon\ \limsup_{z \to \partial\Omega} \frac{\log|f(z)|}{p(z)} < 1\right\}. \tag{2}$$

В определенном смысле наиболее «жесткий» класс функций, рассматриваемый нами, — это пространство $\mathrm{Hol}^{\cup}(\Omega; \mathcal{P})$, построенное при фиксированной не обязательно положительной функции $p \in \mathrm{sbh}(\Omega)$, $p \not\equiv -\infty$, по системе весов

$$\mathcal{P} = \left\{p(z) + c \log\Bigl(1 + \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)}\Bigr)\colon c \geqslant 0\right\}, \quad z \in \Omega.$$

Такое пространство обозначаем далее как

$$H_{p+\log}(\Omega) = \left\{f \in \mathrm{Hol}(\Omega)\colon\ \limsup_{z \to \partial\Omega} \frac{\log|f(z)| - p(z)}{\log\Bigl(1 + \dfrac{1}{\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)}\Bigr)} < +\infty\right\}. \tag{3}$$

Алгебры. Если система весов $\mathcal{P}$ обладает свойством

($\mathrm{A}^{\uparrow}$) *для любых* $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ *найдутся функция* $p \in \mathcal{P}$ *и постоянная* c, *при которых* $p_1(z) + p_2(z) \leqslant p(z) + c$ *для всех* $z \in \Omega$,

то класс $H^{\cup}(\Omega; \mathcal{P})$ обозначаем как $A^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$. Класс функций $A^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$ замкнут относительно операции поточечного умножения. Если вместе с ($\mathrm{A}^{\uparrow}$) одновременно выполнено ($\mathrm{H}^{\uparrow}$), то $A^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$ — алгебра, т. е. векторное пространство над $\mathbb{C}$, одновременно являющееся кольцом относительно обычных операций поточечного сложения и умножения.

Если $p \in \operatorname{sbh}(\Omega)$ и система весов $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\mathcal{P} := \{cp \colon c \in \mathbb{R},\ 0 < c < +\infty\}, \tag{4}$$

то условие ($\mathrm{A}^{\uparrow}$) выполнено автоматически и класс $A^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$ обозначаем как $A^{\infty}_{p}(\Omega)$. Кроме того, когда $\mathcal{P} \subset \operatorname{sbh}^{+}(\Omega)$ и выполнено условие ($\mathrm{A}^{\uparrow}$), то, очевидно, имеет место и условие ($\mathrm{H}^{\uparrow}$), т. е. и в таком случае $A^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$ — алгебра. Если $p \in \operatorname{sbh}^{+}(\Omega)$ и система весов $\mathcal{P}$ имеет вид (4), то условия ($\mathrm{H}^{\uparrow}$) и ($\mathrm{A}^{\uparrow}$) выполнены автоматически и $A^{\infty}_{p}(\Omega)$ — вновь алгебра.

Для функции $p \in \operatorname{sbh}(\Omega)$, $p \not\equiv -\infty$, положительную меру $\nu_p = \frac{1}{2\pi}\Delta p$ (здесь Δ — оператор Лапласа, а равенство мыслится в смысле теории обобщенных функций) называем *мерой Рисса* функции p в Ω.

2. Подпоследовательности нулей для пространств голоморфных функций. В разделе 2 доказываются весьма общие Подготовительные теоремы 2.2, 2.3, 2.4 для дальнейшего их применения как к получению теорем о подпоследовательностях нулей, так и об их устойчивости. Эти Подготовительные теоремы (подраздел 2.2) охватывают произвольные области, но громоздки, недостаточно наглядны и носят промежуточный характер. Поэтому формулировки их здесь опускаются. В дальнейшем применении их мы ограничиваемся пространствами функций в ограниченных областях Ω. Доказательства Подготовительных теорем потребовали трудоемких вспомогательных усилий в области теории потенциала (выметание, меры и потенциалы Йенсена), в исследовании некоторых геометрических объектов на плоскости (звезды подмножеств, вздутия множеств и пр.) — см. подраздел 2.1.

Главные результаты о подпоследовательностях нулей и их устойчивости сосредоточены в разделе 3. Здесь также важную роль сыграли некоторые нетривиальные геометрические факты, сконцентрированные в разделе 3.1. В разделе 3.2 дается Теорема 3.1 о подпоследовательностях нулей для наиболее «мягкого» случая пространств H^1_p, если отойти от алгебр функций, в разделе 3.3 — Теорема 3.3 для наиболее «жесткого» случая пространств $H^{\log}_p$, а раздел 3.4 занят исследованиями в промежуточном типе весовых пространств $H_{p+\mathcal{S}}$.

Далее для краткости $d_\Omega(z) := \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$, $d_\Omega(S) := \operatorname{dist}(S, \partial\Omega)$, $S \subset \Omega$.

Кроме того, будет использовано обозначение $g_\Omega(0, \cdot)$ для функции Грина области Ω с полюсом в нуле при уловии $0 \in \Omega$.

Семейство подмножеств *локально конечно* в области, если для любого компакта из области число подмножеств из семейства, пересекающихся с компактом, конечно.

Теорема 3.1. *Пусть функция* $p \in \operatorname{sbh}^{+}(\Omega)$ *в ограниченной области* $\Omega \Subset \mathbb{C}$, *удовлетворяет условию*

(LD^1_0) *для любого числа* $b > 1$ *найдутся числа* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *и* c_b, *при которых*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\bigl(z + \varepsilon d_\Omega(z) e^{i\theta}\bigr)\, d\theta + \log\Bigl(1 + \frac{1}{d_\Omega(z)}\Bigr) \leqslant bp(z) + c_b, \quad z \in \Omega.$$

Пусть $\Sigma = \{S_l\}$ — локально конечное семейство борелевских предкомпактных подмножеств S_l в Ω, $l = 1, 2, \dots$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\operatorname{diam} S_l}{d_\Omega(S_l)} = 0\,. \tag{5}$$

Если для последовательности Λ на Ω выполнено условие

(RS) *для меры n_Λ, определенной в (1), и меры Рисса ν_p функции p при некотором их представлении в виде сумм мер*

$$n_\Lambda = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{(l)}\,, \quad \nu_p = \sum_{l=1}^{\infty} \nu_p^{(l)}\,, \tag{6}$$

где меры $\lambda^{(l)}, \nu_p^{(l)}$ сосредоточены на S_l, $l = 1, 2, \dots$, выполнено соотношение

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\lambda^{(l)}(S_l)}{\nu_p^{(l)}(S_l)} < 1, \tag{7}$$

то Λ — подпоследовательность нулей для пространства $H_p^1(\Omega)$.

Теорема 3.2. *Пусть субгармоническая в ограниченной области $\Omega \Subset \mathbb{C}$, $0 \in \Omega$, функция $p \not\equiv -\infty$ удовлетворяет условию*

(LD_0^0) *существуют числа ε, $0 < \varepsilon < 1$, и $c \geqslant 0$, для которых*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p\bigl(z + \varepsilon d_\Omega(z) e^{i\theta}\bigr)\, d\theta \leqslant p(z) + c \log\Bigl(1 + \frac{1}{d_\Omega(z)}\Bigr) + c, \quad z \in \Omega.$$

Пусть $\Sigma = \{S_l\}$ — локально конечное семейство борелевских предкомпактных подмножеств S_l в Ω, $l = 1, 2, \dots$, удовлетворяющее условию (5), и для последовательности Λ на Ω условие (RS) *из Теоремы* 3.1 *выполнено в более сильной форме с заменой соотношения* (7) *на требование выполнения неравенств $\lambda^{(l)}(S_l) \leqslant \nu_p^{(l)}(S_l)$ при всех достаточно больших l. Если мера*

$$\sigma \overset{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\operatorname{diam} S_l}{d_\Omega(S_l)}\, \nu_p^{(l)}$$

конечна на Ω или, при односвязности Ω, выполнено более слабое условие Бляшке

$$\int_\Omega g_\Omega(0, \zeta)\, d\sigma(\zeta) < +\infty\,,$$

то Λ — подпоследовательность нулей для $H_{p+\log}(\Omega)$.

Для фиксированной функции $p \in \operatorname{sbh}(\Omega)$, $p \not\equiv -\infty$, и системы весов $\mathcal{S}$ на области Ω класс $H_{p+\mathcal{S}}(\Omega)$ определяем как множество функций $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$, удовлетворяющих ограничению

$$|f(z)| \leqslant C_f \exp\bigl(p(z) + s_f(z)\bigr), \quad z \in \Omega,$$

для некоторого веса $s_f \in \mathcal{S}$ и при некоторой постоянной $C_f \geqslant 0$.

Теорема 3.3. *Пусть система весов $\mathcal{S} \subset \mathrm{sbh}^+(\Omega)$ на области $\Omega \Subset \mathbb{C}$ обладает свойством* $(\mathrm{A}^\uparrow)$ *с заменой системы весов $\mathcal{P}$ на $\mathcal{S}$* (стр. 6) *и*

(LD_0) *существует число ε, $0 < \varepsilon < 1$, при котором для любой функции $s \in \mathcal{S}$ найдутся функция $s_1 \in \mathcal{S}$ и постоянная c_1, для которых*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s\bigl(z + \varepsilon d_\Omega(z)e^{i\theta}\bigr)\,d\theta + \log\Bigl(1 + \frac{1}{d_\Omega(z)}\Bigr) \leqslant s_1(z) + c_1, \quad z \in \Omega,$$

а для субгармонической в Ω функции $p \not\equiv -\infty$ выполнено условие

(LDS) *существуют числа ε, $0 < \varepsilon < 1$, и $C \geqslant 0$, а также вес $s \in \mathcal{S}$, для которых*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\bigl(z + \varepsilon d_\Omega(z)e^{i\theta}\bigr)\,d\theta + \log\Bigl(1 + \frac{1}{d_\Omega(z)}\Bigr) \leqslant p(z) + s(z) + C, \quad z \in \Omega.$$

Пусть $\Sigma = \{S_l\}$ — локально конечное семейство борелевских предкомпактных подмножеств S_l в Ω, $l = 1, 2, \dots$, удовлетворяющее условию (5), *и для последовательности Λ на Ω условие* (RS) *из Теоремы* 3.1 *выполнено с заменой соотношения* (7) *на более сильное требование выполнения неравенств $\lambda^{(l)}(S_l) \leqslant \nu_p^{(l)}(S_l)$ при достаточно больших l. Если существует вес $s \in \mathcal{S}$ с мерой Рисса σ_s, для которой при некотором ее представлении в виде* (ср. с (6))

$$\sigma_s \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{l=1}^{\infty} \sigma^{(l)},$$

где меры $\sigma^{(l)}$ сосредоточены на S_l при $l = 1, 2, \dots$, имеет место соотношение

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\operatorname{diam} S_l}{d_\Omega(S_l)} \cdot \frac{\nu^{(l)}(S_l)}{\sigma^{(l)}(S_l)} < +\infty,$$

то Λ — подпоследовательность нулей, т. е. последовательность неединственности, для весового пространства $H_{p+\mathcal{S}}(\Omega)$.

Эта теорема, в отличие от предыдущей, предполагает, вообще говоря, «зазор» между весами в системе $\mathcal{P} = p + \mathcal{S}$ больший, чем логарифмический, т. е. охватывает промежуточные ситуации между Теоремами 3.1 и 3.2.

2$\mathbb{D}$. Подпоследовательности нулей для пространств круге. Переформулируем результаты п. 2 и следствия из них применительно к единичному кругу $\mathbb{D}$ для радиальных весов.

Введем обозначение для «полярного прямоугольника» в $\mathbb{C}$:

$$\begin{gathered} R[t_1, t_2; \theta_1, \theta_2) := \bigl\{te^{i\theta} \in \mathbb{C} \colon t_1 \leqslant t < t_2,\ \theta_1 \leqslant \theta < \theta_2\bigr\}, \\ 0 \leqslant t_1 < t_2, \qquad \theta_1 < \theta_2 \leqslant \theta_1 + 2\pi, \end{gathered} \tag{8}$$

т. е. $R[t_1, t_2) := R[t_1, t_2; 0, 2\pi)$ — кольцо, $R(t; \theta_1, \theta_2) = R[0, t; \theta_1, \theta_2)$ — сектор, $R(t; 0, 2\pi) = D(t)$ — круг, а $R(\infty; \theta_1, \theta_2) := R[0, +\infty; \theta_1, \theta_2)$ — угол.

Используем достаточно общепринятые для мер ν обозначения

$$\nu^{\mathrm{rad}}(t) = \nu\bigl(D(t)\bigr), \qquad \nu(t; \theta_1, \theta_2) := \nu\bigl(R(t; \theta_1, \theta_2)\bigr), \tag{9г}$$

$$\nu[t_1, t_2) := \nu\bigl(R[t_1, t_2)\bigr), \qquad \nu[t_1, t_2; \theta_1, \theta_2) := \nu\bigl(R[t_1, t_2; \theta_1, \theta_2)\bigr). \tag{9а}$$

Для простоты здесь и далее рассматриваются только семейства полярных прямоугольников $\Sigma = \{R_l\}_{l\in\mathbb{N}}$, в которых

(R) *все* $R_l \Subset \mathbb{D}$, $l=1,2,\dots$, *попарно не пересекаются и имеют вид*

$$R_l = R(t_l,t_{l+1};\theta_l,\theta_{l+1}),\qquad 0\leqslant t_l<t_{l+1}<1,\quad \theta_l<\theta_{l+1}\leqslant\theta_l+2\pi. \tag{10}$$

Для классов функций в круге типа $\mathrm{Hol}^{\cup}(\mathbb{D};\mathcal{P})$ с радиальной системой весов $\mathcal{P}$ веса $p\in\mathcal{P}$ традиционно рассматриваются в преобразованном виде

$$p_*(x)=p\bigl(1-1/x\bigr),\quad x\in[1,+\infty), \tag{11}$$

где при условии $p(0)\neq-\infty$, не умаляя общности, всегда можно считать, что $p\colon[0,1)\to[0,+\infty)$ (соотв. $p_*\colon[1,+\infty)\to[0,+\infty)$, $p_*(1)\neq-\infty$) — *возрастающая положительная функция.* Для простоты и удобства будем дополнительно предполагать, что функция p (соотв. p_*) *непрерывно дифференцируема* на интервале $[0,1)$ (соотв. на луче $[1,+\infty)$). Связь между производными p' и p'_* дается равенствами

$$p'(t)=x^2p'_*(x),\quad p'_*(x)=(1-t)^2p'(t),\quad tp'(t)=x(x-1)p'_*(x),\qquad 1\leqslant x=\frac{1}{1-t}\,,\qquad 0\leqslant t=1-\frac{1}{x}<1\,. \tag{12}$$

Для субгармоничности такой продолженной на $\mathbb{D}$ *радиальной возрастающей функции* p *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$t\mapsto tp'(t),\quad t\in(0,1), \tag{13}$$

(соотв.

$$x\mapsto x(x-1)p'_*(x),\quad x\in(1,+\infty)) \tag{14}$$

была возрастающей.

При дифференцируемости и субгармоничности функции p мера Рисса ν_p полярного прямоугольника из (8) в обозначениях (9) достаточно просто выражается через производную p' или p'_*:

$$\nu_p[t_1,t_2;\theta_1,\theta_2]=\bigl(t_2p'(t_2)-t_1p'(t_1)\bigr)\,\frac{\theta_2-\theta_1}{2\pi}$$
$$\overset{(12)}{=}\bigl(x_2(x_2-1)p'_*(x_2)-x_1(x_1-1)p'_*(x_1)\bigr)\,\frac{\theta_2-\theta_1}{2\pi}\,,\quad x_j=\frac{1}{1-t_j}\,,\ j=1,2.$$

Ввиду асимптотического характера большинства дальнейших условий на p и p_*, можно считать, если не оговорено противное, что условия на p, т. е. p_*, выполнены только при t, достаточно близких к 1 (соотв. при достаточно больших $x\geqslant 1$).

В частности, в терминах функции p таким условиям удовлетворяют выпуклые относительно логарифма функции p, т. е. те, для которых композиция $p_*\circ\exp$ выпукла на $[0,+\infty)$ (см.

(P_β) степенные веса вида $t\mapsto\dfrac{1}{(1-t)^\beta}$, $t\in[0,1)$,

(L_α) а также логарифмические функции вида $t\mapsto\log^\alpha\dfrac{1}{1-t}$, $\alpha\geqslant 0$, $t\in[0,1)$,

при достаточно близких к единице значениях t).

Пусть $\Sigma=\{R_l\}$ — система непересекающихся полярных прямоугольников из (R) (см. стр. 9) вида (8), (10). Пусть Λ — последовательность в $\mathbb{D}$ без точек сгущения. Предполагается выполненным условие

(R_Λ) *семейство* $\Sigma=\{R_l\}$ *при некотором* $t_0<1$ *покрывает пересечение кольца* $R(t_0,1)$ *с носителем* $\operatorname{supp} n_\Lambda$, *т. е.* $\Lambda\cap R(t_0,1)\subset\bigcup_l S_l$.

Пространство $H^1_p(\mathbb{D})$. Для возрастающих функций вида (11) ограничение (LD^1_0) Теоремы 3.1 на *радиальный вес* p можно в несколько более сильной форме задать в двух эквивалентных формах:

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to+0}\limsup_{t\to1-0}\frac{p\bigl(t+\varepsilon(1-t)\bigr)+\log\frac{1}{1-t}}{p(t)}\leqslant 1\\ \iff\quad \lim_{a\to1+0}\limsup_{x\to+\infty}\frac{p_*(ax)+\log x}{p_*(x)}\leqslant 1.\end{gathered}\tag{15}$$

При этом

$$H^1_p(\mathbb{D})\overset{(2)}{=}\Bigl\{f\in H(\mathbb{D})\colon \limsup_{t\to1-0}\frac{\log\max\limits_{\theta}\bigl|f(te^{i\theta})\bigr|}{p(t)}<1\Bigr\}.$$

Теорема 3.1 для круга формулируется как

Следствие 1.1. *Пусть* Σ *из* (R_Λ) (см. стр. 9) *и для радиального возрастающего веса* $p\colon[0,1)\to[0,+\infty)$ *выполнено условие* (15) *и функция из* (13), *или из* (14), *возрастающая. Если выполнены условия*

$$\begin{gathered}\lim_{l\to\infty}\frac{(t_{l+1}-t_l)+(\theta_{l+1}-\theta_l)}{1-t_{l+1}}=0\,,\\ \limsup_{l\to\infty}\frac{n_\Lambda[t_l,t_{l+1};\theta_l,\theta_{l+1})}{\bigl(t_{l+1}p'(t_{l+1})-t_lp'(t_l)\bigr)\,(\theta_{l+1}-\theta_l)}<1\,,\end{gathered}$$

то Λ — *подпоследовательность нулей для пространства* $H^1_p(\mathbb{D})$.

Пространства $H_{p+\log}(\mathbb{D})$. Для возрастающих функций вида (11) ограничение Теоремы 3.2 на *радиальный вес* p можно в несколько более сильной форме задать в

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to+0}\limsup_{t\to1-0}\frac{p\bigl(t+\varepsilon(1-t)\bigr)-p(t)}{-\log(1-t)}<+\infty\\ \overset{(11)}{\iff}\lim_{a\to1+0}\limsup_{x\to+\infty}\frac{p_*(ax)-p_*(x)}{\log x}<+\infty.\end{gathered}\tag{16}$$

При этом (см. (3))

$$H_{p+\log}(\mathbb{D})=\Bigl\{f\in H(\mathbb{D})\colon \limsup_{t\to1-0}\frac{\log\max\limits_{\theta}\bigl|f(te^{i\theta})\bigr|-p(t)}{-\log(1-t)}<+\infty\Bigr\}.$$

Теорема 3.2 в данном случае формулируются как

Следствие 1.3. *Пусть* Σ *из* (R_Λ) (см. стр. 9) *и для радиального возрастающего веса* $p\geqslant 0$ *выполнены условие* (16) *и функция из* (13), *или из* (14), *возрастающая. Если*

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(t_{l+1}-t_l)+(\theta_{l+1}-\theta_l)}{1-t_{l+1}}\bigl(t_{l+1}p'(t_{l+1})-t_lp'(t_l)\bigr)<+\infty$$

и для некоторого $l_0\in\mathbb{N}$

$$n_\Lambda[t_l,t_{l+1};\theta_l,\theta_{l+1})\leqslant t_{l+1}p'(t_{l+1})-t_lp'(t_l)\quad \textit{при всех } l\geqslant l_0,$$

то Λ — *подпоследовательность нулей для пространства* $H_{p+\log}(\mathbb{D})$.

3. Устойчивость подпоследовательностей нулей. Всюду в этом п. 3 $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — две последовательности в ограниченной области Ω без точек сгущения и нумерация этих последовательностей имеет значение.

Теорема 3.4. *Пусть выполнено условие*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{\min\bigl\{d_\Omega(\lambda_k), d_\Omega(\gamma_k)\bigr\}} = 0. \tag{17}$$

а функция $p \in \mathrm{sbh}^+(\Omega)$ удовлетворяет условию (LD_0^1) Теоремы 3.1. Тогда Λ и Γ могут быть последовательностями единственности для $H_p^1(\Omega)$ только одновременно.

Теорема 3.5 (устойчивости)**.** *Пусть выполнено условие (ср. с (17))*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{\min\bigl\{d_\Omega(\lambda_k), d_\Omega(\gamma_k)\bigr\}} < +\infty,$$

а функция $p \in \mathrm{sbh}(\Omega)$ удовлетворяет условию (LD_0^0) Теоремы 3.2. Тогда Λ и Γ могут быть последовательностями единственности для $H_{p+\log}(\Omega)$ только одновременно.

Следствие 1.2. *Пусть $\Omega = \mathbb{D}$, вес p такой же, как в Следствии 1.1, и*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{1 - \max\bigl\{|\lambda_k|, |\gamma_k|\bigr\}} = 0 \tag{18}$$

Тогда Λ и Γ могут быть подпоследовательностями нулей для весового пространства $H_p^1(\mathbb{D})$ только одновременно.

Следствие 1.4. *Пусть $\Omega = \mathbb{D}$, вес p такой же, как в Следствии 1.3, и*

$$\sum_{k\in K} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{1 - \max\bigl\{|\lambda_k|, |\gamma_k|\bigr\}} < +\infty \tag{19}$$

Тогда Λ и Γ могут быть подпоследовательностями нулей для весового пространства $H_{p+\log}(\mathbb{D})$ только одновременно.

4. Последовательности нулей в круге. Перейдем теперь к результатам диссертации о последовательностях нулей для весовых пространств голоморфных функций f в круге $\mathbb{D}$, в которых рост функций $\log|f|$, упрощенно говоря, медленнее, чем рост функции $z \mapsto 1/(1-|z|)$, $z \in \mathbb{D}$. Точнее, на вес $p \not\equiv -\infty$ будет накладываться условие

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} p(te^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}t < +\infty. \tag{20}$$

Если при этом $p \in \mathrm{sbh}(\mathbb{D})$ с мерой Рисса ν_p, то условие (20) эквивалентно ограничению

$$\int_0^1 (1-t)^2\, \mathrm{d}\nu_p^{\mathrm{rad}}(t) < +\infty, \quad \nu_p^{\mathrm{rad}}(t) := \nu_p\bigl(D(t)\bigr). \tag{21}$$

Так, для радиальной функции p, для которой по определению $p(z) = p\bigl(|z|\bigr)$ при всех $z \in \mathbb{D}$, условие (20) выглядит совсем просто:

$$\int_0^1 p(t)\, \mathrm{d}t < +\infty. \tag{22}$$

При этом мы затрагиваем и случаи алгебр $A_p^\infty(\mathbb{D})$.

Последовательность точек Λ в $\mathbb{D}$ можно естественным образом рассматривать как считающую меру n_Λ на $\mathbb{D}$, определенную в (1). Пусть p — субгармоническая в $\mathbb{D}$ функция с мерой Рисса ν_p, $p \not\equiv -\infty$. При заданном локально конечном семействе $\Sigma = \{S_l\}$ борелевских предкомпактных подмножеств S_l в $\mathbb{D}$, $l = 1, 2, \dots,$, вообще говоря, пересекающихся, объединение которых покрывает Λ, всюду в этом и следующих подразделах будем считать, что меры n_Λ и ν_p представлены в виде сумм положительных мер (6) и меры $\lambda^{(l)}, \nu^{(l)}$ сосредоточены на S_l.

Для $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ и числа $a > 0$ введем в рассмотрение специальный *полярный прямоугольник*

$$\square(z;a) := \Bigl\{ \zeta = te^{i\psi} \colon \bigl(r - a(1-r)\bigr)^+ \leqslant t < 1,\ |\sin(\psi - \theta)| < a(1-r) \Bigr\} \tag{23}$$

относительного размера a, его s*-срез* при $s < 1$

$$\square_s(z;a) := \Bigl\{ \zeta = te^{i\psi} \colon \bigl(r - a(1-r)\bigr)^+ \leqslant t < s,\ |\sin(\psi - \theta)| < a(1-r) \Bigr\},$$

функцию распределения меры ν_p в (23) по правилу $\nu_p(s, z; a) := \nu_p\bigl(\square_s(z;a)\bigr)$, а также a*-расширенную добавочную функцию*

$$\begin{aligned} b_{\nu_p}^{[a]}(z) &:= \frac{1}{(1-|z|)^2} \int_{\square(z;a)} (1-|\zeta|)^2 \,\mathrm{d}\nu_p(\zeta) \\ &= \frac{1}{(1-r)^2} \int_{\left(r-a(1-r)\right)^+}^1 (1-s)^2 \,\mathrm{d}\nu_p(s, z; a), \end{aligned} \tag{24}$$

которая конечна при всех $z \in \mathbb{D}$ при условии (21).

Для радиальной функции $p(z) = p(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$, при $a \geqslant 0$ будем рассматривать также a*-расширенную добавочную радиальную функцию*

$$b_p^{[a]}(r) := \frac{1}{1-r} \int_{\left(r-a(1-r)\right)^+}^1 (1-t) \,\mathrm{d}p(t), \quad b_p(r) := b_p^{[0]}(r), \quad 0 \leqslant r < 1. \tag{25}$$

Кроме того, будем использовать специальное обозначение для усреднений

$$\operatorname{Avr}_M^{[\varepsilon]}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\bigl(z + \varepsilon(1-|z|)e^{i\theta}\bigr) \,\mathrm{d}\theta, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{26}$$

при условии интегрируемости функции $M \colon \mathbb{D} \to [-\infty, \infty]$ по окружностям. Основной результат подраздела 4.1 —

Теорема 4.1. *Пусть p — положительная субгармоническая функция с мерой Рисса ν_p и выполнено условие* (20) *или эквивалентное ему ограничение* (21)*. Кроме того, предполагаем, что функция p удовлетворяет нерадиальному условию регулярности*

(LD_0) *существуют число ε, $0 < \varepsilon < 1$ и постоянные $B, C \geqslant 0$, для которых*

$$\operatorname{Avr}_p^{[\varepsilon]}(z) + \log \frac{1}{1-|z|} \leqslant Bp(z) + C, \quad z \in \Omega.$$

Если система подмножеств $\Sigma = \{S_l\}$, покрывающая последовательность Λ, удовлетворяет ограничению

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\operatorname{diam} S_l}{\operatorname{dist}(S_l, \partial\mathbb{D})} < +\infty, \tag{27}$$

а для разбиений мер (6) *выполнено условие*

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\lambda^{(l)}(S_l)}{\nu_p^{(l)}(S_l)} < +\infty\,, \tag{28}$$

то Λ — последовательность нулей для алгебры $A_M^\infty(\mathbb{D})$, где

$$M = p + b_{\nu_p}^{[6]}. \tag{29}$$

Основной результат подраздела 4.2 касается уже весовых пространств, не являющихся алгебрами.

Теорема 4.2. *Пусть $p \in \operatorname{sbh}^+(\mathbb{D})$ и выполнены условие* (20) *и*

(LD_0^1) *для любого числа $b > 1$ при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ имеет место ограничение*

$$\operatorname{Avr}_p^{[\varepsilon]}(z) + \log\frac{1}{1-|z|} \leqslant bp(z) + C_b, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Если для семейства $\Sigma = \{S_l\}$, $l = 1, 2, \ldots$, возможно пересекающихся множеств S_l, покрывающего последовательность Λ, справедливо равенство

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\operatorname{diam} S_l}{\operatorname{dist}(S_l, \partial\mathbb{D})} = 0, \tag{30}$$

а разбиения (6) *мер n_Λ и p_ν удовлетворяет ограничению*

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\lambda^{(l)}(S_l)}{\nu_p^{(l)}(S_l)} < 1\,,$$

то для некоторого числа $a_\Lambda < 1$ последовательность Λ — последовательность нулей для пространства $\operatorname{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где

$$M = a_\Lambda p + Bb_{\nu_p}^{[6]}, \tag{31}$$

а перед определенной в (24) *функцией $b_{\nu_p}^{[6]}$ стоит постоянная B.*

В частности, если p — логарифмический вес вида (L_α) *с $\alpha > 1$* (см. стр. 9), *то второе слагаемое в правой части* (31) *исчезает и Λ — последовательность нулей для пространства $\operatorname{Hol}(\mathbb{D}; a_\Lambda p)$ с некоторой постоянной $a_\Lambda < 1$.*

Подраздел 4.3 содержит наиболее «жесткий» случай пространства $H_{p+\log}(\mathbb{D})$.

Теорема 4.3. *Пусть $p \in \operatorname{sbh}(\mathbb{D})$ не обязательно положительная функция, для которой выполнены условие* (20) *и дополнительное условие регулярности*

(LD_0^0) *существуют числа ε, $0 < \varepsilon < 1$, и $C \geqslant 0$, для которых в обозначении* (26) *для усреднений справедливо неравенство*

$$\operatorname{Avr}_p^{[\varepsilon]}(z) \leqslant p(z) + C\log\frac{1}{1-|z|} + C, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Если для семейства $\Sigma = \{S_l\}$, $l = 1, 2, \dots$, возможно пересекающихся множеств S_l, покрывающего последовательность Λ, справедливо равенство (30) *и выполнены еще два условия:*

[Λ] *для представлениz* (6) *мер n_Λ и ν_p при всех достаточно больших номерах l имеет место неравенство $\lambda^{(l)}(S_l) \leqslant \nu_p^{(l)}(S_l)$,*

[B] *для меры*

$$\sigma := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\operatorname{diam} S_l}{\operatorname{dist}(S_l, \partial\mathbb{D})}\, \nu_p^{(l)}$$

выполнено условие Бляшке

$$\int_0^1 (1-t)\, \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{rad}}(t) < +\infty,$$

то Λ — последовательность нулей для $\operatorname{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где в обозначении (24)

$$M(z) := p(z) + C \log \frac{1}{1-|z|} + Bb_{\nu_p}^{[6]}(z), \quad C, B \text{ — постоянные.}$$

Если $\sigma(\mathbb{D}) < +\infty$, то выполнения равенства (30) *можно и не требовать.*

В диссертациии особо выделен случай радиальной функции p для Теорем 4.1–4.3, когда подмножества S_l не пересекаются. Он использует радиальное условие регулярности вида

$$p\,(t + \varepsilon(1-t)) + a \log \frac{1}{1-t} \leqslant bp(t) + c, \quad 0 \leqslant t < 1, \tag{32}$$

с некоторыми постоянными ε, a, b, c и выделен во Введении как отдельная

Теорема 1.3 (радиальная)**.** *Пусть последовательность точек Λ содержится в объединении $\bigcup_{l=1}^{\infty} S_l$ и не имеет точек сгущения в $\mathbb{D}$, а также*

- *$p\colon [0,1) \to [0, +\infty)$ — возрастающая непрерывная справа в нуле;*
- *функция p выпукла относительно логарифма;*
- *выполнено условие умеренного роста* (22)*;*
- *функция p продолжена на $\mathbb{D}$ как $p(z) \equiv p\big(|z|\big)$, $z \in \mathbb{D}$.*

Тогда

(Z_∞) *если для $a = 1$ существуют $\varepsilon \in (0,1)$, и $b, c \geqslant 0$, при которых выполнено* (32)*, а также имеют место соотношения*

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\operatorname{diam} S_l}{\operatorname{dist}(S_l, \partial\mathbb{D})} < +\infty, \qquad \limsup_{l\to\infty} \frac{n_\Lambda(S_l)}{\nu_p(S_l)} < +\infty,$$

то Λ — нулевая последовательность для алгебры $A_M^\infty(\mathbb{D})$ с радиальным весом

$$M(z) = \frac{1}{1-|z|} \int_{|z|}^1 p(t)\, \mathrm{d}t \overset{(25)}{=} b_p\big(|z|\big), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{33}$$

(Z_1) *если выполнено условие* (15), *а также*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\operatorname{diam} S_l}{\operatorname{dist}(S_l, \partial\mathbb{D})} = 0, \quad \limsup_{l\to\infty} \frac{n_\Lambda(S_l)}{\nu_p(S_l)} < 1,$$

то Λ — *нулевая последовательность для класса* $\operatorname{Hol}(\mathbb{D}; M)$, *где*

$$M := c_\Lambda p + d_\Lambda b_p, \tag{34}$$

положительное число c_Λ *меньше* 1, *а* $d_\Lambda \geqslant 0$ — *постоянная;*

($Z_{\log}$) *если выполнено условие* (16), *а также*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\operatorname{diam} S_l}{\operatorname{dist}(S_l, \partial\mathbb{D})} \nu_p(S_l) < +\infty$$

и, кроме того, при некотором $l_0 \in \mathbb{N}$ $n_\Lambda(S_l) \leqslant \nu_p(S_l)$ *при всех* $l \geqslant l_0$, *то* Λ — *нулевая последовательность для класса* $H_{M+\log}(\mathbb{D})$, *где* M — *функция из* (34) *с* $c_\Lambda = 1$, *а* $d_\Lambda \geqslant 0$ — *постоянная.*

5. Устойчивость (под)последовательностей нулей в круге. В разделах 4.4 и 4.5 даются простые достаточные условия, при которых некоторый сдвиг подпоследовательностей нулей для одного весового пространства в круге становится уже последовательностью нулей для некоторого, возможно, несколько более широкого весового пространства голоморфных функций в круге.

Теорема 4.4. *Пусть* p — *положительная субгармоническая функция с мерой Рисса* ν_p *и выполнено условие* (20) *или эквивалентное ему ограничение* (21). *Кроме того, предполагаем, что функция* p *удовлетворяет нерадиальному условию регулярности* (LD_0) *из Теоремы* 4.1. *Если для последовательностей точек* $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *и* $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *в* $\mathbb{D}$ *выполнено условие их близости*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{1 - \max\{|\lambda_k|, |\gamma_k|\}} < +\infty, \tag{35}$$

а Λ — *подпоследовательность нулей для алгебры* $A_p^\infty(\mathbb{D})$, *то* Γ — *последовательность нулей для алгебры* $A_M^\infty(\mathbb{D})$ *при* $M = p + b_{\nu_p}^{[6]}$.

Теорема 4.5. *Пусть для положительной субгармонической функции* p *в* $\mathbb{D}$ *и выполнены условие умеренного роста* (20) *и ограничение* (LD_0^1) *из Теоремы* 4.2. *Если для двух последовательностей точек* $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *и* $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *в* $\mathbb{D}$ *выполнено условие их близости* (18), *а* Λ — *подпоследовательность нулей для пространства* $H_p^1(\mathbb{D})$, *то найдутся постоянные* $c < 1$ *и* $B_c \geqslant 0$, *с которыми* Γ — *последовательность нулей для пространства* $\operatorname{Hol}(\mathbb{D}; M)$ *при*

$$M = cp + B_c b_{\nu_p}^{[6]}. \tag{36}$$

В частности, если p — *логарифмический вес вида* [L_α] *с* $\alpha > 1$, *то второе слагаемое в правой части* (36) *исчезает и* Λ — *последовательность нулей для* $H_p^1(\mathbb{D})$.

Теорема 4.6. *Пусть для субгармонической в $\mathbb{D}$ функции $p \not\equiv -\infty$ выполнены условия умеренного роста* (20) *и условие регулярности веса* (LD_0^0) *Теоремы* 4.3. *Если для двух последовательностей точек $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{D}$ выполнено условие их близости* (19), *а Λ — <u>под</u>последовательность нулей для пространства $H_{p+\log}$, то найдутся постоянные $C, B \geqslant 0$, с которыми Γ — последовательность нулей для пространства* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$ *при*

$$M(z) = p(z) + C\log\frac{1}{1-|z|} + Bb^{[6]}_{\nu_p}(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

В частности, если p — логарифмический вес вида (L_α) *с $\alpha \geqslant 1$, то Γ — последовательность нулей для пространства* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$, *где*

$$M(z) := p(z) + C_\alpha \log^{\max\{1,\alpha-1\}}\frac{1}{1-|z|}\,,\ z \in \mathbb{D},$$

где C_α — постоянная.

В диссертациии особо выделен случай радиальной функции p для Теорем 4.4–4.6, когда подмножества S_l не пересекаются.

Теорема 1.4 (радиальная). *Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — две последовательности точек в $\mathbb{D}$ без точек сгущения в $\mathbb{D}$, а функция $p\colon [0,1) \to [0,+\infty)$ такая же, как в Теореме* 1.3. *Тогда*

(S_∞) *если для веса p выполнено условие Теоремы* 1.3 *из* (Z_∞), *а также условие близости* (35), *а Λ — <u>под</u>последовательность нулей для алгебры $A^\infty_p(\mathbb{D})$, то Γ — последовательность нулей для алгебры $A^\infty_M(\mathbb{D})$ с весом M из* (33);

(S_1) *если для веса p выполнено условие Теоремы* 1.3 *из* (Z_1), *а также условие близости* (18), *а Λ — <u>под</u>последовательность нулей для пространства H^1_p, то найдется постоянная $c < 1$, для которой Γ — последовательность нулей для пространства* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$ *с функцией $M := cp + d_c b_p$, где $d_c \geqslant 0$ — некоторая постоянной.*

($\mathrm{S}_{\log}$) *если для веса p выполнено условие Теоремы* 1.3 *из* ($\mathrm{Z}_{\log}$), *а также условие близости* (19), *а Λ — <u>под</u>последовательность нулей для* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; p)$, *то Γ — последовательность нулей для пространства $H_{M+\log}(\mathbb{D})$ с $M = p + db_p$, где $d \geqslant 0$ — некоторая постоянная.*

Публикации по теме диссертации

[1] *Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, №. 1. С. 146–189.

[2] *Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, №. 1. С. 190–236.

[3] *Хабибуллин Ф. Б.* Последовательности нулей голомофных функций в весовых пространствах в единичном круге // Известия вузов. Матем. 2010. Вып. 3. С. 102–105.

[4] *Хабибуллин Ф. Б.* Устойчивость (под)последовательностей нулей для классов голоморфных функций умеренного роста в единичном круге // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 3. С 152–163.

[5] *Khabibullin B. N., Khabibullin F. B.* Zero subsets of spaces of functions and the entropy of arcwise connectedness // Геометрический анализ и его приложения. Тезисы докладов. Волгоградский государственный университет. Волгоград, 2004. С. 193.

[6] *Хабибуллин Ф. Б.* Последовательности нулей голоморфных функций в пространствах в круге // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», посвященная 100-летию БашГУ. Математика. Том I. Уфа. РИЦ БашГУ. 2009. С. 357-377.

[7] *Хабибуллин Ф. Б.* Последовательности нулей голоморфных функций умеренного роста в круге // Спектральная теория операторов и ее приложения. Материалы международной конференции, посвященной памяти профессора А. Г. Костюченко (Уфа, 13–15 июня 2011 г.). Уфа. РИЦ БашГУ. 2011. С. 85–86.

[8] *Хабибуллин Ф. Б.* Устойчивость (под)последовательностей нулей в пространствах голоморфных функций умеренного роста в круге // Материалы X международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 1–7 июля 2011 г.). Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казанское математическое общество. Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 43. С. 358–360.

[9] *Хабибуллин Б. Н., Кудашева Е. Г., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.* Распределение нулей голоморфных функций с ограничениями на их рост в единичном круге // VI Уфимская международная конференция«Комплексный анализ и дифференциальные уравнения», посвященная 70-летию чл.-корр. РАН В. В. Напалкова. Сборник тезисов. Уфа: ИМВЦ. 2011. С. 151–153.