ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
УФИМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ

КРАТКИЙ ОТЧЕТ

о научной и научно-организационной деятельности Института за 2015 г.

Уфа - 2015

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УФИМСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

I. ВАЖНЕЙШИЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Математические науки

1.1. Современные проблемы теоретической математики.

1.1.1. В рамках исследований по глобальной голоморфной задаче Коши получено обобщение результата Шапиро по представлениям Фишера пространства целых функций многих переменных на случай дифференциальных операторов с переменными коэффициентами.

1.1.2. В терминах неполноты систем экспонент доказан критерий нетривиальности класса Сиддики на дуге ограниченного наклона, угловые коэффициенты всех хорд которой по модулю меньше единицы.

1.1.3. Исследована задача представления функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром. Получен простой геометрический критерий справедливости фундаментального принципа в произвольной выпуклой области комплексной плоскости. Найдено необходимое условие справедливости фундаментального принципа для инвариантных подпространств с произвольным спектром. На этой основе получен новый критерий справедливости фундаментального принципа для нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств.

1.1.4. Для нелинейной системы дифференциальных уравнений исследована проблема обоснования асимптотики на бесконечности и устойчивости по Ляпунову. Выделены классы уравнений, для которых доказаны теоремы существования и устойчивости точных решений вблизи заданных формальных асимптотических решений.

1.1.5. Предложен новый подход, который позволяет исследовать неавтономные дискретные уравнения. Разработан метод построения решений таких уравнений. Подробно исследована структура высших симметрий трех известных дискретных неавтономных уравнений. Одно из них – это полудискретная одевающая цепочка Шабата. Два других – полностью дискретные уравнения, определенные на квадратной решетке. Первое уравнение является дискретным аналогом одевающей цепочки, введенным Леви и Ямиловым. Второе – неавтономное обобщение потенциального дискретного КдВ.

1.1.6. Исследована задача о подсчете точек произвольной решетки в евклидовом пространстве, принадлежащих семейству ограниченных областей, которые остаются неизменными вдоль некоторого линейного подпространства и расширяются в направлениях, ортогональных этому подпространству. Найден главный член асимптотики и доказаны оценки остатка (в частности, аномально малые оценки остатка) в асимптотической формуле при различных условиях на решетку и на семейство областей. Для целочисленной решетки в пространстве R^n получены усредненные оценки остатка в асимптотической формуле в случае, когда средние берутся по образам области при вращениях на элементы некоторой группы ортогональных преобразований евклидова пространства. В качестве следствия полученных результатов доказана асимптотическая формула для функции распределения собственных значений оператора Лапласа на плоском торе в адиабатическом пределе, задаваемом линейным слоением, с нетривиальной оценкой остатка.

1.1.7. Для абстрактных систем нелинейных уравнений доказаны новые теоретические результаты о необходимых и достаточных условиях существования бифуркаций типа поворота. Основываясь на этих результатах, разработан, так называемый, алгоритм квази-направлений наискорейшего подъема для нахождения бифуркаций типа поворота. Используя этот алгоритм, проведены численные эксперименты на модельных задачах и сравнительный анализ с альтернативными подходами, показывающие значительное превосходство по эффективности и затратности нового подхода.

II. ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Математические науки

1.1. Современные проблемы теоретической математики.

2.1.1. Рассматривалась задача о существовании безусловных базисов из экспонент в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых с весом функций на интервале (-1, 1). Изучены свойства порождающей функции безусловного базиса из экспонент. При некоторых технических условиях на порождающую функцию и в предположении существования безусловного базиса из экспонент в отмеченном пространстве доказано, что оно изоморфно пространству квадратично суммируемых функций на (-1, 1).

2.1.2. Изучена проблема кратной интерполяции в пространстве голоморфных функций в выпуклой области посредством сумм рядов экспонент, сходящихся равномерно на компактных подмножествах области, при условии, что дискретное множество узлов кратной интерполяции лежит на вещественной оси в области и имеет единственную конечную предельную точку на границе области. Получен критерий разрешимости проблемы в терминах распределения предельных направлений показателей экспонент в бесконечности.

2.1.3. Изучены классы бесконечно дифференцируемых функций в выпуклых областях многомерного вещественного пространства, допускающих голоморфное продолжение в многомерное комплексное пространство. Получено описание продолжений. Получены результаты типа теорем Пэйли-Винера и Пэйли-Винера-Шварца.

2.1.4. Исследована обратная спектральная задача для бигармонического оператора с точечными креплениями. Поставленная задача сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора в конечномерном пространстве. Получена теорема о существовании решений и предложен метод построения решений.

2.1.5. На основе метода согласования асимптотических разложений и с использованием теоремы о неподвижной точке построено асимптотическое приближение решения нелинейной задачи Дирихле на отрезке для уравнения второго порядка, возмущенной дельта-образным потенциалом.

2.1.6. Существенно уточнена известная оценка первичного множителя Вейерштрасса, и на ее основе получены новые оценки модуля канонического произведения, не улучшаемые на достаточно широких классах целых функций.

2.1.7. Исследована модель параметрического авторезонанс в системе с диссипацией. Выявлены пороговые значения для амплитуды накачки и коэффициента диссипации, при которых происходит авторезонансное возбуждения нелинейных колебаний. Обнаружено, что захват в авторезонанс возможен для систем с убывающей по времени амплитудой накачки.

2.1.8. Для нелинейной системы дифференциальных уравнений, моделирующей колебательные процессы при наличии диссипации, исследована проблема обоснования асимптотики и устойчивости по Ляпунову. Выделены классы уравнений, для которых справедливы теоремы существования и устойчивости точных решений вблизи заданных формальных асимптотических решений. В частности, для системы уравнений главного параметрического резонанса исследован вопрос устойчивости решений с неограниченно растущей амплитудой на бесконечности. Описаны классы допустимых возмущений, при которых сохраняется захват в авторезонанс. Исследовано влияние случайных возмущений типа «белый шум» на локально устойчивые динамические системы. Доказано, что при условии ограниченности матрицы диффузии сохраняется стохастическая устойчивость равновесия детерминированной системы на асимптотически большом отрезке времени.

2.1.9. Исследована модель плоского волновода с концентрированными массами на границе. Волновод описывался бесконечной полосой, на нижней границе которой вводилась частая смена краевых условий Дирихле и Неймана. В малых окрестностях частей границы с условием Дирихле вводилась функция с большими значениями; на остальной части границы эта функция равнялась нулю. Такая функция характеризовала плотность концентрированных масс возле границы. Рассматривалась обобщенная резольвента для Лапласиана в такой области с описанными краевыми условиями; спектральный параметр умножался на плотность концентрированных масс. Вся резольвента зависела от трех характерных параметров – размеры частей границы с разными краевыми условиями и большие значения плотности в окрестности границы. Предполагалось, что массы легкие, то есть, значения плотности возле границы не слишком велики. В таком предположении показано, что при усреднении легкие массы исчезают и остается резольвента для Лапласиана с одним из классических краевых условий вместо смены. Доказана сходимость резольвенты исходного возмущенного оператора к усредненной, получены оценки скорости сходимости. В случае, когда исходная возмущенная модель периодична, описано асимптотическое поведение первых зонных функций. Показано, что наличие даже легких концентрированных масс приводит к существенному изменению поведения этих зонных функций по сравнению с ранее исследованными схожими задачами о частой смене краевых условий без концентированных масс.

2.1.10. С использованием линейных уравнений метода изомонодромных деформаций для третьего и пятого уравнений Пенлеве построены новые решения временных квантовомеханических уравнения Шредингера, определяемых гамильтонианами энергии с гладкими потенциалом Морса, либо потенциалом Пешля-Теллера. Данные решения одновременно удовлетворяют линейным уравнениям в частных производных первого порядка с коэффициентами, явно зависящими от компонент соответствующей классической гамильтоновой системы, которая определяется стандартными гамильтонианами энергии с гладкими потенциалами Морса (соответственно, Пешля-Теллера) и которая эквивалентна автономной редукции третьего (соответственно, пятого) уравнения Пенлеве. Установлено, что подмножество построенных решений уравнений Шредингера, которые ограничены по пространственной переменной, определяется дискретной серией этих компонент, в точности выделяются старым вариантом правила отбора Бора-Зоммерфельда.

2.1.11. Предложена схема построения интегрируемых полностью дискретных уравнений на квадратной решетке по их высшим симметриям, которая применима как в автономном, так и в неавтономном случаях. В качестве высших симметрий берутся известные интегрируемые дискретно-дифференциальные уравнения. В результате получено несколько новых примеров интегрируемых дискретных неавтономных уравнений. Среди них есть как уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, так и Дарбу-интегрируемые уравнения.

2.1.12. Рассмотрена задача формальной диагонализации дискретного линейного оператора в окрестности особого значения параметра. Исследован случай, когда матрица, задающая особенность имеет кратные собственные значения. В этом вырожденном случае мы применяем метод срезывающей функции, хорошо известный в теории линейных дифференциальных уравнений. Изучены конкретные примеры, когда рассматриваемый дискретный оператор является оператором Лакса для нелинейной системы на квадратной решетке. При помощи метода формальной асимптотической диагонализации построены законы сохранения и высшие симметрии для некоторых дискретных систем.

2.1.13. Разработана модификация метода высших симметрий применительно к классу дифференциально-разностных уравнений, обобщающих известные уравнения Ито-Нориты-Богоявленского. Проведена предварительная классификация интегрируемых случаев.

2.1.14. Рассмотрена классификация решений первого уравнения Пенлеве, отвечающих специальному распределению полюсов на бесконечности. Прослежена связь между этим распределением и особенностями двумерного комплексного многообразия данных монодромии, с помощью которого параметризуются решения. Оказывается, что решения уравнений Пенлеве не имеют полюсов в том или ином критическом секторе комплексной плоскости тогда и только тогда, когда их данные монодромии лежат на подмногообразии особенностей. Такие решения относятся к так называемому классу "усеченных" решений (*int\'egrales tronqu\'ee*) по классификации П.Бутру. Показано, что все известные специальные решения первого и второго уравнений Пенлеве принадлежат этому классу.

2.1.15. Исследовались формулы Лефшеца для потоков на компактных многообразиях, сохраняющих слоение коразмерности один и имеющих неподвижные точки. Разработан подход к формулам Лефшеца, основанный на понятии регуляризованного следа на некоторой алгебре сингулярных интегральных операторов. Доказана формула Лефшеца для потока на компактном многообразии, сохраняющего слоение, задаваемое слоями расслоения над окружностью. Для конкретного примера потока на двумерном торе, сохраняющего слоение типа Риба, доказана формула типа Маккина-Зингера для сглаженных регуляризованных функций Лефшеца.

2.1.16. Для абстрактных уравнений вида $T(u) - \lambda G(u) = 0$ обоснован принципиально новый подход в теории численного нахождения бифуркаций. При этом, предложен новый метод доказательства существования максимального значения минимаксной вариационной задачи метода продолженного функционала. На основе этого доказана теорема о необходимых и достаточных условиях, при которых данная минимаксная задача определяет максимальное по значению бифуркационную точку типа поворота для ветвей решений. Введено новое понятие: квази-направление наискорейшего подъема. На основе этого, разработан новый алгоритм численного расчета бифуркаций типа поворота для ветвей решений систем нелинейных уравнений больших размерностей.

2.1.17. Рассмотрена задача о разрешимости в максимальных областях по рассматриваемым параметрам $(\lambda,\mu)\in\mathrm{R}^2$ эллиптических систем с сильно связаной нелинейностью неопределенного знака (coupled elliptic system) вида

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda\,|\,u\,|^{p-2}\,u + c_1 f(x)\,|\,u\,|^{\alpha-2}|\,v\,|^{\beta}\,u, \qquad x\in\Omega, \\ -\Delta_q v &= \mu\,|\,v\,|^{q-2}\,v + c_2 f(x)\,|\,u\,|^{\alpha}|\,v\,|^{\beta-2}\,v, \qquad x\in\Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} &= v\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где Ω ограниченная область в R^n, $n\ge 1$, с гладкой границей $\partial\Omega$; параметры λ и μ - вещественные числа; функция $f\in L^{\infty}(\Omega)$ возможно переменного знака, $c_1,c_2>0$, $p,q>1$ и $\alpha,\beta\ge 1$. В основном результате построена пороговая (критическая) кривая Γ на плоскости параметров $\lambda\times\mu$, разделяющая области существования и несуществования слабых положительных решений. Используя явный вид этой формулы, дано точное описание поведения кривой Γ на плоскости, и тем самым описана геометрическая структура этой пороговой кривой (непрерывность, выпуклость и монотонность), а также найдены ее асимптотики при больших значениях параметров λ и μ.

2.1.18. Исследовались эллиптические уравнения с нелипшицевой нелинейностью и сингулярным потенциалом вида

$$-\Delta u + q(x)\,|\,u\,|^{\alpha-1}\,u = \lambda u,$$

где $0<\alpha<1$ и $q(x)\ge 0$. В основном результате доказано существование неотрицательных решений при $\lambda>\lambda_1$ (где λ_1 - первое собственное значение оператора Лапласа с нулевым граничным условием). Далее, применяя метод спектрального анализа по методу расслоений и тождество Похожаева, найдена дополнительная критическая точка $\lambda^*>\lambda_1$, которая задается посредством нового типа для этого класса задач вариационного принципа наименьшего действия. Доказано, что этот параметр разделяет области существования и несуществования решений с компактными носителями. Используя это, а также некоторые асимптотические свойства функционала энергии при $\lambda \to +\infty$ и $\lambda \to \lambda^*$, доказано существование решений с компактными носителями при больших значениях λ.

II. НАУЧНО-ОРГАНИЗАЦИОННАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

- **Программы и гранты**

1. Программа фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики» - проект «Интегрируемые уравнения и спектральная теория», руководитель д.ф.-м.н. Новокшенов В.Ю.

2. Программа фундаментальных исследований ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики» - проект «Комплексный анализ и функциональные уравнения», руководитель чл.-корр. РАН Напалков В.В.

3. Программа отделения РАН: «Нелинейная динамика в математических и физических науках». Проект: «Теория нелинейных дискретных систем». Руководитель И.Т. Хабибуллин.

4. Грант РНФ – 2, Гранты РФФИ – 11 (в приложении)

- **Научные кадры**

Среднегодовая численность научных работников Института составляла 31 человек, в том числе - 1 член-корреспондент РАН, докторов наук - 19, кандидатов наук - 11.

При Институте функционирует Спец.совет по защите докторских диссертаций. В 2015 году состоялась защита 5 кандидатских диссертаций.

В аспирантуре Института в 2015 году обучалось 2 аспиранта.

- **Координация**

ИМВЦ ведет совместные исследования с МИРАН им. Стеклова В.А., Санкт-Петербургским отделением МИРАН им. Стеклова В.А., Институтом Математики и механики УрО РАН, Башкирским, Нижегородским, Московским государственными университетами.

- **Международное сотрудничество**

В отчетном году ученые института продолжали активное международное сотрудничество с зарубежными институтами и университетами. В частности, проводились совместные исследования с учеными Института математики Потсдамского университета (Германия), Римского университета (Италия), Университета Фридрихе Шиллера Йена (Германия), Университета Ростока (Германия).

- **Конференции**

Ученые Института участвовали в работе 26 конференций, в т.ч. 18 Международных, из них в 7 зарубежных.

- **Публикации**

В 2015 году опубликовано 63 работы, из них:

- в ведущих рецензируемых журналах – 42, из них входящих в список Web of Sience – 29.

В 2015 году издано 4 номера «Уфимского математического журнала», включенного в базу Scopus.

Вр.и.о. директора ИМВЦ
УНЦ РАН, д.ф.-м.н. И.Х. Мусин