Отчет отдела вычислительной математики за 2008

1 Нелинейная спектральная теория

1.1 Развитие метода продолженного функционала

Исследованы условия при которых существуют глобальные положительные решения следующего однопараметрического семейства параболических уравнений с неопределенным знаком нелинейности

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda u + f(x)|u|^{\gamma-2}u \text{ на } (0,T)\times\Omega, \\ \\ u = 0 \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0 \text{ в } \Omega, \tag{1.2}$$

где Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, λ вещественный параметр, $2 < \gamma < 2^* < \infty$, где $2^* = \frac{2N}{N-2}$ при $2 < N$ и, $2^* = +\infty$ при $2 \geq N$. $f \in L^\infty(\Omega)$, при этом предполагается, что нелинейность $f(x)|u|^{\gamma-2}u$ имеет неопределенный знак.

Рассмотрены следующие основные минимаксные точки

$$\Lambda^d = \sup_{u\in S}\inf_{\phi\in\Phi}\{\frac{\int_\Omega(\nabla u, \nabla(\phi^\gamma/u^{\gamma-1}))dx}{\int_\Omega(\phi^\gamma/u^{\gamma-2})dx}|F(\phi)>0\}, \tag{1.3}$$

и

$$\Lambda^u = \inf_{\phi\in\Phi}\sup_{u\in S}\{\frac{\int_\Omega(\nabla u, \nabla(\phi^\gamma/u^{\gamma-1}))dx}{\int_\Omega(\phi^\gamma/u^{\gamma-2})dx}|F(\phi)>0\}, \tag{1.4}$$

где мы полагаем $\Lambda^d = \Lambda^u = +\infty$, если $\{\phi \in \Phi | F(\phi) > 0\} = \emptyset$ и используем обозначение $F(v) = \int_\Omega f(x)|v|^\gamma dx$, $v \in H$.

В основном результате найдены необходимые и достаточные условия при которых выполняется минимаксное условие: $\Lambda^* := \Lambda^d = \Lambda^u$. При этом доказано, что при всех $\lambda \in (-\infty, \Lambda^*]$ задача (1) обладает глобальными положительными решениями, а при всех $\lambda \in (\Lambda^*, +\infty)$ задача (1) не может иметь таких решений.

1.2 Резонансные проблемы

В ограниченной гладкой области Ω в $\mathbb{R}^n$ рассмотрена резонансная эллиптическая задача следующего вида

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) = \mu\, g(x, u(x)) + f(x) \ \text{ a.e. in } \ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь $\mu \in \mathbb{R}$, λ_1 первое собственное значение оператора $-\Delta$ с граничными условиями Дирихле, $f \in L_p(\Omega)$, $p > n$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. В частном случае $g(x,t) = g(t)$ нелинейность удовлетворяет резонансному условию

$$(\lambda_1 + \mu g'(\mathbb{R})) \cap \sigma_{(-\Delta)} \neq \emptyset. \tag{1.6}$$

В основном результате найден обобщенный критерий Ландесмана-Лазера для функции $r(x,t) = g(x,t) + |t|$. При выполнении этого условия, доказано существование пары положительное – отрицательное решение задачи (1.5) на некотором интервале $\mu \in (0, \mu^*)$. Разработан оригинальный подход в развитии теории степеней Лере-Шаудера в рамках метода расслоений.

2 Кубатурные формулы

2.1 Новый алгоритм построения решетчатых кубатурных формул, с ограниченным пограничным слоем, асимптотически оптимальных на пространствах $\widetilde{W}_2^{\mu}$

$$l_h^{\varphi}: \quad f \;\to\; (l_h^{\varphi}, f) = \int\limits_Q dx\; \varphi(x) f(x) - h^n \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n,\\ hk\in Q}} c_k f(hk).$$

$$\frac{1}{h}\in\mathbb{N},\; Q=[0,1)^n,\; f(x)=\sum_k f_k e^{2\pi ikx},$$

$$\|f|\; \widetilde{W}_2^{\mu}\| = \left[\sum_k |f_k \mu(2\pi ik)|^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \widetilde{W}_2^{\mu} = \widetilde{W}_2^{m},\; \text{если } \mu(\xi) = \;(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}.$$

$$\text{Задача: ? } \arg\min_{\{c_k\}} \;\|l_h^{\varphi}|(\widetilde{W}_2^{\mu})^*\|$$

Если $\varphi(x) = \;\chi_\Omega(x)$, то это почти прежняя задача, отличие только в том, что прежняя кубатурная формула $h^n \sum\limits_{\rho(hk,\;\Omega)\leqslant Lh} c_k f(hk)$ учитывала значения функции f только в ближайшей окрестности области интегрирования.

Получена точная формула оптимальных коэффициентов

$$c_k^{opt}(h) = \; C(x,h)|_{x=hk}, \qquad C(x,h) = \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^n,\\ hq\in Q}} \frac{\sum\limits_{r\in\mathbb{Z}^n} \varphi_{\frac{r}{h}+q} \;/\; |\mu(2\pi i(\frac{r}{h}+q)|^2}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1 \;/\; |\mu(2\pi i(\frac{s}{h}+q)|^2} e^{2\pi iqx}.$$

Дано ее асимптотическое разложение для $\widetilde{W}_2^{m}$

$$C(x,h) = \; \left\{ \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}^n,\\ hq\in Q}} \varphi_q e^{2\pi iqx} + [\ldots] \right\} + O(h^m).$$

Выражение в фигурных скобках берем за $c_k^{as}(h)$ для $\rho(hk,\;\Gamma)\leqslant Lh$,

$$c_k^{as}(h) = \begin{cases} 0 \text{ для } \rho(hk,\;\Omega) > Lh, \\ 1 \text{ для } \rho(hk,\;Q\backslash\Omega) > Lh. \end{cases}$$

Приходим к ОПС формуле, асимптотически оптимальной на пространстве $\widetilde{W}_2^{m}$.

Новый алгоритм на решение проблем прежней теории:

1. Мы не имеем алгоритма автоматического разбиения области на простейшие для произвольных областей с кусочно гладкими границами.

2. В программе применяется вандермондова матрица $(k^j)_{k,j=\overline{1,m}}$, плохо обусловленная для $m \geqslant 6$. Поэтому не удается использовать преимущество теоретической точности $O(h^m)$ для больших m.

3. Прежняя теория в случае неизотропной гладкости накладывает некоторые технические условия на вид неизотропности.

4. Нужно получить алгоритм решения интегральных уравнений математической физики, то есть решетчатые кубатурные формулы высокой точности для интегралов с особенностями.

На эти вопросы отвечает новый алгоритм (проблема, которую нужно будет решать при его реализации — это иметь набор коэффициентов Фурье функции $\varphi(x)$, например, $\varphi(x) = \chi_\Omega(x)$).

2.2 Численное вычисление многомерных интегралов

Программа "CubaInt", предназначенная для вычисления многомерных интегралов по ограниченным выпуклым областям с гладкими границами, тестировалась при следующих параметрах:

1. n от 2 до 10.

2. $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^{b_i}$.

3. M от 2 до 6. -

4. N от 10 до 10^5, где N – количество точек решетки на ребре единичного куба Q. При этом шаг $h = N^{-1}$.

5. $\Omega = \{x : \Phi(x) = 0,\ \Phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^n c_i(x_i - 0.5)^{d_i}\}$.

6. P от 1 до 1000.

Проиллюстрируем результаты расчетов на следующем примере: $a = (2, 1, 2, 1, ..., 2, 1),\ b = (2, 4, 2, 4..., 2, 4)$,$c = (6.25, 39.0625, ..., 6.25, 39.0625),\ d = (2, 4, 2, 4..., 2, 4)$.

n=2, порядки экспериментальных и теоретических погрешностей

N\M	2	3	4	5	6
50	3	3	2	2	1
100	4	4	3	2	2
200	7	5	4	5	3
400	8	9	11	7	7
800	8	10	12	13	14
1600	9	11	13	15	16
3200	10	12	15	16	17
6400	11	14	16	18	18
12800	12	15	17	18	17

N\M	2	3	4	5	6
50	4	6	7	9	11
100	4	6	8	10	12
200	5	7	10	12	14
400	6	8	11	14	16
800	6	9	12	15	18
1600	7	10	13	17	20
3200	8	11	15	18	22
6400	8	12	16	20	23
12800	9	13	17	21	25

n=3, порядки экспериментальных и теоретических погрешностей

N\M	2	3	4	5	6
50	3	3	2	2	1
100	4	4	3	3	3
200	6	7	5	4	4
400	8	8	8	8	7
800	9	9	10	9	9
1600	9	10	11	11	10

N\M	2	3	4	5	6
50	4	6	7	9	11
100	4	6	8	10	12
200	5	7	10	12	14
400	6	8	11	14	16
800	6	9	12	15	18
1600	7	10	13	17	20

n=5, порядки экспериментальных и теоретических погрешностей

N\M	2	3	4	5	6
25	4	3	3	3	2
50	4	4	4	3	3
75	5	4	4	3	2
100	5	4	4	4	3
125	6	5	4	4	4
150	7	6	5	5	4
175	7	7	5	5	4
200	7	7	6	5	5

N\M	2	3	4	5	6
25	3	5	6	7	9
50	4	6	7	9	11
75	4	6	8	10	12
100	4	6	8	10	12
125	5	7	9	11	13
150	5	7	9	11	14
175	5	7	9	12	14
200	5	7	10	12	14

Точность вычислений рассчитывалась по устойчивости десятичных знаков в ответе при уменьшении параметра h. Независимыми параметрами являются n, M, N и P. Приведем некоторые результаты экспериментов.

Параметры ускорения и эффективности программы:

$$S_P = \frac{T_1}{T_P}, \qquad E_P = \frac{S_P}{P},$$

где T_P — время, за которое задача выполняется на P процессорах.

На Рис. 1 показаны отклонения экспериментальных ускорений S_P (темные ломаные) от идеальных ускорений (светлые прямые).

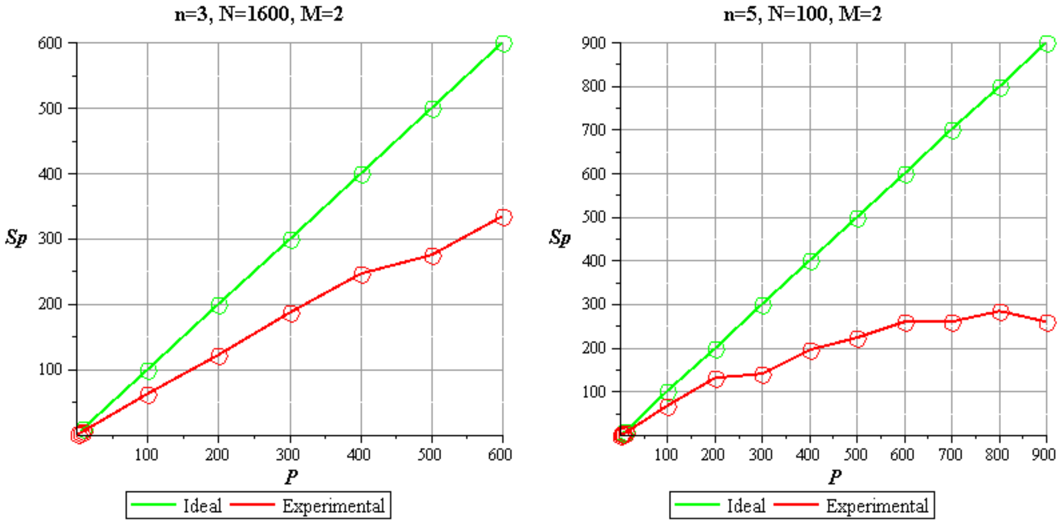


Рис. 1. Ускорение вычислений

2.3 Численное решение интегральных уравнений

В области $\bar{\Omega} \subset R^2$ заданы функции $f(x)$ и $K(x, y)$. Решается уравнение

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = f(x), \quad x \in \bar{\Omega} \subset R^2.$$

Здесь Ω – ограниченная замкнутая область с гладкой границей. Функции $K(x, y) \in C^M(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, $f(x) \in C^M(\overline{\Omega})$. Решение ищем в классе $C^M(\overline{\Omega})$.

Норма интегрального оператора считается малой и применяется метод последовательных приближений:

$$\|K(x, y)\|_{C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})} = \theta < 1,$$

$$u_s(x) = f(x) + \int\limits_{\Omega} dyK(x, y)u_{s-1}(y).$$

Решение уравнения ищется в виде дискретной функции в узлах квадратной решетки с шагом h. Интегральный оператор представляется с помощью кубатурной ОПС-формулы с решеткой узлов $\{kh\}_{k \in Z^2}$:

$$u_s(hj) = f(hj) + h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^2, \rho(hk, \Omega) \leq Lh} c_k(h)K(hj, hk)u_{s-1}(hk), \quad j \in \mathbb{Z}^2$$

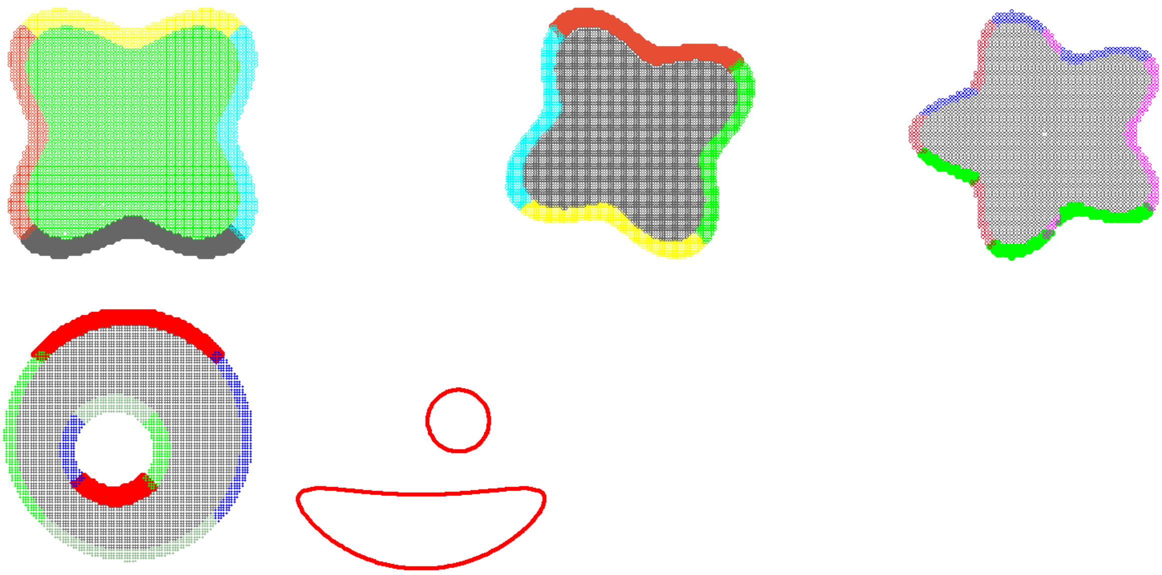
с некоторым $L \geqslant 4M$.

Примененные кубатурные формулы асимптотически оптимальны на пространствах Соболева W_p^m. Использована программа Рахматуллина Д.Я. вычисления интегралов, в которую добавлен модуль автоматического разбиения области интегрирования на области простого вида.

Программа вычисления решения тестирована экспериментами на Многопроцессорной вычислительной системе (МВС 50К) Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

Вычислительные эксперименты показали, что требуемая точность порядка 10^{-5} достигается при $h = 1/200$ и $M = 2$ за 4-5 итераций на 100 процессорах за 0.5 мин.

Область Ω, в которой решается интегральное уравнение задается неявно $\{x|\Phi(x) \geq 0\}$ и должна обладать гладкой границей. Например, в вычислительных экспериментах брались такие области Ω.



3 Исследование системы Навье-Стокса

1. Начально-краевую задачу для системы Навье-Стокса в кубе с периодическими краевыми условиями Р.С. Сакс редуцировал к задаче Коши для нелинейной системы ОДУ и заметил, что это задача интегрируется явно, если внешняя сила и начальное поле скоростей задачи являются собственными функциями оператора Стокса (и ротора) с одним и тем же собственным значением. В результате были найдены семейства точных глобальных решений исходной задачи, которые мы называем **базовыми**. Они определяют потоки жидкости с ненулевой завихренностью (вихри). Изучая взаимодействие таких вихрей, удалось определить новые семейства точных решений уравнений Навье-Стокса. Выделено 3 случая, когда нелинейный оператор задачи проявляет себя а) как линейный, б) как линейный только по векторной части решения, в) как полностью нелинейный. В каждом из этих случаев построены семейства глобальных решений задачи, исходя из базисных решений. Краткое содержание этой работы будет опубликована в ДАН в начале следующего года. Более развернутое изложение работы отправлено в журнал ТМФ.

2.Для произвольной функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q,2\pi)$ в кубе Q с ребром 2π по пространственным переменным x при фиксированном времени t составлена и тестирована программа вычисления коэффициентов Фурье, определяемых собственными функциями оператора Лапласа, а также программа вычисления модифицированных коэффициентов Фурье, определяемых собственными функциями оператора ротор. Точность вычисления коэффициентов 10^{-6}, при вычислении интегралов используются кубатурные формулы С.Л.Соболева.

3. Исследовалась задача Коши для системы RS_2 галеркинского приближения начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса. Система состоит из 36 обыкновенных дифференциальных уравнений от 36 комплексных переменных, но в некоторых случаях она распадается на подсистемы. Составлена и тестирована программа численного расчета решений этой задачи на основе метода Рунге-Кутта.

4. В Межведомственном суперкомпьютерном центре РАН А.Г. Хайбуллин и Р.С. Сакс провели численный эксперимент, предположив, что внешние силы отсутствуют. Задавая определенные начальные данные, наблюдались графики выбранной компоненты решения в различные моменты времени. При уменьшении вязкости ν было обнаружено интересное явление: существует критическое значение вязкости ν^*, вблизи которого характер кривых резко меняется. Гладкое движение точки сменяется частично гладким с резкими поворотами, напоминая хаотическое движение (Рис. 1).

5. Пусть c_m^+ и c_n^+ вектор-функции, определяющие периодические собственные функции $u_m^+(x)$ и $u_n^+(x)$ оператора ротор с собственными значениями $|m|$ и $|n|$, соответственно.

Гипотеза. Если $|m| = |n|$ и вектор $m + n \neq 0$, то существует комплексное число

$\beta^+_{m,n}$ такое, что $(c^+_m, n)\, c^+_n + (c^+_n, m)\, c^+_m = \beta^+_{m,n}\,(m+n)$.

Эта гипотеза важна при доказательстве одной из теорем (из работы Сакса Р.С.). В программе А.Г. Хайбуллина эта гипотеза была подтверждена численно для $|m|^2 \leq 10000$.

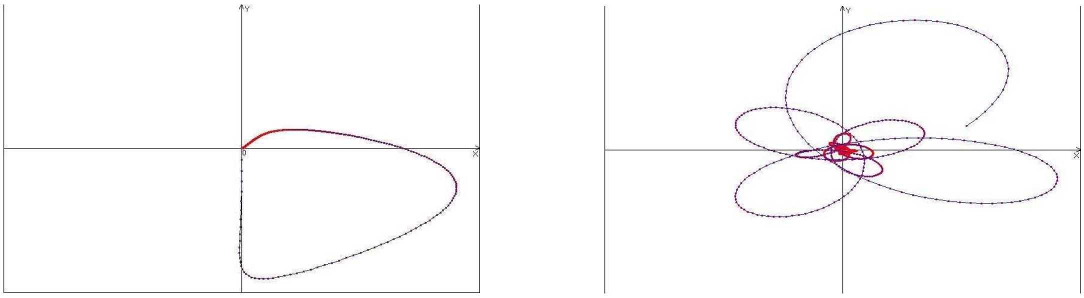


Рис. 1: $\gamma^{+}_{2(0,-1,0)}$ при $\nu = 1$ и $\nu = 0.01$

4 Конференции

1) Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», 5 – 12 октября 2008 г., г. Новосибирск.

2) Международная конференция Multivariate Approximation 21-26 сентября 2008, Дортмунд, Германия.

3) Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем». 21-28 мая 2008 г. Пенза.

4) "Современные проблемы теории функций и их приложения", посвященная памяти академика П.Л. Ульянова (1928-2006), г. Саратов, 28 января 2008 - 4 февраля 2008 года

5) "Дифференциальные уравнения и топология", посвященная памяти академика Л.С. Понтрягина, г. Москва, МГУ, 17–22 июня 2008 года

6) "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ", Посвящается юбилею академика Ильина В. А., г. Стерлитамак, СПГА, 24-27 июня 2008 года

7) Всероссийская молодежная конференция "Проблемы теоретической и прикладной математики", Екатеринбург, ИМ УрО РАН, 28 января- 1 февраля 2008 года

5 Гранты

1) Грант немецкого научного общества DFG 436RUS17/59/05, 2006-2008

2) Грант INTAS 05-1000008-7921, 2007-2008

3) Грант РФФИ 08-01-00441-а, 2008-2011

4) Региональный грант РФФИ 08-01-97020-р-поволжье-а, 2008-2011

5) Грант РФФИ 08-01-08291-з, 2008

6) Грант РФФИ 06-01-00597-а, 2005-2008

7) Программа №14 Президиума РАН, 2006-2008

Список литературы

[1] Il'yasov, Y., A duality principle corresponding to the parabolic equations, Physica D, V. 237, Issue 5, 2008, 692-698

[2] Il'yasov, Y., T. Runst, A. Youssfi, On the existence of pair positive-negative solutions for resonance problems, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008

[3] Рамазанов М.Д. Об асимптотике коэффициентов оптимальных периодических весовых решетчатых кубатурных формул. С. 84-87. Сб. международной конференции «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем». 21-28 мая 2008 г. Пенза. Пензенский государственный университет.

[4] Банникова Е.Л. Применение решетчатых кубатурных формул для численного решения одного вида интегральных уравнений. С. 18-20. Сб. международной конференции «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем». 21-28 мая 2008 г. Пенза. Пензенский государственный университет.

[5] Банникова Е.Л. Программа численного решения интегральных уравнений Фредгольма 2 рода IntUr. Свидетельство о регистрации №10418 от 15.04.2008/

[6] Рахматуллин Д.Я. Функционалы погрешности в пространствах с доминирующими производными. С. 88-90. Сб. международной конференции «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем». 21-28 мая 2008 г. Пенза. Пензенский государственный университет.

[7] R.S. Saks «The solution of spectral problems for the curl and Stokes operators with periodic boundary conditions and some classes of explicit solutions of Navier – Stokes equations». Статья в книге: More progress in Analysis (Proc. V International ISAAC Congress, Italy, 2005). World Scientific. 2008. P. 1195-1207.

[8] А.Г. Хайбуллин, Р.С. Сакс, О программе нахождения коэффициентов ряда Фурье и ее применение при исследовании системы Навье-Стокса в трехмерном торе // Статья в сборнике трудов IX-го международного семинара-совещания "Кубатурные формулы и их приложения", Уфа, Изд-во “Мир печати”, 2007, стр.175-181.

[9] А.Г. Хайбуллин, О программе нахождения коэффициентов ряда Фурье и ее применение при исследовании системы Навье-Стокса с периодическими краевыми

условиями // Статья в сборнике трудов 39-ой Всероссийской молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 2008, стр.201-205.

[10] Р.С. Сакс, А.Г. Хайбуллин, Явные глобальные периодические решения уравнений Навье-Стокса // Статья в сборнике трудов международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы", Стерлитамак, 2008, стр. 72-75.

[11] Р.С. Сакс, Явные глобальные решения уравнений Навье-Стокса и периодические собственные функции оператора ротор // Доклады РАН, т. 424, №2, 2009 (прошла корректуру)

[12] Р.С. Сакс, Точные глобальные периодические решения уравнений Навье-Стокса в кубе при его равномерном вращении, в журнал "Теоретическая и математическая физика"