СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию профессора Я.Т. Султанаева
(г. Уфа, 26-27 октября 2023 г.)

Уфа 2023

УДК 517.984
ББК 22.162.4
С71

Спектральная теория операторов и смежные вопросы: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию профессора Я.Т. Султанаева (Уфа, 26-27 октября 2023 г.). – Уфа: Издательство БГПУ, 2023. – 39 с. – ISBN 978-5-907730-37-3

В сборнике конференции представлены работы широкому кругу вопросов в области спектральной теории. Издание представляет интерес для специалистов и студентов, занимающихся спектральной теорией и смежными вопросами.

Подготовлен коллективом кафедры математики и статистики Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы и Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН.

Рецензенты: Мусин И.Х., д-р физ-мат. наук, директор Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН;
Фазуллин З.Ю., д-р физ-мат. наук, проф., УУНиТ;

Редколлегия: Вильданова В.Ф., канд. физ-мат. наук, доц.;
Гарифуллин Р.Н. канд. физ-мат. наук, доц.;
Кудашева Е.Г., канд. физ-мат. наук, доц.

ISBN 978-5-907730-37-3

© Кафедра математики и статистики , 2023
© Издательство БГПУ, 2023

Содержание

On basicity of a perturbed system of cosines in generalized Lebesgue spaces

Aleskerov M.I.
Ganja State University, Ganja, Azerbaijan

The work considers a perturbed system of cosines with a piecewise continuous phase. Sufficient conditions for phase of jumps are found, under which this system forms a basis in generalized Lebesgue spaces.

Let $p : [-\pi, \pi] \to [1, +\infty)$ be some Lebesgue measurable function. We denote the class of all measurable functions on $[-\pi, \pi]$ (with respect to the Lebesgue measure) by L_0. Let us accept the notation $I_p(f) \stackrel{def}{\equiv} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p(t)} dt$. Let $L \equiv \{f \in L_0 : I_p(f) < +\infty\}$. Regarding the norm

$$\|f\|_{p(\cdot)} \stackrel{def}{\equiv} \inf\left\{\lambda > 0 : I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\},$$

L is Banach and we denote it by $L_{p(\cdot)}$.

Consider the following system of cosines

$$\{1, \cos(nt - \alpha(t))\}_{n=1}^{\infty}, \tag{1}$$

where $\alpha(t)$ is a real, piecewise continuous function on the interval $[0, \pi]$. Let the set $\{t_k\}_1^{\infty}$ be discontinuity points of the first kind on $(0, \pi)$, which has a unique limit point $t_0 \in (0, \pi)$.

Let us denote by r the number after which the following conditions are satisfied

$$-\frac{\pi}{p(t_k)} < \alpha(t_k - 0) - \alpha(t_k + 0) < \frac{\pi}{q(t_k)}, k = \overline{r, \infty}. \tag{2}$$

Let us determine the integers $n_i, i = \overline{1, r}$ from the following conditions

$$-\frac{1}{p(t_i)} < \frac{\alpha(t_i - 0) - \alpha(t_i + 0)}{\pi} + n_i - n_{i-1} < \frac{1}{q(t_i)}, i = \overline{1, r}. \tag{3}$$

Theorem. Let the above conditions be true for the function $\alpha(\theta)$ and let the numbers $n_i, i = \overline{1, r}$ be determined from conditions (2) and (3). Let $\alpha(\pi) \neq -\frac{\pi}{2p(\pi)} + \left(n_r - \frac{1}{2}\right)\pi$. Then the system of cosines (1) forms a basis in $L_{p(\cdot)}(0, \pi)$ when

$$-\frac{\pi}{2p(\pi)} + \left(n_r - \frac{1}{2}\right)\pi < \alpha(\pi) < -\frac{\pi}{2p(\pi)} + \left(n_r + \frac{1}{2}\right)\pi;$$

if $\alpha(\pi) < -\frac{\pi}{2p(\pi)} + \left(n_r - \frac{1}{2}\right)\pi$, then system (1) is not complete in $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$, but is minimal; for $\alpha(\pi) > -\frac{\pi}{2p(\pi)} + \left(n_r + \frac{1}{2}\right)\pi$, it is complete, but is not minimal in $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$.

О полноте производных цепочек полиномиального операторного пучка четвертого порядка

Алиев А.Р.[1], Рзаев Э.С.[2]

[1]Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан, email: alievaraz@yahoo.com

[2] Институт математики и механики, г. Баку, Азербайджан, email:elvin.rzayev88@gmail.com

Пусть $H-$ сепарабельное гильбертово пространство, $A-$ самосопряженный положительно-определенный оператор в H. Как известно, область определения оператора A^{α} $(\alpha \geq 0)$ становится гильбертовым пространством H_{α} относительно скалярного произведения $(x,y)_{\alpha} = (A^{\alpha}x, A^{\alpha}y)$, $x,y \in D(A^{\alpha})$; при $\alpha = 0$ считаем $H_0 = H$.

Далее используются обозначения из [1].

В работе изучена полнота производных цепочек, отвечающих краевой задаче на полуоси

$$P(d/dt)u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u''(0) - Ku'(0) = \psi \tag{2}$$

и построенных по собственным и присоединенным векторам полиномиального операторного пучка четвертого порядка

$$P(\lambda) = \lambda^4 E + A^4 + \sum_{j=1}^{4} \lambda^{4-j} A_j, \tag{3}$$

где $A_j, \ j = 1,2,3,4$, линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, $K \in L(H_{5/2}, H_{3/2})$, $\varphi \in H_{7/2}$, $\psi \in H_{3/2}$, $u(t) \in W_2^4(\mathbb{R}_+; H)$, производные понимаются в смысле теории распределений.

Здесь установлены достаточные условия на операторные коэффициенты краевой задачи (1), (2) для полноты производных цепочек пучка (3) в пространстве $H_{7/2} \oplus H_{3/2}$.

[1] Al-Aidarous E.S., Aliev A.R., Rzayev E.S., Zedan H.A. Fourth order elliptic operator-differential equations with unbounded operator boundary conditions in the Sobolev-type spaces // Bound. Value Probl., 2015, vol. 2015, no. 191, 14 pp.

On the approximation of the Hilbert transform in Holder spaces

Aliev R.A., Alizade L.Sh.
Baku State University

Let the function u be defined on the real axis and $\alpha \in (0,1]$. If there exists a number $M > 0$ such that for any $x, y \in R$

$$|u(x) - u(y)| \leq M \cdot |x - y|^{\alpha}$$

and for any $x, y \in R \backslash \{0\}$

$$|u(x) - u(y)| \leq M \cdot |1/x - 1/y|^{\alpha},$$

then the function u is said to be Holder continuous with exponent α in the real axis. The class of Holder continuous functions with exponent α on the real axis with norm

$$\|u\|_{\alpha} = \|u\|_{\infty} + \sup_{x,y \in R, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} + \sup_{x,y \in R\backslash\{0\}, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|1/x - 1/y|^{\alpha}}$$

forms a Banach space and is denoted by $H_{\alpha}(R)$, where

$$\|u\|_{\infty} = \max_{x \in R} |u(x)|.$$

Let $H_{\alpha}^{0}(R) = \{u \in H_{\alpha}(R) : u(\infty) = 0\} \subset H_{\alpha}(R)$. The Hilbert transform of a function $u \in H_{\alpha}^{0}(R)$, $\alpha \in (0,1]$ is defined as the Cauchy principle value integral

$$(Hu)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{R} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{R \backslash (t - \varepsilon, t + \varepsilon)} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad t \in R.$$

It is well known that the Hilbert transform of the function $u \in H_{\alpha}^{0}(R)$, $\alpha \in (0,1]$ exists for any $t \in R$. In case $\alpha \in (0,1)$, the Hilbert transform is a bounded map in the space $H_{\alpha}^{0}(R)$.

Denote

$$(H_{\delta}u)(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in Z} \frac{u(t + (k + 1/2)\delta)}{-k - 1/2}, \quad \delta > 0.$$

This article is devoted to the approximation of the Hilbert transform of functions from the space $H_{\alpha}^{0}(R)$ by the operators H_{δ}, $\delta > 0$.

Theorem. If the function u belongs to the space $H_{\alpha}^{0}(R)$, $\alpha \in (0,1)$, then a family of functions $\{H_{\delta}u(t)\}$ uniformly converges to the function $(Hu)(t)$ as $\delta \to 0$ and the following inequality holds:

$$\|Hu - H_{\delta}u\|_{\infty} \leq \|u\|_{\alpha} \left(32 + \frac{24}{\alpha}\right) \cdot \delta^{\alpha}.$$

On the basicity of a perturbed system of exponents in rearrangement invariant spaces

Alili V.G.
Baku Slavic University, Baku, Azerbaijan

In this work the basicity problem of a perturbed system of exponents in rearrangement invariant space $X(-\pi,\pi)$ over the interval $(-\pi,\pi)$ is studied.

Let $(R;\mu)$ be a measure space. Let $\mathscr{M}^+$ be the cone of μ-measurable functions on R whose values lie in $[0,+\infty]$. The characteristic function of a μ-measurable subset E of R denote by χ_E .

Definition 1. A mapping $\rho : \mathscr{M}^+ \to [0,+\infty]$ is called a Banach function norm (or simply a function norm) if, for all $f, g, f_n, n \in N$, in $\mathscr{M}^+$, for all constants $a \geq 0$ and for all μ-measurable subsets $E \subset R$, the following properties hold:

(P1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-a.e.; $\rho(af) = a\rho(f)$; $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$;

(P2) $0 \leq g \leq f$ μ-a.e. $\Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$;

(P3) $0 \leq f_n \uparrow f$ μ-a.e. $\Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$;

(P4) $\mu(E) < +\infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < +\infty$;

(P5) $\mu(E) < +\infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$, for some constant $C_E : 0 < C_E < +\infty$, depending on E and ρ, but independent of f .

Let $\mathscr{M}$ denote the collection of all extended scalar-valued (real or complex) μ-measurable functions and $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}$ the subclass of functions that are finite μ-a.e. .

Definition 2. Let ρ be a function norm. The collection $X = X(\rho)$ of all functions f in $\mathscr{M}$ for which $\rho(|f|) < +\infty$, is called a Banach function space. For each $f \in X$, define $\|f\|_X = \rho(|f|)$.

A space X equipped with the norm $\|f\|_X = \rho(|f|)$ is called a Banach function space. Let

$$\rho'(g) = \sup\left\{\int_\gamma f(\tau)\, g(\tau)\, |dt| : f \in \mathscr{M}^+; \rho(f) \leq 1\right\}, \forall g \in \mathscr{M}^+.$$

A space $X' = \{g \in \mathscr{M} : \rho'(|g|) < +\infty\}$, is called an associate space (Kothe dual) of X.

The following theorem is true.

Theorem. *Let $X(-\pi,\pi)$ be a r.i.s. with Boyd indices $\alpha_X; \beta_X \in (0,1)$. Let the following conditions be satisfied for the sequence $\{\lambda_n\}$*

$$\gamma_{X'} < -2\alpha < \alpha_X;\ w_0 \in A_X; \lambda_n \neq 0\,,\ \forall n \neq 0\,\&\,\lambda_i \neq \lambda_j,\, i \neq j.$$

Then the system $1 \cup \left\{e^{\pm i\lambda_n t}\right\}_{n\in N}$,where $\lambda_n = \sqrt[m]{|P_m(n)|}$, $P_m(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0$ is a m-th degree polynomial, forms a basis for $X(-\pi,\pi)$, isomorphic to the classical system of exponents $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$.

Об одномерной задаче Гольдштика

Басков О.В., Потапов Д.К.
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Рассматривается одномерный аналог математической модели отрывных течений несжимаемой жидкости М.А. Гольдштика [1].

Одномерная задача Гольдштика имеет вид

$$-u'' = \omega g(x, u(x)), \quad x \in (0, 1), \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь спектральный параметр $\omega > 0$ — завихренность, а нелинейность задана следующим образом:

$$g(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < x - 1, \\ 0, & \text{если } u \geqslant x - 1. \end{cases}$$

В [2] задача (1), (2) была решена аналитически. В последнее время ряд результатов для одномерной задачи Гольдштика получен в [3], [4].

В данной работе установлены свойства решений изучаемой краевой задачи (монотонность, сходимость и равномерная сходимость), а также свойства функционала энергии при различных значениях завихренности. Методом пристрелки найдено приближенное решение задачи (1), (2), а также проведено сравнение точного и приближенного решений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 23-21-00069, https://rscf.ru/project/23-21-00069/.

[1] Гольдштик М.А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. No 6. С. 1310–1313.

[2] Потапов Д.К. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 2004. Т. 8. No 3–4. С. 163–170.

[3] Басков О.В., Потапов Д.К. Управление и возмущение в задаче Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. управ. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 275–282.

[4] Потапов Д.К. Аппроксимация задачи Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. No 9. С. 1191–1198.

Регуляризация и обратные задачи для дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями

Бондаренко Н.П.
Саратовский государственный университет, г. Саратов, Россия

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$\ell_n(y) = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{m-1+s} (-1)^k \bigl(\tau_{2k}(x) y^{(k)}\bigr)^{(k)} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} \Bigl(\bigl(\tau_{2k+1}(x) y^{(k)}\bigr)^{(k+1)} + \bigl(\tau_{2k+1}(x) y^{(k+1)}\bigr)^{(k)}\Bigr),$$

где $x \in (0,1)$, $n = 2m+s$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \{0,1\}$, $(\tau_\nu)_{\nu=0}^{n-1}$ — коэффициенты-распределения (обобщенные функции), $\tau_\nu \in W_{2-s}^{-i_\nu}[0,1]$ для $\nu = \overline{0, n-1}$ и $i_{2k+j} := m-k-j$, $k \ge 0$, $j \in \{0,1\}$.

В работе [1] был предложен регуляризационный подход, который позволяет свести уравнение $\ell_n(y) = \lambda y$, где λ — спектральный параметр, к системе первого порядка

$$Y' = (F(x) + \Lambda) Y,$$

где Y — вектор-функция (столбец) размера n, Λ — $(n \times n)$-матрица, у которой элемент в позиции $(n,1)$ равен λ и все остальные элементы — нулевые, $F(x)$ — *согласованная* с дифференциальным выражением $\ell_n(y)$ матрица специальной структуры с регулярными элементами.

Доклад основан на результатах статьи [2]. Будут рассмотрены вопросы о регуляризации дифференциального выражения $\ell_n(y)$ при помощи различных согласованных матриц и о влиянии выбора согласованной матрицы на основные спектральные характеристики, используемые в теории обратных спектральных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/

[1] Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 788–793.

[2] Bondarenko N.P. Regularization and inverse spectral problems for differential operators with distribution coefficients // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 16. Article ID 3455. 23 p.

Быстрые алгоритмы решения нелинейного уравнения Шредингера

Делицын А.Л.
ИППИ РАН им. А.А. Харкевича, г.Москва, Россия

Начальная задача для нелинейного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u, \qquad -\infty < t < \infty, \qquad z > 0, \qquad u|_{z=0} = u_0(t)$$

является простейшей, но реалистичной моделью для описания распространения сигнала в волоконно-оптической линии предачи. При прохождении линии передачи информации сигнал полностью искажается и требует восстановления. Основной проблемой является необходимость быстрого решения данной задачи. Начальная задача для линейного уравнения Шредингера требует всего $O(NlnN)$ действий (комплексных умножений). Под быстрыми понимаются алгоритмы, требующие меньше чем $O(N^2)$ действий.

В настоящий момент времени для решения указанной задачи могут рассматриваться алгоритмы, связанные с тремя различными подходами. В качестве первого может быть рассмотрен метод обратной задачи рассеяния. Формально он требует $O(Nln^2N)$ действий. Его численная неустойчивость является основным препятствием для практического применения. В случае продвижения в области теории устойчивости методов решения обратной задачи рассеяния данный подход станет исключительно актуальным в практическом плане. Вторым методом является теория возмущений, в том числе метод Крылова-Боголюбова для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих исходную задачу. Данный подход является основным рабочим методом, применимым на практике, но реализован только для первой поправки теории возмущений. Третьим возможным методом является применение малоранговых аппроксимаций рядов Вольтерра. Подобные методы обладают высокой скоростью работы. Основной проблемой является необходимость непосредственного вычисления операторов Вольтерра и отсутствие математической теории, позволяющей предсказать поведение алгоритмов.

1. А. Л. Делицын, “Быстрые алгоритмы решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений Захарова–Шабата и их приложения”, Матем. заметки, 112:2 (2022), 198–217

Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида в ограниченной области

Исхоков С.А.
Институт математики НАНТ, г.Душанбе, Таджикистан

Пусть Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ и $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$. Для мультииндекса $k = (k_1, \dots, k_n)$ положим $u^{(k)}(x) = \partial^{|k|}u(x)/(\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n})$, $\quad |k| = k_1 + \cdots + k_n$. Вырождающиеся эллиптические операторы дивергентного вида

$$L[u](x) = \sum_{|k|,\,|l| \le r} \left(\rho^{\alpha_{kl}}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1}$$

изучены в работах С.М.Никольского, П.И.Лизоркина, Н.В.Мирошина, К.Х.Бойматова и др. (см. [1, 2] и имеющуюся в них библиографию). В этих работах используется метод, основанный на элементах полуторалинейных форм в гильбертовом пространстве, в частности, применяются различные обобщения теоремы Лакса-Мильграма. Наши результаты относятся к случаю вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида

$$L[u](x) = \sum_{|k| \le 2r} \rho^{2\beta_k}(x) b_k(x) u^{(k)}(x), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2}$$

Операторы вида (2) с достаточно гладкими коэффициентами $b_k(x)$ сводятся к виду (1). Поэтому вызывает интерес случай операторов вида (2), коэффициенты которых недифференцируемы. В нашем случае предполагается, что эти коэффициенты ограничены и непрерывны по Гёльдеру. При некоторых условиях на коэффициенты $b_k(x)$ и числа β_k нами доказаны некоторые интегральные неравенства и рассмотрены их приложения, в частности доказано неравенство вида

$$c\left\|v;\, L^{2r}_{2,\,\beta}(\Omega)\right\| \le \|L[v];\, L_2(\Omega)\| + K\,\|v;\, L_2(\Omega)\|,$$

где c, K – положительные постоянные и

$$\left\|v;\, L^{2r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 = \int_\Omega \rho^{2\beta}(x) \sum_{|k|=2r} |u^{(k)}|^2 dx.$$

[1] Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. Изв. Вузов. Математика. – 1988. – No 8. – С. 4–30.
[2] Исхоков С.А. Мат. заметки. – 2010. – Т. 87. – No 2. – С. 201–216.

Approximation for the q-Bernstein-Kantorovich operator on the symmetric interval

Karahan D.
Department of Mathematics, University of Harran, Turkey

In this study, the q-analogue of the Bernstein-Kantorovich operator on the symmetric interval is defined and the approximation theorems are given. The Korovkin type and the Voronovskaya type approximation of the operator are investigated. Using the modulus of continuity, rate of convergence are calculated.

[1] Bernstein S.N. Demonstration Du Theoreme De Weierstrass Fondee Sur Le Calcul Des Probablities. Commun. Soc. Math. Kharkow. 1912-13. Vol. (2)13. no. 1. P. 549вЂ“566.

[2] Kantorovich L.V. Sur Certains Developpements Suivant Les Polynomes De La Forme De S. Bernstein I, II. C.R. Acad. Sci. URSSS. 1930. P. 563-568, 595-600.

[3] Korovkin P.P. On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions. (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)MR 1953. Vol. 90. вЂ" P.961-964.

[4] Lorentz G.G. Bernstein Polynomials. University of Toronto Press. Toronto. 1953.

[5] Papanicolau C.G. Some Bernstein Type Operators. Amer. Math.Month. 1975. Vol. 82. P.674-677.

[6] Karahan D., Izgi A. Approximation properties of BernsteinKantorovich type operators of two variables. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics. 2019. Vol. 68. P. 2313-2323.

Коэрцитивные оценки и разделимость для трижды гармонического оператора с матричным потенциалом

Каримов О.Х.

Институт математики им. А.Джураева НАНТ, г.Душанбе, Таджикистан

Проблемой разделимости дифференциальных операторов впервые занимались математики В.Н.Эверитт и М.Гирц. Существенный вклад в дальнейшее развитие теории разделимости дифференциальных выражений внес К.Х.Бойматов и его ученики (см. [2], [4] и имеющиеся там ссылки).

Наш доклад посвящен изучению разделимости трижды гармонического оператора и примыкает к работе [3]. Пусть в пространстве $L_2(R^n)^l$, где l – натуральное число, рассматриваем дифференциальный оператор

$$-\Delta^3 u(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \tag{1}$$

где значения $V(x, \omega)$, $x \in R^n, \omega \in C^l$ являются квадратными положительно определенными эрмитовыми матрицами из $\operatorname{End} C^l$.

Найдены условия на функцию $V(x, \omega)$ при выполнении которых уравнение (1) разделяется в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)^l$, и для всех решений $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W^6_{2,loc}(R^n)^l$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)^l$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|\Delta^3 u(x)\| + \|V(x, u)u(x)\| + \sum_{i=1}^{n} \|V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_i^3}\| \leq M\|f(x)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

[1] Everitt W.N.,Gierz M. Some inequallities associated with certain differential operators. Math.Z., 1972, v.126, pp.308-326.

[2] Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения. Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1984, т.170, с.37-76.

[3] Zayed E.M.E., Salem Omram. Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert. International J. Math.Combin, 2010, v.4, pp.13-23.

[4] Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом. Уфимский математический журнал, 2017, т.9, выпуск 1, стр. 55-62.

Существование решения нелинейного эллиптического уравнения без условия знака на младший член и L_1-данными

Кожевникова Л.М.

Уфимский университет науки и технологий, г.Уфа, Россия

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$, для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + \frac{M(\mathrm{x}, u)}{u} + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \dots, a_n(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}))$, $b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ имеют рост, определяемый функцией Музилака-Орлича $M(\mathrm{x}, z)$. На функцию M и сопряженную к ней функцию $\overline{M}$ не требуются дополнительное ограничение по переменной z (обычно это Δ_2–условие). Предполагается, что по переменной $\mathrm{x} \in \Omega$ функция M подчиняется условию log-гельдеровской непрерывности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерефлексивного пространства Музилака-Орлича. Заметим, что условие знакоопределенности младшего члена по переменной s_0

$$b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})s_0 \geq 0$$

здесь не предполагается.

В ограниченных областях вопросы существования энтропийных и ренормализованных решений нелинейных эллиптических задач без условия знака на младший член уравнения исследовались в работах [1], [2] и др. В настоящей работе впервые без ограничений на меру строго липшицевой области Ω доказано существование ренормализованного решения задачи (1), (2) в нерефлексивных пространствах Музилака-Орлича-Соболева.

[1] T.Ahmedatt, M.S.B. Elemine Vall, A.Benkirane, A.Touzani *Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1 data* // Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. – 2017. – 44:2, P. 190-213.

[2] S. M. Douiri,· A. Benkirane, M. A. Khellou, Y. El Hadfi *Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces* // Analysis and Mathematical Physics. — 2021. – 11:66, P. 1-26.

Spherical means on the Bessel-Kingmann hypergroup

Krasnoschekikh G.V., Volchkov Vit.V.
Donetsk State University, Donetsk, Russia

The structure of some classes of mean periodic functions with respect to the Bessel convolution is studied. A description of these classes in the form of series on special functions is obtained.

Let $\alpha > -1/2$. Denote by $L^{1,\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ the space of even locally summable functions with respect to the measure $|x|^{2\alpha+1}dx$ on the interval $I_R = (-R, R)$, $0 < R \leq +\infty$. For $0 < r < R$, we put $V_r(I_R) = \{f \in L^{1,\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R) : f \star \chi_r = 0 \text{ on } I_{R-r}\}$, $U_r(I_R) = \{f \in L^{1,\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R) : f \star \delta_r = 0 \text{ on } I_{R-r}\}$, where χ_r is the indicator of I_r, δ_r is the delta function at point r on the Bessel-Kingmann hypergroup, and the symbol $\star$ means the Bessel convolution (see [1]). Let also $\mathcal{Z}^1_r = \{\lambda > 0 : \mathbb{I}_{\alpha+1}(\lambda r) = 0\}$, $\mathcal{Z}^2_r = \{\lambda > 0 : \varphi_\lambda(r) = 0\}$, where $\varphi_\lambda(x) = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\mathbb{I}_\alpha(\lambda x)$, $\mathbb{I}_\nu(z) = J_\nu(z)z^{-\nu}$, and J_ν is the Bessel function.

Theorem 1. Let $0 < r < R \leq +\infty$, $m \geq [\alpha] + 2$, and let $f \in V_r(I_R) \cap C^{2m}(I_R)$. Then $\sup\limits_{\lambda\in\mathcal{Z}^1_r} \lambda^{2m-2\alpha-1}|c_\lambda(f)| < +\infty$ and $f(x) = \sum_{\lambda\in\mathcal{Z}^1_r} c_\lambda(f)\varphi_\lambda(x)$, where

$$c_\lambda(f) = \frac{2^{1-2\alpha}r^{-2\alpha-6}\lambda^{-4}}{\Gamma^2(\alpha+1)\mathbb{I}^2_{\alpha+2}(\lambda r)} \int_0^r f(x)\varphi_\lambda(x)x^{2\alpha+1}dx$$

and the series converges in the space $C^k(I_R)$ for $0 \leq k < 2(m - \alpha - 1)$.

Theorem 2. Let $0 < r < R \leq +\infty$, $m \geq [\alpha] + 2$, and let $f \in U_r(I_R) \cap C^{2m}(I_R)$. Then $\sup\limits_{\lambda\in\mathcal{Z}^2_r} \lambda^{2m-2\alpha-1}|d_\lambda(f)| < +\infty$ and $f(x) = \sum_{\lambda\in\mathcal{Z}^2_r} d_\lambda(f)\varphi_\lambda(x)$, where

$$d_\lambda(f) = \frac{2^{1-2\alpha}r^{-2\alpha-4}\lambda^{-2}}{\Gamma^2(\alpha+1)\mathbb{I}^2_{\alpha+1}(\lambda r)} \int_0^r f(x)\varphi_\lambda(x)x^{2\alpha+1}dx$$

and the series converges in the space $C^k(I_R)$ for $0 \leq k < 2(m - \alpha - 1)$.

In the case under consideration, Theorems 1 and 2 refine the Hörmander-type approximation theorem obtained by Selmi and Nessibi [1, Theorem 3.2].

The study was conducted on the topic of the state task (Cipher from the Unified State Accounting Information System RD: FRRE-2023-0015).

[1] Selmi B., Nessibi M.M. A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup // J. Math. Anal. Appl. V. 329. 2007. P. 163–190.

Обратные задачи колебательной спектроскопии

Курамшина Г.М.

МГУ имени М.В.Ломоносова , химический факультет, Москва, Россия

Предлагаются новые постановки обратных задач расчетов силовых полей многоатомных молекул при совместной обработке данных колебательной спектроскопии и результатов квантово-химических расчетов в приложениях к биологически важным системам. Численные методы основаны на теории регуляризации некорректно поставленных задач. Работа выполнена в рамках госбюджетной темы «Строение и динамика атомно-молекулярных систем».

[1] Kochikov I., Stepanova A., Kuramshina G. Scaled in cartesian coordinates ab initio molecular force fields of dna bases: Application to canonical pairs // Molecules. — 2022. — Vol. 27, no. 2. — P. 427.

[2] Kuramshina G. M., Kochikov I. V., Sharapova S. A. Regularized ab initio molecular force fields for key biological molecules: melatonin and pyridoxal-5-phosphate methylamine shiff base (vitamin b6) // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2021. — Vol. 29, no. 4. — P. 549–566.

Mathematical simulation of stochastic oscillations of a string with a moving boundary

Litvinov V.L., Litvinova K.V.

Samara State Technical University, Moscow State University, Moscow, Russia

The widespread use in technology of mechanical objects with moving boundaries necessitates the development of methods for their calculation. The paper considers stochastic vibrations of a string with moving boundaries. The case of a difference kernel makes it possible to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integro-differential equations to studying a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to use statistical numerical methods. The differential equation, boundary and initial conditions describing the vibrations of the string have the form [1]:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) - 2\nu V_{\xi\tau}(\xi,\tau) - (1-\nu^2)V_{\xi\xi}(\xi,\tau) -$$

$$-d\int\limits_{\xi}^{\xi+\nu\tau} K(-d(\xi-\eta))V_{\xi\xi}(\eta,\frac{1}{\nu}(\xi-\eta)+\tau)d\eta=F(\xi,\tau), \qquad (1)$$

$$V(0,\tau)=0, V(1,\tau)=0, V(\xi,0)=V_1(\xi), V_\tau(\xi,0)=0. \qquad (2)$$

Theorem. The solution to problem (1)-(2) can be given as a string $V(\xi,\tau)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n(\tau)\sin(\omega_n\xi)$. The system of integro-differential equations is transformed into a system of random differential equations.

[1] Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations. Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020.Vol. 26. No. 2. P. 188–199.

Рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для многочленов Бернулли и Эйлера

Мирзоев К.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

В докладе будут обсуждаться рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для многочленов Бернулли $B_{8k+s}(x)$ и Эйлера $E_{8k+s}(x)$ при фиксированном $s\in\{0,1,\dots 7\}$. А именно, будет установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема. При $m=0,1,\dots$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{[m/8]}(-1)^k\alpha_{4k+2}C_{m+4}^{8k+4}B_{m-8k}(z)=\frac{i(m+4)}{2^{m+6}}\sum_{j=1}^{8}(-1)^{j-1}(2z-1+a_j)^{m+3}=$$

$$=\frac{m+4}{2^{m+5}}\sum_{k=0}^{[m/2]+1}(-1)^k(\sqrt{2})^{2k+1}\left(\gamma_{2k+1}-\beta_{2k+1}\right)C_{m+3}^{2k+1}(2z-1)^{m-2k+2},$$

$$\sum_{k=0}^{[m/8]}(-1)^k\alpha_{4k}C_m^{8k}E_{m-8k}(z)=\frac{1}{2^{m+2}}\sum_{j=1}^{8}(2z-1+a_j)^m=$$

$$=\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^k2^k\left(\alpha_{2k}+\delta_{2k}\right)C_m^{2k}(2z-1)^{m-2k},$$

где числа a_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ определяются равенствами

$$a_1 = \sqrt{2} - i,\ a_2 = \sqrt{2} + i,\ a_3 = -\sqrt{2} - i,\ a_4 = -\sqrt{2} + i$$

$$a_5 = -i(\sqrt{2} - 1),\ a_6 = i(\sqrt{2} - 1),\ a_7 = i(\sqrt{2} + 1),\ a_8 = -i(\sqrt{2} + 1),$$

а последовательности чисел $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \delta_m$ ($m = 1, 2, \ldots$) - равенствами

$$\alpha_m = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m, \quad \beta_m = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m,$$

$$\gamma_m = \left(i + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m - \left(i - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m, \qquad \delta_m = \left(i + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(i - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m.$$

Положив $z = 0$, $z = 1/6$, $z = 1/4$, $z = 1/3$, $z = 1/2$ в равенствах этой теоремы, немедленно получаем хорошо известные и некоторые новые рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для чисел Бернулли и Эйлера.

Об энтропийных решениях задач Неймана и Дирихле для эллитических уравнений в неограниченной области

Мукминов Ф.Х., Вильданова В.Ф.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ рассматривается задача Неймана для уравнения

$$-\mathrm{div}(a(x, u, \nabla u)) + b_0(x, u, \nabla u) + b_1(x, u)\mu = f, \quad f \in L_1(\Omega), \qquad (1)$$

где μ - неотрицательная мера Радона. На границе $\partial\Omega$ ставится условие Неймана: $a(x, u, \nabla u) \cdot n = 0$.

При рассмотрении эллиптических задач в неограниченной области, на наш взгляд, при определении основного пространства следует использовать норму, основываясь только на градиентах функций. Другие авторы включают в норму основного пространства еще и какую-либо норму самой функции. Это упрощает доказательства существования решения, но требует включения в уравнение специфических (искусственных) слагаемых, позволяющих оценить упомянутую норму самой функции — решения задачи. Наш подход не требует включения в уравнение искусственных слагаемых.

Векторное поле $a(x, u, y)$ в (1) удовлетворяет при $x \in \Omega$ следующим условиям с возрастающей функцией $g(r)$:

$$\overline{M}(x, |a(x, r, y)|) \leq g(r)\left(G(x) + M(x, |y|)\right), \quad r \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

$$a(x,r,y)\cdot y \geq c_0 M(x,|y|) - G(x), \quad r\in\mathbb{R}, \quad c_0>0,$$

$$(a(x,r,y)-a(x,r,z))\cdot(y-z)>0,\ y\neq z, \quad y,z\in\mathbb{R}^m, \ \ r\in\mathbb{R}, \quad x\in\Omega.$$

Функция G является элементом пространства $L_1(\Omega)$, $M(x,s)$ – функция Музилака-Орлича, $\overline{M}(x,s)$ удовлетворяет Δ_2 условию, каратеодориевые функции b_i при всех $r>0$ удовлетворяют неравенствам:

$$|b_0(x,s,y)| \leq g(r)(\widetilde{G}_0(x)+M(x,|y|)), |s|\leq r, |x|\leq r;$$

$$|b_1(x,s)|\leq g(r)\widetilde{G}_1(x), |s|\leq r, |x|\leq r,$$

где $\widetilde{G}_0\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\widetilde{G}_1\in L_{1,\mu,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

$$b_0(x,r,y)r\geq 0. \tag{2}$$

Пусть существует возрастающая функция $\widetilde{g}(r)$, $r>0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\widetilde{g}(r)=\infty$, такая, что

$$|b_1(x,s)|>\widetilde{g}(r),\ s\geq r,\ x\in\Omega. \tag{3}$$

Пространство $\mathcal{H}^1_M(\Omega)$ определим как замыкание множества градиентов функций из $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ в $*$-слабой топологии пространства $L_M(\Omega)^m$. Требуем, чтобы пространство $\mathcal{H}^1_M(\Omega)$ не содержало констант.

Определение. Энтропийным решением задачи Неймана для уравнения (1) называется функция u такая, что $T_k(u)\in\mathcal{H}^1_M(\Omega)$ при всех $k>0$ и при всех $\xi\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ корректно неравенство

$$\int\limits_\Omega (a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\xi)+(b_0(x,u,\nabla u)-f)T_k(u-\xi))dx+$$

$$+\int\limits_\Omega b_1(x,u)T_k(u-\xi)d\mu\leq 0.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия на a, b_i, тогда существует энтропийное решение задачи Неймана для уравнения (1).*

[1] Vildanova V.F., Mukminov F.Kh. Perturbations of Nonlinear Elliptic Operators by Potentials in the Space of Multiplicators // Journal of Mathematical sciences 2021, T. 257, № 5, C. 569–578.

О приближении обобщенно дифференцируемых функций сингулярными интегралами в пространстве $L_{2\pi}^{p}$

Мусаев А.М.

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, г.Баку, Азербайджан, email: emus1957@mail.ru

Для приближения функций $f \in L_{2\pi}^{p}$ рассмотрим m-сингулярный интеграл

$$A_{\lambda}^{[m]}(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) f(x+kt) \right] K_{\lambda}(t)dt, \qquad (1)$$

где 2π периодическая функция $K_{\lambda}(t)$ зависит от параметра λ и удовлетворяет условиям:

1^0. $K_{\lambda}(t)$ есть четная функция на $[-\pi,\pi]$,

2^0. $\int_{-\pi}^{\pi} K_{\lambda}(t)dt = 1$.

Теорема. Пусть $f \in L_{2\pi}^{p}$, неотрицательная функция $K_{\lambda}(t)$ удовлетворяет условиям 1^0, 2^0 и $\nu_{\lambda,\delta}^{(s)}(\varphi) = 0$ $[\nu_{\lambda,0}^{(s)}(\varphi)]$ при $\lambda \to \infty$ для любого $\delta > 0$, где

$$\nu_{\lambda,s}^{(s)}(\varphi) = \int_{\delta}^{\pi} \varphi^{s}(t) K_{\lambda}(t)dt, \;\; \nu_{\lambda,0}^{(s)}(\varphi) = \int_{\delta}^{\pi} \varphi^{s}(t) K_{\lambda}(t)dt \to 0$$

при $\lambda \to \infty$, $1 \le s \le m+1$, $\varphi(t)$-некоторая положительная функция на $[0,\pi]$ и $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 1$. Если существует функция $D_{X_{2\pi}}^{(m,s)} f(x) \in L_{2\pi}$ такая, что

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{1+s}{t^{1+s}} \int_{0}^{t} \varphi_m(f;x,t)dt - D_{L_{2\pi}}^{(m,s)} \right\|_{L_{2\pi}} = 0,$$

то справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left\| \frac{(-1)^m}{\mu_{\lambda,0}^{(s)}} [A_{\lambda}^{[m]}(f;x) - f(x)] - \frac{1}{1+s} D_{X_{2\pi}}^{(m,s)} f(x) \right\|_{L_{2\pi}} = 0,$$

где $\mu_{\lambda,\delta} = \int_{\delta}^{\pi} \left| K_{\lambda}^{(1)}(t) \right| dt = 0 \, [\mu_{\lambda,0}^{(s)}(\varphi)]$ при $\lambda \to \infty$,

$$D_{L_{2\pi}}^{(m,s)} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1+s}{t^{1+s}} \int_{0}^{t} \varphi_m(f;x,t)dt, \quad 1 \le s \le m+1.$$

Observable strong field signatures of extra spacetime dimensions in the braneworld black hole

Nandi K.K.[1,2], Izmailov R.N.[1], Karimov R.Kh.[1] and Potapov A.A.[3]

[1]Zel'dovich International Center for Astrophysics, M. Akmullah Bashkir State Pedagogical University, 3A, October Revolution Street, Ufa 450008, RB, Russia

[2]High Energy Cosmic Ray Research Center, University of North Bengal, Siliguri 734013, WB, Bharat

[3]Ufa University of Science & Technology, Sterlitamak Campus, Lenin Avenue, 49, Sterlitamak 453103, RB, Russia

The gravitational effects from the fifth dimension in the Randall-Sundrum scenario introduces a stress tensor onto the 3−brane via the projection of 5d−bulk Weyl tensor. Dadhich, Maartens, Papadopoulos and Rezania (DMPR) derived an exact black hole solution of the effective Einstein equations on the brane that contains a "tidal charge" Υ (different from the electric charge) as an imprint from the fifth dimension contributing a power law modification $\pm\frac{\Upsilon^2}{r^2}$ to the Schwarzschild metric. Of particular interest here is the negative sign, which is not admissible in general relativity. We study here strong field lensing observables including the ring down quasinormal mode (QNM) frequencies in the eikonal limit. It turns out that the tidal charge effects in DMPR black holes may cause significant differences in observables from those of the Schwarzschild black hole. In particular, critical exponents correspond to a stronger Lyapunov instability than that for the Schwarschild black hole. The case of the SgrA* black hole is considered to highlight the strong field observable effects of tidal charge.

This work was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 23-22-00391, https://rscf.ru/en/project/23-22-00391/.

К вопросу о совпадении некоторых классов гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром

Напалков В.В. (мл.), Нуятов А.А.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

НГТУ им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, Россия

Пусть H – некоторое гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных на множестве $\Omega \subset \mathbb{C}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\{e_1(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $\{e_2(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$ – некоторые полные системы функций в H. Обозначим

$$\widetilde{f}(z) \stackrel{def}{=} (e_1(\cdot, z), f)_H \,\forall z \in \Omega_1,\ \widetilde{H} = \{\widetilde{f},\ f \in H\}, (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_H,$$

$$\|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}} = \|f_1\|_H \, \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}; \quad \widehat{f}(z) \stackrel{def}{=} (e_2(\cdot, z), f)_H \, \forall z \in \Omega_1,$$
$$\widehat{H} = \{\widehat{f}, \, f \in H\}, \, (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)_{\widehat{H}} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_H, \, \|\widehat{f}_1\|_{\widehat{H}} = \|f_1\|_H \quad \forall \widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in \widehat{H}.$$

Более подробно, см. [1]. Пусть $\alpha(z), \beta(z)$, $z \in \Omega_1$ – некоторые комплекснозначные функции. Обозначим

$$e'_1(\tau, z) \stackrel{def}{=} \alpha(z) \cdot e_1(\tau, z), \quad e'_2(\tau, z) \stackrel{def}{=} \beta(z) \cdot e_2(\tau, z), \quad \forall \tau \in \Omega \, \forall z \in \Omega_1;$$
$$\widetilde{f}'(z) \stackrel{def}{=} (e'_1(\cdot, z), f)_H \, \forall z \in \Omega_1, \widetilde{H}' = \{\widetilde{f}', \, f \in H\}, \, (\widetilde{f}'_1, \widetilde{f}'_2)_{\widetilde{H'}} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_H,$$
$$\|\widetilde{f}'_1\|_{\widetilde{H}'} = \|f_1\|_H \quad \forall \widetilde{f}'_1, \widetilde{f}'_2 \in \widetilde{H}'; \quad \widehat{f}'(z) \stackrel{def}{=} (e'_2(\cdot, z), f)_H \, \forall z \in \Omega_1,$$
$$\widehat{H}' = \{\widehat{f}', \, f \in H\}, \, (\widehat{f}'_1, \widehat{f}'_2)_{\widehat{H}'} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_H, \, \|\widehat{f}'_1\|_{\widehat{H}'} = \|f_1\|_H \quad \forall \widehat{f}'_1, \widehat{f}'_2 \in \widehat{H}'.$$

Справедливо следующее

Утверждение. Пусть пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ совпадают, т.е. состоят из одних и тех же функций, и при этом нормы функций по этим пространствам совпадают. Далее $\alpha(z), \beta(z)$, $z \in \Omega_1$ –вещественнозначные функции такие, что либо $\alpha(z) > 0, \beta(z) > 0 \, \forall z \in \Omega_1$, либо $\alpha(z) < 0, \beta(z) < 0 \, \forall z \in \Omega_1$. Тогда следующие условия равносильны:

1. пространства $\widetilde{H}'$ и $\widehat{H'}$ совпадают;
2. выполнено тождество $\alpha(z) \equiv \beta(z) \, \forall z \in \Omega_1$.

В докладе обсуждается вопрос. Будет ли верно аналогичное утверждение для комплекснозначных функций α и β? Какие условия на функции α, β нужно наложить, чтобы пространства $\widetilde{H}'$ и $\widehat{H'}$ совпадали, если известно, что пространства пространства $\widetilde{H}$ и $\widehat{H}$ совпадают?

[1] Напалков (мл.) В.В., Нуятов А.А. Об одном условии совпадения пространств преобразований функционалов гильбертова пространства// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022.Т. 28, № 3. С. 142-154.

Осцилляционные и спектральные свойства одного класса дифференциальных операторов четвертого порядка

Ойнаров Р.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

Пусть $I = (0, \infty)$. Пусть r, u и v – положительные функции, такие что r – непрерывно дифференцируемая, а u и v – локально интегрируемые на интервале I функции. Положим $D_r^2 f(t) = \frac{d}{dt} r(t) \frac{df(t)}{dt}$.

В 2020 году, работая над научным проектом в Казахстане, мы столкнулись с вопросами, связанными со спектральной теорией дифференциальных операторов. Зная, что профессор Султанаев Я.Т. является крупнейшим в мире специалистом в этой области, мы предложили ему совместную работу. Сначала на интервале I мы рассматривали дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением $ly(t) = \frac{1}{u(t)}(v(t)y^{(n)}(t))^{(n)}$, $n \geq 1$, при некоторых предположениях относительно интегрируемости или неинтегрируемости функций v и u в окрестности нуля и на бесконечности (см. [1]). Но для исследования спектральных свойств оператора L при всех возможных поведениях функций v и u в окрестности нуля и на бесконечности нужно было сначала разработать методы исследования. Поэтому решили начать работу с исследования дифференциального оператора четвертого порядка, порожденного дифференциальным выражением $ly(t) = \frac{1}{u(t)}D_r^2\big(v(t)D^2y(t)\big)$.

В докладе обсуждаются результаты, полученные в работе [2]. Более того, отметим еще одну совместную работу [3], в которой были исследованы осцилляционные свойства одного нелинейного уравнения четвертого порядка.

[1] Kalybay, A., Oinarov, R., Sultanaev, Y., Oscillation and spectral properties of some classes of higher order differential operators and weighted nth order differential inequalities. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2021, 3 (2021). https://doi.org/10.14232/ejqtde.2021.1.3

[2] Kalybay, A., Oinarov, R., Sultanaev, Y., Weighted second-order differential inequality on set of compactly supported functions and its applications. Mathematics 9, 2830 (2021). https://doi.org/10.3390/math9212830

[3] Kalybay, A., Oinarov, R., Sultanaev, Y., Weighted differential inequality and oscillatory properties of fourth order differential equations. J. Inequal. Appl. 2021, 199 (2021). https://doi.org/10.1186/s13660-021-02731-7

Нелинейная обратная задача для псевдо гиперболического уравнения третьего порядка с интегральным условием

Садыхзаде Рена Шафи гызы
Бакинский Государственный Университет, г. Баку, Азербайджан.

Псевдо гиперболические уравнения возникают в теории нестационарного течения вязкого газа при распространении начальных уплотнений в вязком газе [1], в теории солитонов [2] при описании процесса движения электронов в системе «сверхпроводник — диэлектрик с туннельной проводимостью — сверхпроводник».

Обратные задачи являются благоприятно развивающим разделом современной математики. В последнее время обратные задачи широко применяются в различных областях науки.

Рассмотрим для псевдо гиперболического уравнения

$$u_{tt}(x,t) - \alpha u_{txx}(x,t) - \beta u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \tag{2}$$

условием Неймана

$$u_x(0,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \tag{3}$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \tag{4}$$

и дополнительным условием

$$u(x_0,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \tag{5}$$

где $x_0 \in [0,1], \alpha > 0, \beta > 0$ – заданные числа, $f(x,t), \phi(x), \psi(x), h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Введем следущее обозначение

$$\widetilde{C}^2(D_T) = \left\{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{txx}(x,t) \in C(D_T)\right\}.$$

Определение. Пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t) \in \widetilde{C}^2\left(\bar{D}_T\right), \quad a(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих уравнению (1) в D_T, условиям (2) в $[0,1]$, условиями (3)-(5) в $[0,T]$, назовем классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5).

Решая исходную обратную краевую задачу осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. При помощи метода Фурье доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Далее вновь производится переход к исходной обратной задаче, следовательно делается вывод о разрешимости исходной обратной задачи.

[1] 1 Войт С. С. Распространение начальных уплотнений в вязком газе // Учёные записки МГУ. Сер. : Механика. 1954. Т. 4, вып. 172. С. 125–142.

[2] 2. Лонгрен К., Скотт Э. Солитоны в действии. М. : Мир, 1981.

Об одной нелинейной обратной краевой задаче для нелинейного уравнения диффузии

Салимов М.Ю, Гусейнова Х.Т.

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, г.Баку, Азербайджан, email: m.y.salimov@gmail.com

Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

Под обратной задачей для уравнений с частными производными в настоящей работе подразумевается такая задача, в которой вместе с решением требуется определить правую часть или (и) тот или иной коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. В случае, если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача будет линейной; если же неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной.

Рассмотрим нелинейную обратную краевую задачу нахождения решения и неизвестного коэффициента нелинейного уравнения диффузии [1]-[2]

$$\begin{gathered} a(t)u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + p(t)u(x,t)(1-u(x,t)) + f(x,t), \\ D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}. \end{gathered} \tag{1}$$

при условиях:

$$u(x,0) + \int_0^T b(t)u(x,t)dt = \varphi(x) \;\; (0 \le x \le 1), \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u_x(1,t) = 0 \quad (0 \le t \le T), \tag{3}$$

$$u(x_0,t) = h(t) \;\; (0 \le t \le T), \tag{4}$$

где $x_0 \in (0,1)$ - фиксированное число $a(t) > 0$, $b(t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $h(t)$ - заданные функции, а $u(x,t)$ и $p(t)$ - искомые функции.

Определение. Классическим решением обратной краевой задачи (1)-(4) назовем пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t) \in C^{2,1}(D_T)$ и $a(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих уравнению (1) в D_T, условию (2) в [0,1] и условиям (3), (4) на $[0,T]$ в обычном смысле.

В работе с помощью метода Фурье и принципа сжатых отображений доказаны существование и единственность решения нелокальной обратной краевой задачи для нелинейного уравнения диффузии.

[1] Fisher, R.A. The Wave of Advance of Advantageous Genes /R.A. Fiьher // Annals of Eugenics. 1937. No 7. pp. 355-369.

[2] Колмогоров А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. 1937, т. 1, No 6, pp. 1-25.

О задаче определения непрерывного запаздывания для возмущенной степени оператора Лапласа

Седов А.И.

УрГЭУ, г.Екатеринбург, Россия

Пусть

$$\Pi = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}. \tag{1}$$

В пространстве $L_2 = L_2(\Pi)$ рассмотрим оператор Лапласа T_0, порожденный краевой задачей Дирихле

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v\Big|_{\partial\Pi} = 0, \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа. Введем оператор $T = \displaystyle\int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0, $\beta > 0$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Будем считать, что a^2/b^2 иррациональное число, тогда спектр $\sigma(T) = \lambda_{nk}$ оператора T однократный.

Пусть

$$(Pv)(x,y) = (1 - p'(x))(1 - q'(y))v(x - p(x), y - q(y)),$$

где $p \in C_1[0,a]$ и $q \in C_1[0,b]$ строго возрастающие функции, причем $p(0) = q(0) = 0$, $p(a) = a$, $q(b) = b$.

Применив метод подробно рассмотренный в [1], можно показать, что для произвольной последовательности ξ_{nk} "мало" отличающейся от последовательности λ_{nk} существуют функции p и q такие, что спектр оператора $T+P$ совпадает с последовательностью ξ_{nk}.

Также отметим, что метод применим и к сингулярным обыкновенным дифференциальным операторам, как показано в [2].

[1] Sedov A.I., Kameneva G.A., Bondarenko T.A. About one problem of identification of delay by spectral data // Lecture notes in electrical engineering, 729, 2021, 306-315

[2] Седов А.И. Определение непрерывного запаздывания в спектральной задаче для оператора Чебышёва первого рода // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 14:4, 2022, 34-39

От вихрей Гинзбурга–Ландау к уравнениям Зайберга–Виттена

Сергеев А.Г.

Математический институт имени В.А.Стеклова, Москва

Вихри Гинзбурга–Ландау — это статические решения уравнений Гинзбурга–Ландау, возникающих в теории сверхпроводимости. Они напоминают гидродинамические вихри, чем и объясняется их название. Если включить в рассматриваемой модели время, то вихри начинают двигаться и могут сталкиваться. Например, два вихря, движущихся по прямой навстречу друг другу, рассеиваются под прямым углом. Для описания динамики вихрей можно воспользоваться т.н. адиабатическим пределом, устремляя скорость движения вихрей к нулю. Предельное поведение вихревых траекторий описывается геодезическими на пространстве вихрей в метрике, задаваемой кинетической энергией.

Оказывается у этой модели есть нетривиальный 4-мерный аналог, описываемый уравнениями Зайберга–Виттена. Это уравнения на 4-мерных римановых многообразиях, являющиеся предельным случаем суперсимметричной теории Янга–Миллса. Особый интерес представляет для нас симплектические многообразия, обладающие наряду с римановой метрикой еще и совместимой с ней почти комплексной структурой. Если ввести в уравнения Зайберга–Виттена масштабный параметр, то можно перейти в них к адиабатическому пределу, устремляя этот параметр к бесконечности. Предельные траектории описываются псевдоголоморфными кривыми, которые можно рассматривать как комплексные аналоги геодезических Гинзбурга–Ландау. Решения уравнений Гинзбурга–Ландау в адиабатическом пределе редуцируются к семействам вихрей Гинзбурга–Ландау в плоскостях, нормальных к предельной псевдогоморфной кривой. Таким образом, уравнения Зайберга–Виттена можно рассматривать как комплексный аналог динамических уравнений Гинзбурга–Ландау, в котором роль "времени" играет параметр, пробегающий предельную псевдоголоморфную кривую.

Немного о математических моделях космологической эволюции

Соболевский А. Н.
Факультет физики НИУ ВШЭ, г. Москва, Россия

После небольшого введения в стандартные приближения ньютоновой теории космологической эволюции (приближение Зельдовича [1] и приближение прилипания [2]) будет рассказано о том, как можно под этим углом зрения рассматривать точные кинетические уравнения эволюции (уравнения Власова–Пуассона в монокинетическом приближении). Математически там возникают очень простые уравнения: качественно правильную картину можно получить уже из анализа явных решений трехмерного уравнения Бюргерса, что было обнаружено еще Я. Б. Зельдовичем и В. И. Арнольдом [3].

Прецизионное численное моделирование эволюции в монокинетическом приближении Власова-Пуассона, которое выполнил Stéphane Colombi из Institut d'Astrophysique de Paris [4], не только приводит к очень красивым (и нигде не опубликованным) картинкам, которые я покажу, но и неожиданно хорошо описывается в терминах подхода Зельдовича — о чем сам Яков Борисович, вероятно, не знал.

Доклад основан на материалах неопубликованного совместного исследования с S. Colombi и M. Neyrinck.

[1] Zel'dovich, Ya. B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations. *Astron. Astrophys.* **5** (1970) 84–89.

[2] Gurbatov, S. N., Saichev, A. I., and Shandarin, S. F. The large-scale structure of the Universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **236** (1989) 385–402.

[3] Arnol'd, V. I., Shandarin, S. F., and Zel'dovich, Ya. B. The large scale structure of the Universe. I — General properties. One- and two-dimensional models. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **20** (1982). 111-130.

[4] Sousbie T., Colombi S. `ColDICE`: A parallel Vlasov–Poisson solver using moving adaptive simplicial tesselation. *J. Comput. Phys.* **321** (2016) 644–697.

On some geometric inequalities for Schatten p-norms of Riesz potential operators

Suragan D.
Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

In this presentation, we explore the intriguing realm of Schatten p-norms and their relationship with Riesz potential operators within domains of fixed measure. Our main result unveils the ball as an optimal maximizer for these integer order Schatten p-norms. This finding extends to the polyharmonic Newton potential operator, a vital component in nonlocal boundary value problems associated with the poly-Laplacian. This extension mirrors the pioneering work of M. Kac and T. Kalmenov, originally established for the Laplacian, leading us to the derivation of isoperimetric inequalities for the eigenvalues. These inequalities, akin to the classical Rayleigh-Faber-Krahn and Hong-Krahn-Szego counterparts, further illuminate the structural properties of the polyharmonic Newton potential operator.

In our presentation, we delve into the broader landscape by considering extensions of these results to convolution-type integral operators, offering explicit examples to elucidate our findings. Additionally, we present a new insight into the multidimensional MEMS (micro-electro mechanical systems) problem within the Euclidean space R^d, where $d \geq 3$. Our investigation reveals that minimizing the pull-in voltage for this problem involves the symmetrization of the permittivity profile, and we establish the foundation for this claim through the application of Talenti's comparison principle. This talk is based on our joint works [1]-[3].

[1] Rozenblum G., Ruzhansky M., Suragan D. Isoperimetric inequalities for Schatten norms of Riesz potentials, *J. Funct. Anal.*, **271**:1 (2016), 224–239.

[2] Ruzhansky M., Sadybekov M., Suragan D. *Spectral geometry of partial differential operators*, Taylor & Francis, Chapman and Hall/CRC (2020).

[3] Suragan D., Wei D. On geometric estimates for some problems arising from modeling pull-in voltage in MEMS, *Trends in Mathematics*, to appear, (2023).

Спектр двухмагнонных систем с четырех спиновым обменным гамильтонианом

Ташпулатов С.М.

Институт ядерной физики академии наук республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, sadullatashpulatov@yandex.com

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = J\sum_{m,\tau}(\overrightarrow{S}_m\overrightarrow{S}_{m+\tau})(\overrightarrow{S}_{m+2\tau}\overrightarrow{S}_{m+3\tau}), \tag{1}$$

где J параметр четырех спинового обменного взаимодействие между атомами, $\tau = \pm e_j, j = 1,2,3,...,\nu$; здесь e_j- единичные орты, $\overrightarrow{S}_m = (S^x_m, S^y_m, S^z_m)$ оператор атомного спина величины $s, s > \frac{1}{2}$ в узла m $\nu-$ мерной целочисленной решетки Z^ν. Гамильтониан (1) действует в симметрическому пространстве Фока $\mathcal{H}_{symm}$. Положим $S^{\pm}_m = S^x_m \pm iS^y_m$, где S^+_m и S^-_m оператор рождения и уничтожения магнона в узле m. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определямый условиями $S^+_m\varphi_0 = 0$, $S^z_m\varphi_0 = s\varphi_0$, $||\varphi_0 = 1||$. Векторы $S^-_mS^-_n\varphi_0$ описывают состояние системы двух магнонов, находящихся в узлах m и n со значениями спина s. Пространства, всевозможными линейными комбинациями этих векторов, обозначим через $\mathcal{H}_2$. Обозначим через H_2 сужение оператора H в подпространстве $\mathcal{H}_2$.

Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье $\mathcal{F} : l_2(Z^\nu \times Z^\nu) \to L_2(T^\nu \times T^\nu)$. Положим $\widetilde{H}_2 = \mathcal{F}H_2\mathcal{F}^{-1}$.

Теорема 1. Преобразование Фурье переводит оператор H_2 в ограниченный самосопряженный оператор $\widetilde{H}_2$, действующий в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ по формуле

$$(\widetilde{H}_2f)(\lambda,\mu) = J\sum_{i=1}^{\nu}\int_{T^\nu} f(s,\Lambda-s)\{8s^2\cos(\Lambda-2s)\cos(\Lambda-2\lambda)+4s^2\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3s)\times$$

$$\times\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3\lambda)-4s^2\cos(\frac{\Lambda}{2}-2s)\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3\lambda)-4s^2\cos s\cos(\Lambda-2\lambda)-4s^2\times$$

$$\times\cos(2\Lambda-3s)\cos(\Lambda-2\lambda)-4s^2\cos(\frac{3\Lambda}{2}-2s)\cos(\frac{\Lambda}{2}-\lambda)-4s^2\cos(\Lambda-3s)\cos(\Lambda-\lambda)+$$

$$+4s^2\cos 2s\cos(\frac{\Lambda}{2}-\lambda)+4s^2\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3s)\cos(\frac{\Lambda}{2}-\lambda)-4s^2\cos(\Lambda-s)\cos(\Lambda-2\lambda)-$$

$$-4s^2\cos(\frac{3\Lambda}{2}-2s)\cos(\frac{3\Lambda}{2}-3\lambda)+4s^2\cos(\Lambda-2\lambda-s)\cos(\Lambda-2\lambda)+$$

$$+4s^2\cos(2\Lambda-2s)\cos(\Lambda-2\lambda)\}ds.$$

Теорема 2. Пусть $\nu=1$. Спектр оператора $\widetilde{H}_2$ чисто дискретен и состоит из не более шести собственных значений.

Околонулевые собственные значения возмущенного неэрмитового гамильтониана SSH с PT-симметрией

Тинюкова Т.С., Чубурин Ю.П.
Удмуртский государственный университет, УдмФИЦ УрО РАН,
г.Ижевск, Россия

В последние годы большой интерес стали вызывать неэрмитовы гамильтонианы, описывающие топологические структуры и моделирующие открытые системы с внешними воздействиями (см., например, [?]). Обычно это — одномерные разностные модели, чаще всего — модель Su-Schrieffer-Heeger (SSH) с введенной неэрмитовостью.

Гамильтониан H бесконечной неэрмитовой цепочки SSH с PT-симметрией действует в пространстве $(l^2(\mathbb{Z}))^2$ на двух-компонентные функции $\Psi(n)=(\psi_1(n),\psi_2(n))^T\in\left(l^2(\mathbb{Z})\right)^2$, где T — транспонирование, по формуле [?]

$$H\begin{pmatrix}\psi_1(n)\\ \psi_2(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\delta\psi_1(n)+w\psi_2(n-1)+v\psi_2(n)\\ -i\delta\psi_2(n)+v\psi_1(n)+w\psi_1(n+1)\end{pmatrix},\quad n\in\mathbb{Z},\qquad(1)$$

где w,v — вещественные параметры перехода на соседний узел, δ — вещественный параметр, порождающий неэрмитовость. Рассмотрим возмущенный гамильтониан $H+V$, где потенциал V определяется равенством

$$V\begin{pmatrix}\psi_1(n)\\ \psi_2(n)\end{pmatrix}=V_0\begin{pmatrix}\psi_1(0)\\ 0\end{pmatrix}\delta_{n0},\qquad(2)$$

здесь V_0 — вещественная константа, $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Спектральные свойства гамильтониана $H+V$ исследованы с помощью уравнения Дайсона

$$\Psi=-(H-E)^{-1}V\Psi$$

и найденной авторами функции Грина гамильтониана H.

Теорема. Для достаточно малых $|\delta|, \varepsilon > 0$ и $|E| < \varepsilon$ существует ровно два собственных значения гамильтониана $H+V$. Соответствующие собственные функции $\Psi_j(n) = \left(\psi_1^{(j)}(n), \psi_2^{(j)}(n)\right)$, $j = 1, 2$, имеют вид:

$$\psi_1^{(1)}(n) = e^{ip|n|}, \quad \psi_2^{(n)} = \frac{1}{E+i\delta} \begin{cases} -e^{ipn}\left(\dfrac{w^2-v^2}{v} + O(\delta^2+\varepsilon^2)\right), & n \geqslant 0, \\ e^{-ipn}O(\delta^2+\varepsilon^2), & n < 0, \end{cases}$$

$$\psi_1^{(2)}(n) = e^{ip|n|}, \quad \psi_2^{(n)} = \frac{1}{E+i\delta} \begin{cases} e^{ipn}O(\delta^2+\varepsilon^2), & n \geqslant 0, \\ -e^{-ipn}\left(\dfrac{w^2-v^2}{v} + O(\delta^2+\varepsilon^2)\right), & n < 0. \end{cases}$$

Работа Тинюковой Т.С. выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

[1] Okuma N., Sato M. Non-hermitian topological phenomena: A review. Annual Review of Condensed Matter Physics. 2023. Vol. 14. P. 83–197.

[2] Banerjee A., Sarkar R., Dey S., Narayan A. Non-Hermitian Topological Phases: Principles and Prospects. J. Phys.: Condens. Matter. 2023. Vol. 35. 333001.

Спектральные характеристики обобщенного уравнения устойчивости течения термовязкой жидкости в кольцевом канале

Урманчеев С.Ф., Низамова А.Д., Киреев В.Н.
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В исследовании устойчивости течений жидкостей в плоских каналах накоплен достаточный задел в настоящее время, однако, при изучении этой задачи часто пренебрегают воздействием температурного фактора на смену режима течений [1]. Течения жидкостей возникают в различных отраслях промышленности при эксплуатации технических устройств.

Ранее задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем была приведена к обобщенному уравнению Орра–Зоммерфельда [2]. Аналогично плоскому случаю рассмотрим задачу об устойчивости течения несжимаемой термовязкой жидкости в кольцевом канале под действием перепада давления с фиксированными внешним и внутренним радиусами канала и нагреваемым внутренним стержнем.

Установлено, что учет зависимости вязкости от температуры значительно влияет на выводы относительно гидродинамической устойчивости. Получена зависимость критического числа Рейнольдса от геометрического параметра. При малых значениях параметра термовязкости и геометрическом параметре течение жидкости можно считать практически изотермическим и плоским. Полученное в этом случае значение критического числа Рейнольдса равно 5810, что достаточно близко к значению 5772, соответствующему классическому уравнению Орра-Зоммерфельда для плоского канала. Однако, при увеличении параметра термовязкости вначале происходит уменьшение критического числа Рейнольдса, а затем, с увеличением разности радиусов кривизны стенок наблюдается тенденция к его росту. Таким образом, при течении термовязких жидкостей в кольцевом канале наблюдается зона снижения порога перехода к турбулентному течению.

[1] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // J. of Fluid Mech., 1971. V. 50. Pp. 689–703. DOI: 10.1017/S0022112071002842

[2] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of Temperature Dependence of Viscosity on the Stability // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023. Vol. 44. No. 5. pp. 1778–1784. DOI: 10.1134/S1995080223050463

Определение параметров продольной трещины стержня по собственным частотам изгибных колебаний

Утяшев И.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Рассмотрена коэффициентная обратная задача определения геометрических параметров продольной трещины по собственным частотам изгибных колебаний прямоугольного стержня длины $L = 1$. Аналогичная задача по определению длины продольного надреза по собственным частотам продольных колебаний рассмотрена в [1]. Предполагается, что трещина проходит не по всей длине, а от определенной точки x_c до правого конца. Для решения задачи стержень моделируется в виде двух частей, причем первый не имеет трещины, а второй имеет.

$$y_{-}^{(4)} = d_1^4 \lambda^4 y_{-}, \quad y_{+}^{(4)} = d_2^4 \lambda^4 y_{+}, \tag{1}$$

здесь $d_1^4 = \frac{F_-}{J_{y-}}$, $d_2^4 = \frac{F_+}{J_{y+}}$, $\lambda^4 = \frac{\rho\omega^2}{E}$, y_-- поперечное смещение левее точки x_c (участок стержня без трещины), y_+–правее точки x_c (с трещиной), F – площадь поперечного сечения. Моменты инерций относительно оси Oy: $J_{y+} = \frac{B^3H}{12} - \frac{b^3h}{12}$, $J_{y-} = \frac{B^3H}{12}$.

В месте соединения используются условия сопряжения, в которых приравниваются величины прогибов, углов поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы

$$\begin{aligned} &y_-(x_c) = y_+(x_c), \quad y'_-(x_c) = y'_+(x_c), \\ &y''_-(x_c) = \frac{J_{y+}}{J_{y-}} y''_+(x_c), \quad y'''_-(x_c) = \frac{J_{y+}}{J_{y-}} y'''_+(x_c). \end{aligned} \tag{2}$$

Стержень заделан на левом и правом концах.

Общее решение уравнений (1) примем в виде:

$$\begin{aligned} y_- &= C_{11}y_{1-} + C_{12}y_{2-} + C_{13}y_{3-} + C_{14}y_{4-}, \\ y_+ &= C_{21}y_{1+} + C_{22}y_{2+} + C_{23}y_{3+} + C_{24}y_{4+}. \end{aligned} \tag{3}$$

где y_{ij} $(i = 1,2,3,4; j = +,-)$ – функции Крылова. Подставив (3) в (1)-(2), а также в краевые условия, получим систему, из которой далее получаем характеристическое (частотное) уравнение. Подставив три собственных значения в это выражение получим нелинейную систему относительно длины l, ширины b и глубины h трещины. Решение системы ищется численно, с помощью математического пакета Maple.

[1] Утяшев И.М., Фатхелисламов А.Ф. Идентификация продольного надреза стержня по собственным частотам колебаний // Russian Technological Journal. 2023. № 11(2). С. 92–99.

A sufficient condition on the solution of the inverse problem for a Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition

[1]Ferzullazadeh A.G., [2,3,4]Nabiev I. M.
[1] Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan,
[2] Baku State University, Baku, Azerbaijan,
[3] Institute of Mathematics and Mechanics of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan,
[4] Khazar University, Baku, Azerbaijan

Consider in $[0, \pi]$ the boundary value problem generated by the canonical Dirac equation

$$BY'(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \tag{1}$$

and the nonseparated boundary conditions

$$\begin{aligned} &y_2(0) + (\alpha\lambda + \beta)y_1(0) + \omega y_1(\pi) = 0, \\ &y_2(\pi) + \gamma y_1(\pi) - \overline{\omega} y_1(0) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

where $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, $p(x), q(x) \in W_2^1[0, \pi]$, λ is a spectral parameter, α, β, γ are real numbers, ω is a complex number and $\alpha\omega \neq 0$.

In this work we found, sufficient conditions to which must satisfy a collection of some quantities in order that it be spectral data of the boundary problem (1), (2). As spectral data, we use the ω, spectra of two boundary value problems and some sequence of signs.

Note that some aspects of direct and inverse problems for the Dirac system with nonseparated boundary conditions are presented in [1–4] and other works.

[1] Abdullaev T. Sh., Nabiev I. M. An algorithm for reconstructing the Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, v. 56, No2, p. 256-262.

[2] Ferzullazadeh A.G., Nabiev I.M. Some properties of the spectrum of the Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition, Proc. of Institute of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan, 2020, v. 46, No2, p. 189-196.

[3] Ferzullazadeh, A.G. Solution algorithm of the inverse spectral problem for Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition. Operators and Matrices, 2022, v. 16, No1, p. 113-122.

[4] Makin A. S. Structure of the spectrum of a nonselfadjoint Dirac operator, Sbornik: Mathematics, 2023, v. 214, No1, p. 39-57.

Полнота параметризованных систем целых функций в геометрических терминах

Хабибуллин Б.Н.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Предварительно предполагается обсудить недавно установленную нами в 2020-е гг. новую весьма широкую шкалу условий полноты экспоненциальных систем в классических пространствах функций, непрерывных на компакте и одновременно голоморфных во внутренности этого компакта, а также в пространствах функций, голоморфных на области комплексной плоскости. Условия эти формулируются в терминах соотношений между различными характеристиками распределений показателей экспоненциальной системы с одной стороны и смешанными площадями выпуклой оболочки области определения функций с другой. Они позволяют получить условия полноты экспоненциальных систем в геометрических терминах периметра и евклидовой площади, а также критерии полноты экспоненциальных систем в терминах ширины в направлении, наименьшей ширины или диаметра этого компакта или области на основе [1]. Эта часть доклада развивает многие классические результаты о полноте экспоненциальных систем, достаточно детально отражённые по состоянию до 2012 г. в [2]. Далее намечается распространить эту новую шкалу на полноту параметризованных систем целых функций, более общих, чем экспоненциальные, в описанных выше пространствах. Для этого будут развиты понятия смешанной площади, а также взаимного индикатора целой функции и компакта, что в случае экспоненциальных функций соответствует обычной опорной функции компакта и ранее в частных случаях затрагивалось в [2, 3.3]. В основу методов нашего исследования положены функционально аналитические исследования, в значительной части сконцентрированные в [3].

[1] Хабибуллин Б. Н. *Распределения корней и масс целых и субгармонических функций с ограничениями на их рост вдоль полосы* // Изв. РАН. Сер. матем., **88**:1 (2024), 61 стр. (в печати)

[2] Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности,* Монография, 4-е изд., дополненное, Уфа: РИЦ БашГУ, 2012, xvi+176 с., ISBN: 978-5-7477-2992-6 https://matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/expkhbn.pdf

[3] Хабибуллин Б. Н. *Огибающие в теории функций,* Монография,Уфа: РИЦ БашГУ, 2021 , 140 с., ISBN 978-5-7477-5396-9 https://matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/envkhbn.pdf

Модель вселенной как 3D-браны

Шарипов Р.А.

Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Модель вселенной как 3D-браны — это новая неэйнштейновская теория гравитации. Она строится на основе представлений, согласно которым пространство-время есть расслоение 3D-бран. Основы этой теории изложены в [1], в [2] и в ряде других публикаций автора доклада. Рассматриваемая в докладе теория имеет целый ряд отличий от стандартной ОТО: 1) уравнения гравитации в ней составляют систему из 7 уравнений в частных производных на 7 динамических переменных, в то время как в ОТО — это 10 уравнений на 10 динамических переменных; 2) константа скорости $c_{\text{гр}}$ в уравнениях гравитации в новой теории априори не обязана совпадать со скоростью света; 3) в новой теории нет проблем с определением плотности энергии гравитационного поля, которые для ОТО описаны в [3]; 4) новая теория допускает существование массивных частиц небарионной тёмной материи, движущихся быстрее скорости света.

Сверхсветовые массивные частицы темной материи рассматривались в работе Луиса Гонзалеза-Местреса [4] и в некоторых более поздних его работах. Они были названы супербрадионами. Оказывается супербрадионы Гонзалеза-Местреса естественным образом вписываются в модель вселенной как 3D-браны. Для них определяются импульс и энергия, а также выводятся уравнения движения в гравитационном поле.

В модели вселенной как 3D-браны имеются выделенные трёхмерные системы координат на бранах. По аналогии со стандартной космологией они были названы сопутствующими координатами, хотя в данной теории они играют более фундаментальную роль. Несмотря на наличие выделенных систем координат, модель вселенной как 3D-браны отличается от теории светоносного эфира 19-го века и от теории эфира Эйнштейна-Дирака, которая набирает популярность в наши дни.

[1] Sharipov R.A., *A three-dimensional brane universe in a four-dimensional spacetime with a Big Bang*, 2022, e-print viXra:2207.0173, 1–10.

[2] Sharipov R.A., *3D-brane gravity without equidistance postulate*, 2023, e-print viXra:2306.0104, 1–14.

[3] Фаддеев Л.Д., *Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна* // Успехи физ. наук, 1982, Т. 136, № 3, С. 436–457.

[4] Gonzalez-Mestres L., *Superluminal particles in cosmic-ray physics*, 1999, e-print arXiv:hep-ph/9905454, 1–4.

Интегральные уравнения в обратных задачах гравиметрии и магнитометрии

Ягола А.Г.

МГУ имени М.В.Ломоносова , физический факультет, Москва, Россия

Предлагаются новые методы численного исследования интегральных уравнений Фредгольма 1 рода при совместной обработке данных гравиметрических и магнитометрических измерений в геофизике. Численные методы основаны на теории регуляризации некорректно поставленных задач, Работа поддержана грантом РНФ-ГФЕН 23-41-00002.

[1] Ван Я,, Колотов И.И., Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г. Восстановление магнитной восприимчивости с использованием полных магнитоградиентных данных//Журнал вычислительной математики и математической физики – 2020 - т. 60, №6 - С. 1027-1034.

[2] Wang Y., Leonov A.S., Lukyanenko D.V., Yagola A.G. General Tikhonov regularization with applications in geoscience// CSIAM Transactions on Applied Mathematics - 2020 - v. 1, № 1 - P. 53-85.

Научное издание

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию профессора Я.Т. Султанаева
(г. Уфа, 26-27 октября 2023 г.)

Подписано в печать 01.11.2023
Формат 60X84/16. Компьютерный набор. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. – 2.5. Уч.-изд.л. – 3,7.

Электронное издание. Заказ № 37