

На правах рукописи

Беликова Оксана Николаевна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧ
НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2011

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информационных технологий Сибайского института (филиала) ГОУ ВПО "Башкирский государственный университет"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Юмагулов Марат Гаязович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Киселев Олег Михайлович,
доктор физико-математических наук,
профессор
Мухамадиев Эргаш Мирзоевич

Ведущая организация: Институт математики и механики
Уральского отделения РАН

Защита состоится 18 марта 2011 г. в 15 : 00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.057.01 в Учреждении российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН по адресу: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН.

Автореферат разослан ____ февраля 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук

С. В. Попенов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Дифференциальные уравнения задач небесной механики и, в особенности, классической задачи N тел занимают одно из центральных мест в общей теории динамических систем. Несмотря на относительную простоту формулировок и прозрачность основных формул эти уравнения представляют собой чрезвычайно сложный объект исследования, привлекающий повышенное внимание многих поколений ученых – математиков, механиков, физиков и др. Благодаря работам И.Ньютона, Л.Эйлера, Ж.Лагранжа, П.Лапласа, К.Якоби, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунова и др. разработан ряд, ставших уже классическими, методов исследования, нашедших многочисленные приложения в математике, небесной механике, астрономии и других науках. Существенный вклад в изучение таких уравнений внесли В.И.Арнольд, Г.Н.Дубошин, В.В.Козлов, А.П.Маркеев, К.Маршал, Р.Монтгомери, К.Симо, А.Шенсине и др.

Неугасающее внимание к исследованию дифференциальных уравнений задач небесной механики связано не только с тем, что они находят свое применение при изучении движения небесных тел. Эти уравнения демонстрируют огромное многообразие качественного поведения решений, от самых простых – стационарных решений (точек либрации) – до сложных хаотических движений. Дифференциальные уравнения задач небесной механики зависят от различных параметров, что может приводить к тем или иным сценариям бифуркационного поведения.

Одной из наиболее актуальных как с теоретической, так и практической точек зрения представляется исследование бифуркаций в окрестностях стационарных решений дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел и различных ее модификаций. Здесь разработан ряд эффективных методов исследования, решены многие важные теоретические и практические задачи. Большой вклад в разработку и развитие этих методов внесли исследования В.И.Арнольда, Е.А.Гребеникова, В.Г.Демина, В.П.Евтеева, А.П.Маркеева, Э.М.Мухамадиева, А.И.Нейштадта, Ю.А.Рябова, В.Себехея и др. Заметим, что большая часть исследований и разработанных методов относится к дифференциальным уравнениям круговой задачи трех тел, зависящим от одного параметра. Значительно меньше изучались бифуркации в окрестностях стационарных решений дифференциальных уравнений эллиптической задачи трех тел, зависящих от двух или большего числа параметров, в

частности, от эксцентриситета кеплеровской орбиты ε и параметра масс μ . Соответствующие бифуркации, как правило, имеют коразмерность равную двум, что значительно усложняет их исследование. Здесь особо важны получение признаков возникновения периодических и субгармонических колебаний и разработка методов построения возникающих колебаний.

Цель работы. Разработать методы качественного и приближенного исследования задачи о локальных бифуркациях в окрестностях стационарных решений дифференциальных уравнений задач небесной механики, зависящих от двух параметров; на их основе получить признаки возникновения периодических и субгармонических колебаний, получить и обосновать асимптотические формулы для возникающих решений.

Методы исследования. В работе использованы общие методы качественной теории дифференциальных уравнений, нелинейного анализа, методы приближенного решения операторных уравнений, методы теории Флоке, метод функционализации параметра исследования бифуркационных задач, метод Ньютона-Канторовича.

Научная новизна определяется впервые проведенными исследованиями, в результате которых разработан математический аппарат для анализа бифуркационных явлений в динамических системах, зависящих от двух параметров. При этом получены следующие новые научные результаты:

1. Проведен детальный анализ основных сценариев локальных бифуркаций в окрестностях стационарных решений дифференциальных уравнений ограниченной эллиптической задачи трех тел и некоторых ее модификаций;
2. Разработан операторный метод исследования бифуркационного поведения дифференциальных уравнений задач небесной механики в окрестностях стационарных решений, приводящий к достаточному признаку бифуркации периодических и субгармонических колебаний и процедуре построения возникающих решений;
3. Доказано существование нестационарных периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации дифференциальных уравнений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел;
4. Разработаны и обоснованы асимптотические формулы для бифурцирующих

решений дифференциальных уравнений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Предлагаемые в работе методы могут быть использованы для анализа бифуркационных явлений в динамических системах, зависящих от двух параметров. Полученные результаты доведены до расчетных и асимптотических формул.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на региональной научно-технической конференции "Новые программные средства для предприятий Урала" (г. Магнитогорск, декабрь 2006 г.); международной математической конференции "Теория функций, дифференциальные уравнения, вычислительная математика" (г. Уфа, 1-5 июня 2007 г.); научно-практической конференции "Прикладная математика и информационные технологии в науке и образовании" (г. Сибай, 23-24 мая 2008 г.); международной научной конференции "Нелинейные уравнения и комплексный анализ" (г. Уфа, 1-5 декабря 2008 г.); научных семинарах кафедры алгебры и геометрии Магнитогорского государственного университета (руководитель - д.ф.-м.н., профессор Смолин Ю.Н.); научном семинаре по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с ВЦ УНЦ РАН (руководители: д.ф.-м.н., профессор Л.А. Калякин и д.ф.-м.н., профессор В.Ю. Новокшенов.), научных семинарах кафедры прикладной математики и информационных технологий Сибайского института (филиала) Башкирского государственного университета (руководитель - д.ф.-м.н., профессор Юмагулов М.Г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[6], при этом статьи [1]–[2] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК.

Личный вклад соискателя. Постановки основных задач принадлежат научному руководителю. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ [1], [2], [4] и [5], опубликованных в соавторстве, соискатель принимал участие в обосновании предлагаемых методов исследования. Из результатов этих работ в диссертацию автором включены только результаты, полученные им лично.

Объем и структура диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Общий объем работы составляет 115 страниц. Библиография содержит 74 наименования.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и основные задачи исследования, приводится обзор литературных источников, кратко излагается содержание работы.

В **первой главе** приводятся общие сведения из теории динамических систем и локальных бифуркаций, а также основные динамические модели, возникающие в задачах небесной механики. Приводятся известные результаты относительно признаков локальных бифуркаций и используемые в диссертации схемы их приближенного исследования. Глава носит вспомогательный характер. Приведем некоторые необходимые сведения из первой главы.

Основным объектом исследования в первой главе является система дифференциальных уравнений, зависящих от скалярного или векторного параметра μ с T -периодической по t правой частью:

$$x' = f(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k. \quad (1)$$

Пусть система (1) при всех значениях параметра μ имеет нулевую точку равновесия $x = 0$, т.е. $f(0, t, \mu) \equiv 0$. Уравнение (1) может быть представлено в виде

$$x' = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad (2)$$

где $A(t, \mu) = f'_x(0, t, \mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $f(x, t, \mu)$, вычисленная в точке $x = 0$, а нелинейность $a(x, t, \mu)$ равномерно по t и μ удовлетворяет соотношению $\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$; здесь и ниже через $\|\cdot\|$ обозначена норма векторов в пространстве R^N .

Обозначим через $V(\mu)$ матрицу монодромии линейной системы

$$x' = A(t, \mu)x, \quad (3)$$

т.е. $V(\mu) = X(\mu, T)$, где $X(\mu, t)$ – фундаментальная матрица решений системы (3). Пусть при $\mu = \mu_0$ система (3) имеет один или несколько мультипликаторов, равных по модулю 1; тогда точка равновесия $x = 0$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ является негиперболической. В этом случае значение μ_0 будем называть точкой бифуркации системы (1) в задаче о вынужденных колебаниях. Этот термин охватывает различные сценарии бифуркационного поведения системы (1). В частности, при близких

к μ_0 значениям μ у системы (3) в окрестности точки равновесия $x = 0$ могут возникать T -периодические решения (вынужденные колебания), nT -периодические решения при $n \geq 2$ (субгармонические колебания), квазипериодические решения и др. Описанию возможных сценариев бифуркационного поведения дифференциальных уравнений некоторых задач небесной механики, получению достаточных признаков того или иного сценария бифуркации, разработке схем приближенного исследования бифуркаций и посвящена диссертационная работа.

В первой главе приводится также операторная схема приближенного исследования задачи о точках бифуркации вынужденных колебаний системы (1). Эта задача различными способами может быть сведена к эквивалентной задаче о бифуркациях в окрестности нулевого решения операторного уравнения

$$x = B(\psi)x + b(x, \psi), \quad x \in R^N, \quad \psi \in R^m, \quad (4)$$

где матрица $B(\psi)$ гладко зависит от параметра ψ , а нелинейность $b(x, \psi)$ содержит слагаемые второй и более высоких степеней по x : $b(x, \psi) = o(\|x\|)$ при $x \rightarrow 0$. При этом матрица $B(\psi_0)$ имеет собственное значение 1 (простое или полупростое кратности 2).

Пусть $e \in R^N$ – некоторый ненулевой вектор. Значение ψ_0 параметра ψ называют *правильной точкой бифуркации* уравнения (4) по направлению вектора e , если существуют $\delta_0 > 0$ и определенные при $\delta \in [0, \delta_0)$ непрерывные функции $\psi = \psi(\delta)$ и $x = x(\delta)$ такие, что $\psi(0) = \psi_0$ и $x(0) = 0$, при этом $\|x(\delta) - \delta e\| = o(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ и для каждого $\delta \geq 0$ вектор $x(\delta)$ является решением уравнения (4) при $\psi = \psi(\delta)$.

Правильные точки бифуркации уравнения (4) имеет смысл искать лишь среди тех ψ_0 , при которых матрица $B(\psi_0)$ имеет собственное значение 1. Рассматриваемая в работе задача о вынужденных колебаниях такова, что приводит к уравнению вида (4) с матрицей $B(\psi_0)$, имеющей при некотором $\psi = \psi_0$ полупростое собственное значение 1 кратности 2. Параметр ψ в этом случае является двумерным. Пусть $\psi = (\alpha, \beta)$, где α и β – скалярные параметры. Положим $B(\alpha, \beta) = B(\psi)$, $\psi_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ и $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$.

Пусть e, g, e^*, g^* – линейно независимые собственные векторы операторов B_0 и B_0^* , отвечающие полупростому собственному значению 1. Эти векторы можно выбрать исходя из соотношений: $(e, e^*) = (g, g^*) = 1$, $(e, g^*) = (g, e^*) = 0$. В работе

используется следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть оператор $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Пусть $\det(Q) \neq 0$, где

$$Q = \begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Тогда ψ_0 является правильной точкой бифуркации уравнения (4) по направлению собственного вектора e .

Здесь B'_α и B'_β – операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\alpha, \beta)$ по α и β соответственно.

Приведем схему получения асимптотических формул для существующих в условиях теоремы 1 периодических решений $x(\delta)$ уравнения (4) и соответствующих значений двумерного параметра $\psi = (\alpha(\delta), \beta(\delta))$. Пусть H_0 является собственным подпространством оператора B_0 , отвечающим полупростому собственному значению 1 кратности 2. Пространство R^N может быть представлено в виде $R^N = H_0 \oplus H^0$, где H^0 – дополнительное к H_0 инвариантное для B_0 подпространство. По построению существует оператор $(I - B_0)^{-1} : H^0 \rightarrow H^0$.

Определим действующий в пространстве R^N оператор

$$\Gamma_0 y = h_0 + h^0, \quad y \in R^N, \quad h_0 \in H_0, \quad h^0 \in H^0, \quad (6)$$

где

$$h_0 = J_\alpha(y)e + J_\beta(y)g,$$

$$h^0 = (I - B_0)^{-1} (y + J_\alpha(y)B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e + J_\beta(y)B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e).$$

Здесь функционалы $J_\alpha(y)$ и $J_\beta(y)$ – это компоненты вектора $J(y) = (J_\alpha(y), J_\beta(y))$, который вычисляется по формуле $J(y) = -Q^{-1}\zeta(y)$, где Q – матрица (5) и $\zeta(y) = ((y, e^*), (y, g^*))^T$.

Полученные в работе асимптотические формулы используют квадратичную и кубическую нелинейности, входящие в правые части основных дифференциальных уравнений. Здесь ограничимся приведением асимптотических формул для операторного уравнения (4), учитывающих только квадратичные слагаемые.

Теорема 2. Пусть нелинейность $b(x, \alpha, \beta)$ в уравнении (4) представляется в виде

$$b(x, \alpha, \beta) = b_2(x, \alpha, \beta) + \tilde{b}_3(x, \alpha, \beta), \quad (7)$$

где $b_2(x, \alpha, \beta)$ содержит квадратичные по x слагаемые, а нелинейность $\tilde{b}_3(x, \alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению $\tilde{b}_3(x, \alpha, \beta) = O(\|x\|^3)$ при $x \rightarrow 0$. Тогда существующие в условиях теоремы 1 решения $x(\delta)$ уравнения (4) и соответствующие значения параметра $\psi = (\alpha(\delta), \beta(\delta))$ вычисляются по следующим формулам:

$$x(\delta) = \delta e + \delta^2 e_2 + o(\delta^2), \quad \alpha(\delta) = \alpha_0 + \delta \alpha_2 + o(\delta), \quad \beta(\delta) = \beta_0 + \delta \beta_2 + o(\delta),$$

где

$$e_2 = \Gamma_0 b_2, \quad \alpha_2 = J_\alpha(b_2), \quad \beta_2 = J_\beta(b_2), \quad b_2 = b_2(e, \alpha_0, \beta_0).$$

Основным объектом исследования во **второй главе** являются дифференциальные уравнения некоторых задач небесной механики. При этом основное внимание уделено дифференциальным уравнениям плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел, которые в координатах (ξ, η) Нехвила¹ имеют вид

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' = \rho \left(\xi - \mu + \frac{\mu - 1}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} \xi - \frac{\mu}{[(\xi - 1)^2 + \eta^2]^{3/2}} (\xi - 1) \right), \\ \eta'' + 2\xi' = \rho \left(\eta + \frac{\mu - 1}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} \eta - \frac{\mu}{[(\xi - 1)^2 + \eta^2]^{3/2}} \eta \right); \end{cases} \quad (8)$$

где $\rho = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos t}$, $\mu = \frac{m_1}{m_0 + m_1}$, $0 < m_1 \leq m_0$, $0 < \mu < 1$, ε – эксцентриситет кеплеровской орбиты, t – истинная аномалия, m_0, m_1 – массы активно гравитирующих тел, штрихами обозначены производные по t .

Система (8) имеет пять стационарных решений – точек либрации: три из них L_1 , L_2 , и L_3 лежат на одной прямой (прямолинейные точки либрации), а две другие L_4 и L_5 образуют с телами m_0 и m_1 равносторонние треугольники (треугольные точки либрации). Треугольные точки либрации имеют координаты $L_4 \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ и $L_5 \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. Координаты прямолинейных точек либрации, в отличие от треугольных, зависят от значения параметра μ и явно не выписываются. Найти их можно лишь приближенно.

¹ Координаты Нехвила – это прямоугольная система координат $O\xi\eta$, такая, что в качестве независимой переменной рассматривается истинная аномалия кеплеровской орбиты, связанная с реальным временем.

Система (8) содержит два параметра – эксцентриситет $\varepsilon \geq 0$ и параметр масс $0 < \mu < 1$. При этом система (8) является неавтономной с 2π -периодической правой частью. При изменении параметров ε и μ поведение системы, вообще говоря, меняется, что может сопровождаться различными бифуркациями, в частности, в окрестностях точек либрации. Основной задачей, рассматриваемой во второй главе, является исследование вопроса об основных сценариях бифуркаций вынужденных колебаний системы (8) в окрестностях точек либрации L_1, \dots, L_5 , а также определение необходимых условий соответствующих бифуркаций. В качестве точек бифуркации рассматриваются значения $\varepsilon = 0$ и $\mu \in (0, 1)$.

От системы (8), путем введения новых переменных $u_1 = \xi$, $u_2 = \eta$, $u_3 = \xi'$, $u_4 = \eta'$, перейдем к нормальной системе:

$$\begin{cases} u'_1 = u_3, \\ u'_2 = u_4, \\ u'_3 = 2u_4 + \rho \left(u_1 - \mu + \frac{\mu - 1}{(u_1^2 + u_2^2)^{3/2}} u_1 - \frac{\mu}{[(u_1 - 1)^2 + u_2^2]^{3/2}} (u_1 - 1) \right), \\ u'_4 = -2u_3 + \rho \left(u_2 + \frac{\mu - 1}{(u_1^2 + u_2^2)^{3/2}} u_2 - \frac{\mu}{[(u_1 - 1)^2 + u_2^2]^{3/2}} u_2 \right), \end{cases} \quad (9)$$

т.е. к системе вида

$$u' = F(u, \varepsilon, \mu, t), \quad u \in \mathbb{R}^4, \quad (10)$$

где $F(u, \varepsilon, \mu, t)$ – вектор-функция, определяемая правой частью системы (9). При $\varepsilon = 0$ (круговой случай) система (10) является автономной:

$$u' = F_0(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^4, \quad (11)$$

здесь $F_0(u, \mu)$ – вектор-функция, определяемая правой частью системы (9) при $\rho = 1$.

Точки либрации системы (8) соответствуют постоянным решениям системы (10). В частности, треугольные точки либрации L_4 и L_5 соответствуют решениям

$$v_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В работе изучены основные сценарии бифуркационного поведения системы (10) в

окрестностях треугольных точек либрации. Ограничимся здесь приведением основных результатов, полученных для точки v_4 .

Перенесем начало координат системы (10) в точку либрации v_4 , т.е. произведем в ней замену $h = u - v_4$. В результате система (10) примет вид

$$h' = A(\varepsilon, \mu, t)h + a(\varepsilon, \mu, t, h), \quad (12)$$

где $h \in \mathbb{R}^4$, $a(\varepsilon, \mu, t, h) = O(\|h\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$,

$$A(\varepsilon, \mu, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4}\rho & \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & \frac{9}{4}\rho & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Состояние равновесия $h = 0$ системы (12) соответствует точке либрации v_4 системы (10)

На первом этапе исследования системы (12) рассмотрим случай $\varepsilon = 0$, т.е. систему

$$h' = A_0(\mu)h + a(\mu, h), \quad (13)$$

где $h \in \mathbb{R}^4$, $a(\mu, h) = O(\|h\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$,

$$A_0(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система (13) является автономной системой дифференциальных уравнений и соответствует круговой задаче. Поведение системы (13) в окрестности решения $h = 0$ определяется поведением собственных значений матрицы $A_0(\mu)$. Характеристическое уравнение для матрицы $A_0(\mu)$ имеет вид:

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0. \quad (14)$$

Корни биквадратного уравнения (14) определяются по формулам

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\gamma}, \quad \gamma = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}. \quad (15)$$

Здесь следует различать три случая:

$$S1) 1 - 27\mu(1 - \mu) < 0; \quad S2) 1 - 27\mu(1 - \mu) = 0; \quad S3) 1 - 27\mu(1 - \mu) > 0.$$

В работе обсуждаются все эти случаи. В каждом случае определяется топологический тип точки либрации. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть выполнено условие S1). Тогда при всех малых $\varepsilon > 0$ точка равновесия $h = 0$ системы (12) является гиперболической.

Теорема 4. Пусть выполнено условие S2) или S3). Тогда $h = 0$ является негиперболической точкой равновесия системы (12). При этом значение $(0, \mu_0)$ векторного параметра (ε, μ) при любом μ_0 , удовлетворяющем условию S2) или S3), является точкой бифуркации системы (12) в задаче о вынужденных колебаниях.

Из второго утверждения следует, что малейшее изменение параметров ε и μ системы (12) вблизи точки $(0, \mu_0)$ может привести к качественному изменению фазового портрета этой системы в окрестности решения $h = 0$, т.е. к тем или иным сценариям бифуркации. Приведем некоторые из результатов второй главы, полученных при изучении таких бифуркаций, при этом ограничимся рассмотрением случая S3), являющегося основным в работе.

Наряду с системой (12) будем рассматривать линейную систему

$$h' = A(\varepsilon, \mu, t)h. \quad (16)$$

Обозначим через $V(\varepsilon, \mu)$ - матрицу монодромии системы (16), т.е. $V(\varepsilon, \mu) = X(\varepsilon, \mu, T)$, где $T = 2\pi$, а $X(\varepsilon, \mu, t)$ - фундаментальная матрица решений системы (16).

Пусть μ_0 удовлетворяет соотношению S3). В этом случае система (16) имеет две пары мультипликаторов вида $e^{\pm 2\pi\lambda_1(\mu_0)i}$, $e^{\pm 2\pi\lambda_3(\mu_0)i}$. Здесь возможны различные ситуации, связанные с тем, каковыми являются показатели Флоке $\lambda_1(\mu_0)i$ и $\lambda_3(\mu_0)i$ системы (16). В работе основное внимание уделяется случаю, когда одно из чисел $\lambda_1(\mu_0)$ и $\lambda_3(\mu_0)$ рационально, а другое - иррационально. В этом случае возможны два основных сценария бифуркации: бифуркация субгармонических колебаний (этот сценарий соответствует рациональному показателю Флоке) и бифуркация квазипериодических колебаний (соответствует иррациональному показателю Флоке). В случае бифуркации субгармонических колебаний при переходе векторного параметра (ε, μ) через точку $(0, \mu_0)$ в окрестности точки $h = 0$ могут возникать или

исчезать периодические решения с периодами $2\pi q$; здесь $\frac{p}{q}i$ – рациональный показатель Флоке. В случае квазипериодических колебаний при переходе векторного параметра (ε, μ) через точку $(0, \mu_0)$ в окрестности точки $h = 0$ могут возникать или исчезать длиннопериодические или квазипериодические колебания.

Во второй главе работы рассмотрены также вопросы об основных сценариях бифуркационного поведения системы (10) в окрестностях прямолинейных точек либрации v_1, v_2, v_3 . Описан топологический тип этих точек при различных значениях параметра μ . Заметим, что в отличие от треугольных точек либрации, прямолинейные точки можно найти только численно. Поэтому описание основных сценариев бифуркаций в окрестностях этих точек проводилось на основе компьютерного моделирования.

Основной задачей исследования в **третьей главе** является задача о бифуркации субгармонических колебаний в окрестностях треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел.

Будем говорить, что значение $(0, \mu_0)$ векторного параметра (ε, μ) является точкой бифуркации субгармонических колебаний периода $2\pi k$ ($k \geq 2$) системы (12), если существуют $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и $\mu = \mu(\delta)$, зависящие от некоторого малого параметра $\delta \geq 0$ и такие, что:

а) при $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и $\mu = \mu(\delta)$ система (12) имеет нестационарное $2\pi k$ -периодическое решение $h = h(t, \delta)$;

б) $\max_t \|h(t, \delta)\| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Приводятся достаточные условия бифуркации, устанавливающие, что при определенных значениях параметра масс μ и эксцентриситета ε в окрестностях треугольных точек либрации возникают нестационарные $2\pi k$ -периодические решения.

Рассмотрим систему (10) в предположении, что параметр μ определен равенством

$$\mu_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Собственные значения (15) соответствующей матрицы $A_0(\mu_2)$ будут равны

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}i, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Рассматриваемый случай отвечает приведенной выше ситуации S3). Значения параметров $\varepsilon = 0$ и $\mu = \mu_2$ будут бифуркационными в окрестностях точек либрации v_4 и

v_5 системы (12). Основным сценарием бифуркации является возникновение у системы (10) в окрестностях точек либрации v_4 и v_5 нестационарных 4π -периодических решений, т.е. бифуркация удвоения периода.

Основным утверждением третьей главы является следующая

Теорема 5. *Значение $(0, \mu_2)$ является точкой бифуркации субгармонических 4π -периодических колебаний системы (8) в окрестности точки либрации v_4 .*

Для доказательства этой теоремы система (12) ассоциируется с дискретной динамической системой, описываемой уравнением:

$$h_{n+1} = U(h_n, \varepsilon, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где $h_n \in R^4$, $U(*, \varepsilon, \mu) : R^4 \rightarrow R^4$ – оператор сдвига по траекториям системы (12) за время от 0 до T , где $T = 2\pi$. Неподвижные точки оператора $U(*, \varepsilon, \mu)$ определяют начальные значения T -периодических решений системы (12). Так как $f(0, t, \varepsilon, \mu) \equiv 0$ (здесь $f(0, t, \varepsilon, \mu)$ – правая части системы (12)), то система (17) при всех значениях двумерного параметра (ε, μ) имеет неподвижную точку $h = 0$, т.е. $U(0, \varepsilon, \mu) \equiv 0$. Задача о локальных бифуркациях системы (12) в окрестности решения $h = 0$ в естественном смысле равносильна аналогичной задаче для системы (17).

Оператор $U(*, \varepsilon, \mu)$ представим в виде

$$U(h, \varepsilon, \mu) = V(\varepsilon, \mu)h + v(\varepsilon, \mu, h); \quad (18)$$

здесь $V(\varepsilon, \mu) = X(\varepsilon, \mu, T)$, где $X(\varepsilon, \mu, t)$ – фундаментальная матрица решений системы (16), а нелинейность $v(\varepsilon, \mu, h)$ удовлетворяет соотношению:

$$\|v(\varepsilon, \mu, h)\| = o(\|h\|) \quad \text{при} \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

Задача о бифуркации субгармонических 4π -периодических колебаний системы (12) в окрестности решения $h = 0$ равносильна соответствующей задаче о локальных бифуркациях операторного уравнения

$$h = V^2(\varepsilon, \mu)h + \tilde{v}(\varepsilon, \mu, h), \quad (19)$$

здесь

$$\tilde{v}(\varepsilon, \mu, h) = V(\varepsilon, \mu)v(\varepsilon, \mu, h) + v(\varepsilon, \mu, V(\varepsilon, \mu)h + v(\varepsilon, \mu, h)).$$

При $\varepsilon = 0$ и $\mu = \mu_2$ оператор $V^2(\varepsilon, \mu)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Для доказательства теоремы 5 используется достаточный признак, приведенный в теореме 1. Проверка этого достаточного признака (т.е. соотношения $\det(Q) \neq 0$) потребовала решения ряда специальных задач для дифференциального уравнения (12), а также необходимость выбора соответствующих собственных векторов оператора $V^2(0, \mu_2)$, по направлению которых решается задача о правильных точках бифуркации операторного уравнения (19).

Вторая группа результатов третьей главы содержит схему получения асимптотических формул для приближенного представления возникающих в теореме 5 4π -периодических решений системы (12). Предлагаемая схема позволяет получать асимптотические (по степеням малого параметра $\delta \geq 0$) формулы вида

$$h_\delta = \delta e_1 + \delta^2 \zeta_1 + \delta^3 \zeta_2 + o(\delta^3), \quad \varepsilon_\delta = \delta \eta_1 + \delta^2 \eta_2 + o(\delta^2), \quad \mu_\delta = \mu_2 + \delta \theta_1 + \delta^2 \theta_2 + o(\delta^2).$$

Эти формулы получены на основе соответствующих равенств, некоторые из которых приведены в теореме 2; при этом в качестве основного рассматривается операторное уравнение (19).

В работе также рассмотрены аналогичные вопросы о бифуркации субгармонических колебаний системы (8) периода $2\pi t$ при $t \geq 3$. Получены аналогичные теореме 5 утверждения.

Автор выражает благодарность своему **научному руководителю М.Г.Юмагулову** за неоценимую помощь в работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях из списка ВАК

1. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н. Бифуркация периодических решений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // *Астрономический журнал*, 2009 г., т.86, №2. С. 170-174
2. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н. Бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации задачи трех тел // *Известия вузов. Математика*. 2010 г., №6. С. 82-89

В других изданиях

3. Беликова О.Н. Итерационная процедура численного исследования периодических решений ограниченной эллиптической задачи трех тел. // Сборник научных трудов "Новые программные средства для предприятий Урала", вып. 5. Магнитогорск, 2006. С. 91-92
4. Беликова О.Н., Юмагулов М.Г. Периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел. // Труды Уфимской международной математической конференции "Теория функций, дифференциальные уравнения, вычислительная математика", 1 - 5 июня 2007 г.
5. Беликова О.Н., Юмагулов М.Г. Семейство периодических решений в окрестностях точек либрации ограниченной задачи трех тел. // Материалы научно-практической конференции "Прикладная математика и информационные технологии в науке и образовании", Сибай, 2008 г. С. 98-101
6. Беликова О.Н. Сценарии бифуркаций в окрестностях треугольных точек либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел. // Материалы региональной научно-практической конференции "Уральский регион Республики Башкортостан: человек, природа, общество". Сибай, 2009 г. С 352-356.