Отчет отд. вычислительной математики за 2010 г.

Критические решения нелинейных уравнений

Существование компактонов для эллиптических уравнений с автономными нелинейностями

Ильясовым Я.Ш. совместно с Егоровым Ю.В. (Университет им. Сабатье, Тулуза, Франция) в работе [1] исследовалась следующая задача Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{\beta-1}u - |u|^{\alpha-1}u \ \text{ in } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь Ω гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, λ вещественный параметр. При этом $0 < \alpha < \beta < 1$. При этих условиях нелинейность $f(\lambda, u) := \lambda|u|^{\beta-1}u - |u|^{\alpha-1}u$ в правой части (1) является нелипшецевой в нуле.

В основном результате впервые найдено решение открытой проблемы о существовании решений типа компатонов, т.е. слабых решений (1) удовлетворяющих дополнительным краевым условиям

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega, \tag{2}$$

где ν внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$.

Вырожденные краевые задачи

В работе [2], Ильясовым Я.Ш. совместно с Рунстом Т. (Университет Йены, Германия) рассмотренно эллиптическое уравнение следующего вида

$$\mathcal{P}u(x) := -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) + c(x)u(x) = \lambda m(x)u, \ x \in \Omega, \tag{3}$$

здесь Ω ограниченная связанная область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, с гладкой границей $\partial\Omega$.

При этом предполагается, что λ – вещественный параметрб и

(P1) $a_{i,j} \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ для $\alpha \in (0,1)$, $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$, $i,j = 1,\dots,N$, on $\overline{\Omega}$,

и найдётся константа $a_0 > 0$ такая, что неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$$

выполняется при всех $x \in \overline{\Omega}$ и всех $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_N) \in \mathbb{R}$,

(P2) вещественная функция c может быть разрывной в Ω. При этом $c \in L_\infty(\Omega)$ и $c \geq 0$ почти всюду в Ω.

Потенциал m является знакопеременной функцией, и при этом

$$m \in L_\infty, \text{ положительна на подмножестве } \Omega \text{ ненулевой лебеговой меры.}$$

Уравнения рассматриваются с выроденными краевыми условиями типа Вентцеля:

$$\mathcal{L}u(x') := \mu(x')\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x') + \gamma(x')u(x') = 0,\ x' \in \partial\Omega \tag{4}$$

где

(L1) $\mu \in C^\infty(\partial\Omega)$, $\mu \geq 0$ на $\partial\Omega$,

(L2) $\gamma \in C^\infty(\partial\Omega)$, $\gamma \geq 0$ на $\partial\Omega$,

(L3) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}n_j$

при этом

(P3) $\mu(x') + \gamma(x') > 0$ на $\partial\Omega$ и $\gamma(x') \not\equiv 0$ на $\partial\Omega$.

В основном результате доказано, что при условиях **(P1),(P2), (P3)** для краевой задачи (3)-(4) выполняется принцип антимаксимума. Данный результат обобщает известный результат Ф. Клемента, Л. Пелитье на уравнения с вырожденными краевыми услловиями, с потенциалом неопределенного знака.

Кубатурные формулы

Теоретические исследования

Создан новый алгоритм построения решетчатых кубатурных формул, ненасыщаемых не только по порядку, но и по свойству асимптотической оптимальности на W_2^m –пространствах, $m \in (n/2, \infty)$.

Под ненасыщаемостью вычислительных алгоритмов (по К.И. Бабенко) понимается сохранение оптимальных порядков сходимостей для всех функциональных пространств, являющихся параметрами задачи ([4], [5], [6], [7]).

Численное интегрирование

В 2010 году программа приближенного вычисления многомерных интегралов была существенно переработана, улучшено качество автоматического распараллеливания, ускорен синтаксический анализатор, код частично оптимизирован для вычисления не только на системах кластерного типа, но и на видеокартах ([7], [8], [9]).

Исследовании системы Навье-Стокса

Начально-краевую задачу для системы Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве Р.С. Сакс редуцировал к задаче Коши для нелинейной системы ОДУ и заметил, что это задача интегрируется явно, если внешняя сила и начальное поле скоростей задачи являются собственными функциями оператора ротор с одним и тем же собственным значением. Найдены семейства точных глобальных решений исходной задачи, которые мы называем базовыми, так как они образуют базис в некотором пространстве Гильберта. Они являются также точными решениями линейной системы уравнений Соболева-Стокса и образуют поля скоростей, которым соответствуют потоки жидкости с ненулевой завихренностью. Изучая взаимодействие таких вихревых потоков, определены новые семейства точных решений уравнений Навье-Стокса.

Доказано, что сумма базовых решений есть решение нелинейной задачи, если волновые векторы:

a) лежат на одной прямой проходящей через начало координат,

b) лежат на одной плоскости и коэффициенты Фурье удовлетворяют некоторым условиям.

Построены явные решения нелинейной задачи на основе базовых решений, собственные значения которых совпадают.

Содержание этой работы опубликовано в журнале "Теоретическая и математическая физика"в 2010 году [10].

2. В работах, опубликованных в ДАН 2009 (совместно с А.Г.Хайбуллиным) и в журнале ТМФ, 2010, разрабатывается метод численного решения задачи Коши для уравнений Навье-Стокса на основе рядов Фурье оператора ротор. Общая задача Коши сведена к решению последовательно задач Коши для нелинейных конечномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений Галеркина, обозначаемых как -системы, l=1,2,3,. . . . Составлена программа вычисления коэффициентов этих систем с любой заданной точностью и их воспроизведения в LaTeX-редакторе и программа вычисления коэффициентов Фурье заданной вектор-функции.

Исследовалась задача Коши для системы при l=2. Для этого составлена и тестирована программа численного расчета решений этой задачи на основе метода Рунге-Кутта.

В Межведомственном суперкомпьютерном центре РАН проведены численные расчеты некоторых модельных задач с определенными начальными данными.

Для визуального представления результатов счета создана программа графического представления компонент решения задачи, которая дает возможность наблюдать их поведение в различные моменты времени. При уменьшении вязкости была обнаружена резкая перемена в характере наблюдаемых течений. Гладкое движение сменяется резкими поворотами, напоминая хаотическое движение.

Конференции

1. 8 th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, University of Technology Dresden, May 25 - 28, 2010, Dresden, Germany(Ильясов Я.Ш.).

2. IV Taller on Algebra and Topology, October 8-11, 2010, UAEM, Cuernavaca, Mexico (Ильясов Я.Ш.).

3. Workshop on Variational methods in Nonlinear Differential Equations, October 17-22, 2010, Oaxaca, Mexico, (Ильясов Я.Ш.).

4. Теория приближений. Международная конференция. 6–8 мая 2010 г., г. Санкт-Петербург.(Рамазанов М.Д., Рахматуллин, Д. Я.)

5. XVIII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко (13-17 сентября, 2010). Абрау-Дюрсо, Новороссийск.(Рамазанов М.Д., Рахматуллин, Д. Я.)

6. Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына (Москва, 7-10 декабря 2010). (Рамазанов М.Д., Рахматуллин, Д. Я.)

7. Международная конференция "КРОМШ-2010"(Крымская осенняя математическая школа-конференция), 2010, Севастополь, 17 сентября - 28 сентября. (Сакс Р.С.)

Гранты

1. Грант РФФИ 09-01-00349-а, 2009–2011 (Рамазанов М.Д., Рахматуллин, Д. Я.).

2. Гранты РФФИ 09-01-00530-а, 08-01-00441-а, 08-01-97020-р-поволжье-а (Ильясов Я.Ш.)

Список литературы

[1] Il'yasov, Y., Egorov, Y., Hopf boundary maximum principle violation for semilinear elliptic equations. (English) Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods 72, No. 7-8, 3346-3355 (2010)

[2] Il'yasov, Y., Runst, T., An anti-maximum principle for degenerate elliptic boundary value problems with indefinite weights. (English) Complex Var. Elliptic Equ. 55, No. 8-10, 897-910 (2010)

[3] Il'yasov, Y. Existence of compactons for elliptic equations with autonomous nonlinearity, 8 th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, University of Technology Dresden, May 25 - 28, 2010, Dresden, Germany

[4] Рамазанов, М. Д. Новый алгоритм асимптотически оптимальных решетчатых кубатурных формул / М. Д. Рамазанов // Уфимский математический журнал. — 2010. — Т. 2, № 3. — С. 61–80. — URL: http://matem.anrb.ru/journal/vup7/Ramazanov.pdf.

[5] Рамазанов, М. Д. Вычисление вариационных сплайнов в негильбертовых пространствах / М. Д. Рамазанов // Сборник тезисов международной конференции по прикладной математике и информатике, посвященной 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына. — Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 2010.

[6] Рамазанов, М. Д. Теория решетчатых кубатурных формул / М. Д. Рамазанов // Теория приближений. Международная конференция. 6–8 мая 2010 г., г. Санкт-Петербург. Тезисы докладов. — СПб: ВВМ, 2010. — С. 86–87.

[7] Ramazanov, M. D. The cubature formulas of S.L. Sobolev: evolution of the theory and applications / M. D. Ramazanov, D. Y. Rakhmatullin, E. L. Bannikova // Eurasian Mathematical Journal. — 2010. — Vol. 1, № 1. — P. 123–136. — ISSN 2077-9879. — URL: http://enu.kz/downloads/emj.pdf.

[8] Рахматуллин, Д. Я. Параллельные алгоритмы решетчатых кубатурных формул / Д. Я. Рахматуллин // Теория приближений. Международная конференция. 6–8 мая 2010 г., г. Санкт-Петербург. Тезисы докладов. — СПб: ВВМ, 2010. — С. 88–89.

[9] Рахматуллин, Д. Я. Приближенное интегрирование кубатурными формулами / Д. Я. Рахматуллин // Сборник тезисов международной конференции по прикладной математике и информатике, посвященной 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына. — Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 2010.

[10] Р.С. Сакс, Точные глобальные периодические решения уравнений Навье-Стокса в при равномерно вращающемся пространстве, журнал "Теоретическая и математическая физика"т.162, №2, с. 195-215, 2010.