

Международная конференция

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, МЕТОДЫ
МОНТЕ-КАРЛО И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Красноярск, 4–7 июля 2011 года

Красноярск 2011

Сборник материалов международной конференции "Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения посвященной 90-летию со дня рождения И. П. Мысовских. Красноярск, 4-7 июля 2011 года.

В сборнике представлены доклады участников международной конференции "Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения посвященной 90-летию со дня рождения И. П. Мысовских. Работы относятся к теории приближенного интегрирования, статистическому анализу и смежным областям.

Статьи печатаются в авторской редакции.

Иван Петрович Мысовских (1921–2007)



1. Иван Петрович Мысовских родился 25 ноября 1921 года в деревне Друганово Тюменского района (в то время Омской области). После окончания Червишевской школы — семилетки учился на рабфаке при Тюменском педагогическом институте. В 1938 году приехал в Ленинград и поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ).

Курс математического анализа читал Григорий Михайлович Фихтенгольц (1888–1959), студенты слушали его буквально "раскрыв рты". Григорий Михайлович отлично понимал, что не все студенты, будучи школьниками, жили в больших городах и имели возможность посещать кружки, поэтому он особое внимание уделял логике вещей, старался все доходчиво объяснить, приводил много интересных примеров. Вторую часть математического анализа читал самый молодой профессор факультета Леонид Витальевич Канторович (1912–1986), впоследствии академик АН СССР (1964), лауреат Нобелевской премии по экономике (1975). Теорию функций комплексного переменного читал Владимир Иванович Смирнов (1887–1974), а курс дифференциальных уравнений — Николай Максимович Гюнтер (1871–1941).

Через несколько дней после начала Великой отечественной войны группу студентов отправили на оборонные работы под Ленинградом. Затем их направили учиться в автотракторную группу, в ноябре 1941 года им выдали шоферские удостоверения и стали развозить по воинским частям. Ивана Петровича забрали в 3-ю понтонно-мостовую бригаду. Она поначалу дислоцировалась в Ленинграде, но довольно скоро эту бригаду перебросили на Украину готовить мосты для форсирования Днепра. Так что до середины сентября 1943 года он служил на Ленинградском фронте, а после переброски с 1 ноября 1943 года оказался на 1-м Украинском фронте в отдельном моторизованном понтонно-мостовом Черновицком батальоне. Военные

дороги Ивана Петровича прошли через Польшу, Германию, Чехословакию. С войны рядовой Мысовских Иван Петрович вернулся, имея на груди Орден Красной Звезды, Орден Отечественной Войны 2-й степени и медали За оборону Ленинграда, За освобождение Праги, За победу над Германией.

Ивану Петровичу очень хотелось демобилизоваться до осени, чтобы с сентября продолжить обучение в Университете. Он написал письмо Григорию Михайловичу Фихтенгольцу. Фихтенголец пошел в ректорат, по документам проверил, что такой студент действительно есть, отличник, закончил три курса. Выяснив эти детали, он написал обстоятельное и аргументированное письмо командованию, и в конце сентября 1945 года Ивана Петровича демобилизовали.

В тот же год прошло распределение студентов 4-го курса по кафедрам. Иван Петрович попал на кафедру математического анализа, которой заведовал Г.М. Фихтенголец. Его научным руководителем стал Л.В. Канторович.

На распределении студентов по окончании университета Г.М. Фихтенголец рекомендовал оставить И.П. Мысовских на кафедре в должности ассистента. В том же 1947 году по рекомендации кафедры Иван Петрович поступил в аспирантуру.

2. Научным руководителем Ивана Петровича по-прежнему был Л.В. Канторович. За отведенные для обучения в аспирантуре три года диссертация на тему “Об одном методе решения нелинейных функциональных уравнений и его применениях” была не только написана, но и защищена в 1950 году. Официальными оппонентами были Дмитрий Константинович Фаддеев и Исидор Павлович Натансон.

После защиты диссертации Иван Петрович стал работать на кафедре математического анализа в должности ассистента.

В 1951 году на математико-механическом факультете ЛГУ была образована кафедра вычислительной математики. Ее основу составили сотрудники кафедры математического анализа профессор Л.В. Канторович, доцент М.К. Гавурин, ассистент И.П. Мысовских и А.Н. Балув — аспирант Л.В. Канторовича. Первым заведующим кафедрой стал профессор Владимир Иванович Крылов.

Летом 1957 года Иван Петрович был командирован на два года в Китай для преподавания и помощи в организации кафедры вычислительной математики в Гиринском университете.

К советским специалистам в КНР относились очень хорошо. У каждого специалиста в университете был свой кабинет для работы. Иван Петрович читал лекции для аспирантов и совершенствующихся преподавателей. Лекции читались на русском языке, а переводчик переводил их для слушателей на китайский. Всего лекции слушало около 50 человек. Из них трое стали аспирантами Ивана Петровича. Впоследствии все они защитили кандидатские, а затем и докторские диссертации и стали в Китае известными людьми.

Интересно отметить, что, отправляясь в Китай, Иван Петрович взял с собой арифмометр. Китайцы посмотрели на него и вскоре сделали точно такой же аппарат.

По возвращении в 1959 году Иван Петрович продолжил работу на кафедре вычислительной математики в должности доцента.

В 1962 году издательством Физматлит была опубликована книга Ивана Петровича “Лекции по методам вычислений”, которая потом много лет служила основным учебником для студентов. Она была написана на основе подготовленного еще в Китае первоначального варианта (он был издан в том же 1962 году в Китае на китайском языке). Второе переработанное издание книги “Лекции по методам вычислений” бы-

ло издано в 1998 году.

По научным работам последних лет Иваном Петровичем был составлен доклад “Некоторые вопросы приближенного решения интегральных уравнений и кубатурные формулы”. Он был представлен в качестве диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Защита состоялась в мае 1964 года. Официальными оппонентами были профессора Сергей Михайлович Лозинский (1914–1985), Хаим Львович Смолицкий (1912–2003) и Борис Александрович Рымаренко (1906–1966).

С сентября 1969 года один раз в 2-3 года в Ташкенте стал проходить Всесоюзный коллоквиум по теории кубатурных формул под руководством академика АН СССР Сергея Львовича Соболева. Этот коллоквиум был организован Институтом кибернетики, ВЦ АН Узбекской ССР и Ташкентским Университетом. Иван Петрович принимал в работе коллоквиума самое активное участие.

Он участвовал в работе различных научных международных конференций, под его руководством успешно защитили диссертации аспиранты из Вьетнама, Египта, Сирии, Болгарии. Иван Петрович имел прямые научные контакты с многими ведущими специалистами-математиками мира.

С 1970 по 1997 год профессор И.П. Мысовских заведовал кафедрой вычислительной математики ЛГУ (СПбГУ), на которой он продолжал работать до своей кончины 5 декабря 2007 года.

3. Область научных интересов И.П.Мысовских — вычислительная математика, где ему принадлежат выдающиеся результаты, касающиеся метода Ньютона - Канторовича, приближенных методов решения интегральных уравнений, вычисления кратных интегралов, методов решения дифференциальных уравнений.

Им написана монография “Интерполяционные кубатурные формулы”, удостоенная Университетской премии ЛГУ и позже переведенная на немецкий язык. В 2001 году он получил почетный знак “За вклад в теорию приближенного интегрирования”. В 1999 году Ивану Петровичу присвоено звание “Заслуженный деятель науки РФ”. Последнее издание учебника И.П.Мысовских “Лекции по методам вычислений” удостоено премии Правительства Санкт-Петербурга. Он был избран визитинг-профессором Гириного университета.

3.1. Итеративное решение нелинейных функциональных уравнений.

Первой подробной публикацией о методе Ньютона для решения нелинейных функциональных уравнений была статья [К]. Уравнение имеет вид $f(x) = 0$, где $f(x)$ — нелинейная операция из банахова пространства X в другое пространство Y того же типа, при этом $f(x)$ предполагается дважды дифференцируемой в смысле Фреше. Исследованием метода Ньютона И.П. Мысовских занимался в работах [1–5]. Он получил теорему о сходимости метода Ньютона при условиях типа Коши, когда операция $f'(x)$ — производная Фреше от $f(x)$ — имеет равномерно ограниченную по норме обратную в каждой точке некоторого шара с центром в x_0 . Ему принадлежит доказательство теоремы о сходимости модифицированного метода Ньютона при условиях теорем Л.В. Канторовича для случая $h \leq 1/2$, где h — параметр, фигурирующий в этих теоремах (ранее теорема была доказана при $h < 1/2$). И.П. Мысовских рассмотрел применения метода Ньютона к нелинейным интегральным уравнениям и к задаче Дирихле для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений эллиптического типа.

3.2. Решение интегральных уравнений. В книге [КК] изложены результаты Л.В. Канторовича о выделении особенности при численном решении интегрального уравнения методом квадратур, оценка погрешности метода квадратур и метода замены ядра на вырожденное и др. И.П. Мысовских получил оценку ошибки метода механических квадратур [9]. Существенную роль в этой оценке играют квадратурные ошибки ядра и правой части интегрального уравнения, дающие естественную и точную характеристику близости непрерывной и дискретной задач. Квадратурная ошибка ядра использована при оценке ошибки собственных значений эрмитова ядра [24]. И.П. Мысовских указал также апостериорную оценку ошибки численного решения интегрального уравнения Фредгольма как в линейном [16], так и в нелинейном [20] случаях. Все полученные оценки справедливы для многомерных интегральных уравнений, а когда речь идет о методе механических квадратур — для любой кубатурной формулы. Из них, в частности, следует сходимость метода механических кубатур для решения линейного интегрального уравнения, если последовательность кубатурных формул сходится в пространстве непрерывных функций, в предположении непрерывности ядра и правой части [27].

3.3. Вычисление интегралов. В книге И. П. Мысовских [39] речь идет о вычислении кратных интегралов с областью интегрирования $\Omega \subset R^n$ и весовой функцией $w(x) \geq 0$ при $x \in \Omega$. Важную роль играют ортогональные относительно Ω и $w(x)$ многочлены от n переменных x_1, \dots, x_n . Ортогональные многочлены степени $k+1$, очевидно, образуют векторное пространство, которое будем обозначать O_{k+1} . В книге приведены теоремы об использовании общих корней n ортогональных многочленов степени $k+1$ от n переменных в качестве узлов кубатурной формулы, точной для многочленов степени не выше $2k+1$. Будем говорить, что точка $a \in C^n$ — корень векторного пространства O_{k+1} , если из $f \in O_{k+1}$ следует, что $f(a) = 0$. Корни O_{k+1} обладают свойствами корней ортогональных многочленов от одной переменной. Число ν корней O_{k+1} удовлетворяет неравенству $\nu \leq \varkappa = \binom{n+k}{k}$. Если $\nu = \varkappa$, то корни $x^{(j)}$, $j = 1(1)\varkappa$, можно взять в качестве узлов кубатурной формулы, точной для всех многочленов степени не выше $2k+1$. Эта кубатурная формула — точный аналог квадратурной формулы гауссова типа. Кубатурная формула гауссова типа, очевидно, существует в двух случаях: $n = 1$ и k любое, и $k = 0$ и n любое. Если $n \geq 2$ и $k \geq 1$, то справедливо неравенство $\dim O_{k+1} > n$, из которого, вообще говоря, следует, что не существует корней O_{k+1} ($\nu = 0$). Заметим, что в ряде работ других авторов для отдельных значений $n \geq 2$ и $k \geq 1$ были указаны Ω и $w(x)$ такие, что для них существует кубатурная формула гауссова типа. В работе [BSX] указан класс областей и весов, для которых кубатурная формула гауссова типа существует для любых n и k . В [39] приведен разработанный автором метод воспроизводящего ядра построения кубатурных формул, точных для алгебраических многочленов; получена нижняя граница для числа положительных коэффициентов кубатурной формулы; найдена нижняя граница для числа узлов для гиперсферы S_{n-1} , дано доказательство теоремы Чакалова для случая, когда Ω не ограничена; расширена область применения метода инвариантных кубатурных формул за счет использования теорем алгебры об инвариантных многочленах. Здесь впервые приведено систематическое изложение групп преобразований правильных многогранников в R^n и способов получения их инвариантных многочленов. Позже И.П. Мысовских занимался исследованием кубатурных формул, точных для тригонометрических многочленов [40, 44]. В частности, им указан алгоритм построения всех квадратурных формул для вычисления интеграла с

весом, имеющих наивысшую тригонометрическую степень точности. В связи с применением метода воспроизводящего ядра построения кубатурных формул для шара $B_n = \{x \in R^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ И.П. Мысовских нашел представление воспроизводящего ядра шара [50] для постоянной весовой функции.

Методам решения дифференциальных уравнений посвящены работы [5–7].

В. М. Рябов

ЛИТЕРАТУРА

[К] Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. № 6. С. 89–185.

[КК] Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматлит, 1962.

[BSX] Berens H., Schmid H. J., Xu Y. Multivariate Gaussian Cubature Formulae // Arch. Math. 1995. Vol. 64. P. 26–42.

Ниже в хронологическом порядке перечислены основные научные работы И.П. Мысовских. В него не включены работы из списка литературы, приведенного в книге “Интерполяционные кубатурные формулы”.

1. К вопросу о сходимости метода Ньютона // Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1949. Т. 28. С. 145–147.

2. О сходимости метода Л.В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применениях // ДАН СССР. 1950. Т. 70. № 4. С. 565–568.

3. О сходимости метода Ньютона для вещественного уравнения при условиях типа Коши // Прикладная матем. и механика. 1952. Т. 16. Вып. 6. С. 756–759.

4. О сходимости метода Л. В. Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений и его применениях // Вестник ЛГУ. 1953. № 11. С. 25–48.

5. О граничной задаче для уравнения $\Delta u = k(x, y)u^2$ // ДАН СССР. 1954. Т. 94. № 6. С. 995–998.

6. Применение метода Чаплыгина к решению задачи Дирихле для одного частного типа эллиптических дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1954. Т. 99. № 1. С. 13–15.

7. О численном решении граничной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Вестник ЛГУ. 1954. № 8. С. 49–54.

8. Доказательство существования собственного значения у симметрического ядра // Успехи матем. наук. 1956. Т. 11. Вып. 2(68). С. 199–200.

9. Об оценке ошибки, возникающей при решении интегрального уравнения способом механических квадратур // Вестник ЛГУ. 1956. № 19. С. 66–72.

10. О вычислении собственных значений интегрального уравнения при помощи следов повторных ядер // ДАН СССР. 1957. Т. 115. № 1. С. 45–48.

11. Перевод с французского книги И.А. Лаппо-Данилевского “Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений” под ред. акад. В.И. Смирнова. М.: ГИТТЛ, 1957.

12. Представление резольвенты суммы двух ядер // Матем. сборн. 1958. Т. 46 (88): 1. С. 77–90.

13. Некоторые формулы аппарата Фредгольма и их применение к вопросу об оценке ошибки приближенных методов решения интегральных уравнений // Труды 3-его Всесоюзного матем. съезда. 1959. Т. 4. Изд-во АН СССР. С. 34–35.

14. Об оценке ошибки приближенных методов отыскания собственных значений эрмитова ядра // Матем. сборн. 1959. Т. 48 (90) : 2. С. 137–148.
15. Об оценке ошибки собственных значений, вычисляемых способом замены ядра на близкое // Матем. сборн. 1959. Т. 49 (91) : 3. С. 331–340.
16. Оценка ошибки численного решения линейного интегрального уравнения // ДАН СССР. 1961. Т. 140. № 4. С. 763–765.
17. Представление резольвенты суммы двух операций // Вестник ЛГУ. 1961. №19. С. 169–170.
18. О методе механических квадратур для решения интегральных уравнений // Вестник ЛГУ. 1962. № 7. С. 78–88.
19. Лекции по методам вычислений. М.: Физматгиз, 1962.
20. Оценка ошибки численного решения нелинейного интегрального уравнения // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 30–33.
21. О построении кубатурных формул для простейших областей // ЖВМ и МФ. 1964. Т. 4. № 1. С. 3–14.
22. О кубатурных формулах для вычисления интегралов по поверхности сферы // Сибирский матем. журнал. 1964. Т. 5. № 3. С. 721–723.
23. Один частный случай квадратурных формул, содержащих наперед заданные узлы // Изв. АН БССР, сер. физ.-техн. наук. 1964. № 4. С. 125–127.
24. О точности вычисления характеристических чисел интегрального уравнения методом механических квадратур // Методы вычислений. 1966. Вып. 3. Изд-во ЛГУ. С. 13–21.
25. Доказательство минимальности числа узлов одной кубатурной формулы для гипершара // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 4. С. 621–630.
26. К вопросу о численном решении задачи Коши // Методы вычислений. 1967. Вып. 4. Изд-во ЛГУ. С. 60–62.
27. О сходимости метода механических кубатур для решения интегральных уравнений // Методы вычислений. 1967. Вып. 4. Изд-во ЛГУ. С. 63–72.
28. К работе Радона о кубатурных формулах // ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7. № 4. С. 889–891.
29. Главы 21, 22, 23 в книге В.И. Крылова “Приближенное вычисление интегралов”. М.: “Наука”, 1967. С. 442–498.
30. К построению кубатурных формул с наименьшим числом узлов // ДАН СССР. 1968. Т. 178. № 6. С. 1252–1254.
31. Кубатурная формула Радона для области с центральной симметрией // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. № 3. С. 687–691.
32. Об оценке остатка кубатурной формулы для гипершара // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 5. С. 627–632.
33. Ответ на один вопрос Радона // ДАН СССР. 1971. Т. 198. № 3. С. 537–539.
34. О кубатурных формулах для симплекса // Методы вычислений. 1971. Вып. 7. Изд-во ЛГУ. С. 46–55.
35. Ортогональные многочлены многих переменных // Методы вычислений. 1976. Вып. 10. Изд-во ЛГУ. С. 26–35.
36. О вычислении интегралов по поверхности сферы // ДАН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 269–272.
37. О кубатурных формулах, инвариантных относительно групп преобразований // Методы вычислений. 1978. Вып. 11. Изд-во ЛГУ. С. 3–21.
38. Общие нули многочленов и кубатурные формулы // Вестник ЛГУ. 1979. № 6. С. 155–167.
39. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: “Наука”, 1981.

40. Квадратурные формулы наивысшей тригонометрической степени точности // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25. № 8. С. 1246–1252.
41. Кубатурные формулы в случае центральной симметрии // Методы вычислений. 1985. Вып. 14. Изд-во ЛГУ. С. 3–15.
42. Кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно преобразований группы правильного симплекса // Вестник ЛГУ. 1985. № 22. С. 20–26.
43. О кубатурных формулах, точных для тригонометрических многочленов // ДАН СССР. 1987. Т. 296. С. 28–31.
44. Кубатурные формулы, точные для тригонометрических многочленов // Методы вычислений. 1988. Вып. 15. Изд-во ЛГУ. С. 7–19.
45. Алгоритм построения квадратурных формул наивысшей тригонометрической степени точности // Методы вычислений. 1991. Вып. 16. Изд-во ЛГУ. С. 5–16.
46. О методе воспроизводящего ядра построения кубатурных формул // Вестник ЛГУ. 1991. Сер.1. Вып. 4 (№ 22). С. 3–11.
47. О воспроизводящих ядрах шара и сферы // ЖВМ и МФ. 1993. Т. 33. № 6. С. 952–958.
48. Представление воспроизводящего ядра шара // Методы вычислений. 1995. Вып. 17. Изд-во СПбГУ. С. 145–152.
49. О кубатурных формулах, инвариантных относительно группы вращений октаэдра // Кубатурные формулы и их приложения. Доклады, представленные на 3 семинар-совещание в Красноярске. Уфа, 1996. С. 41–51.
50. Об одном представлении воспроизводящего ядра шара // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 3. С. 28–34.
51. К построению кубатурных формул наивысшей тригонометрической степени точности // Вестник СПбГУ. 1997. № 22. С. 27–32.
52. О кубатурных формулах точных для тригонометрических многочленов // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38. № 7. С. 1114–1117.
53. Лекции по методам вычислений. СПб.: изд-во СПбГУ, 1998.
54. Распространение метода воспроизводящего ядра построения кубатурных формул на тригонометрический случай // Методы вычислений. 1999. Вып. 18. Изд-во СПбГУ. С. 160–178.
55. О кубатурных формулах, точных для тригонометрических многочленов // Кубатурные формулы и их приложения. Труды 5-го международного семинара-совещания, г. Красноярск: изд-во КГТУ, 2000. С. 119–131.
56. О воспроизводящих ядрах в пространстве тригонометрических многочленов // Методы вычислений. 2001. Вып. 19. Изд-во СПбГУ. С. 5–14.
57. Кубатурные формулы для симплекса // Вопросы математического анализа. Красноярск: изд-во КГТУ, 2001. С. 96–102.
58. Cubature formulae and orthogonal polynomials // J. Comput. Appl. Math. 2001. Vol. 127. P. 121–152.
59. Cubature formulae that are exact for trigonometric polynomials // Report TW 324, 2001. Katholieke Universiteit Leuven, Dep. of Computer Science. P. 1–19.
60. О методе воспроизводящего ядра построения кубатурных формул // Методы вычислений. 2003. Вып. 20. Изд-во СПбГУ. С. 118–136.
61. Новое доказательство существования одной кубатурной формулы с 2k-свойством, имеющей минимальное число узлов // Методы вычислений. 2005. Вып. 21. Изд-во СПбГУ. С. 126–128.

Использование численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений в задачах оптимизации нанесения тонких пленок карбида кремния

Аверина Т. А.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; ata@osmf.sccc.ru*

Введение. Современные технические решения во многих областях физики связаны с необходимостью численного анализа быстропротекающих процессов в сильнонеравновесных средах. Изучение механизмов формирования покрытий карбида кремния представляет собой актуальную задачу экспериментальной и вычислительной физики [1, 2]. Математическая модель гетерогенной конденсации паров карбида кремния описывается квазилинейными уравнениями в частных производных [3]. Эволюция соответствующего марковского процесса может быть описана стохастическим дифференциальным уравнением с пуассоновской составляющей. В некоторых случаях пуассоновская мера может зависеть от вектора состояния. Причем очень часто эта зависимость не может быть перенесена в коэффициенты. В статье предложен численный алгоритм решения СДУ, когда характеристическая мера, определяющая пуассоновскую меру, зависит от вектора состояния.

Модель гетерогенной конденсации паров карбида кремния. В работе [3] описана модель гетерогенной конденсации паров карбида кремния. Кластер зародыша карбида кремния рассматривается как броуновская частица переменной массы $M_g(t)$, которая может изменить свое положение на поверхности подложки под действием потенциала взаимодействия зародышей друг с другом и с дефектами решетки. Уравнение Колмогорова-Феллера для эволюции размера кластера имеет вид [3]:

$$\frac{\partial f_r(g, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left[D_g(g, t) \frac{\partial f_r(g, t)}{\partial g} \right]}{\partial g} + \frac{1}{kT} \frac{\partial \left[D_g(g, t) f_r(g, t) \frac{\partial \Delta \Phi(g, r, t)}{\partial g} \right]}{\partial g} + S_\alpha - Q, \quad (1)$$

$$f_r(g, 0) = f_{0g}, \quad \frac{\partial f_r(g, t)}{\partial t} \Big|_{g=2} = 0, \quad f_r(g, t) \Big|_{g < 2} = 0,$$

Уравнение Эйнштейна-Смолуховского для функции распределения размера зародыша (с массой зародыша $M_g(t)$) по координатам, полученное из уравнения (1), записывается в виде:

$$\frac{\partial f_g(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left[D_r(g, t) \frac{\partial f_g(r, t)}{\partial r} \right]}{\partial r} - \frac{\partial \left[\frac{F(r, t)}{M_g \gamma} f_g(r, t) \right]}{\partial r} \quad (2)$$

$$f_g(r, 0) = f_{0r}, \quad f_g(r, t)_{x=x_{left}} = f_g(r, t)_{x=x_{right}}, \quad f_g(r, t)_{y=y_{left}} = f_g(r, t)_{y=y_{right}}.$$

Здесь $S_\alpha(f_\alpha)$ - функция источника мономеров "пара"; $f_r(g, t)$ - функция распределения зародышей по размерам в точке с координатами $r = (x, y)$ на поверхности; g - число атомов в кластере, $D_g = D_{g0}g^{2/3}$ - коэффициент диффузии в пространстве размеров; $\Delta \Phi(g, r, t)$ - термодинамический потенциал образования зародыша (или энергия Гиббса); $f_g(r, t)$ - функция распределения зародышей по координатам поверхности, где r - положение центра масс кластера относительно ортогональной системы координат $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$.

В работе [3] для уравнений (1)-(2) (в случае $S_\alpha = Q = 0$) получена соответствующая система стохастических дифференциальных уравнений. Решая полученную систему СДУ численным методом из [4], для каждой i -й траектории марковского процесса получают в момент времени t_n : размер кластера g_n и его координаты (x_n, y_n) .

При некотором уточнении модели, при учете химических реакций карбонизации [2], в уравнение (1) добавляется интегральный член $S_\alpha \neq 0$. В результате, соответствующая

система СДУ будет содержать пуассоновскую составляющую, зависящую от вектора состояния системы. Ниже будет построен численный метод для решения таких систем, использующий модифицированный метод максимального сечения [5].

Стохастические дифференциальные уравнения с пуассоновской составляющей. Задача Коши для систем стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей имеет вид:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}(t_0) + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{Y}, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^{n_W} \int_0^t \sigma_{\cdot j}(\mathbf{Y}, \tau) dw_j(\tau) + \int_0^t \int_{\Gamma} c(\mathbf{Y}(\tau^-), \tau, \theta) \nu(d\theta \times d\tau), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

где $\mathbf{Y}(t)$ - случайный процесс размерности n_Y ; $\mathbf{W}(t)$ - n_W - мерный стандартный винеровский процесс; ν - пуассоновская мера на $\Gamma \times [0, T]$ с характеристической мерой Π , заданная неотрицательной функцией $\pi(\theta, t, \mathbf{Y})$; $a(\mathbf{Y}, t)$ и $c(\mathbf{Y}, t, \theta)$ - n_Y - мерные вектор-функции; $\sigma(\mathbf{Y}, t)$ - матричная функция размера $n_Y \times n_W$; $\sigma_{\cdot j}(\mathbf{Y}, t)$ - j - й столбец матрицы σ ; \mathbf{Y}_0 - случайный вектор начальных значений. Так как решением СДУ (3) является непрерывный справа процесс без разрывов второго рода, то $\mathbf{Y}(t^-)$ обозначает значение решения в точке t слева.

Если стохастический интеграл по винеровскому процессу $\mathbf{W}(t)$ в (3) понимается в смысле Ито, то СДУ (3) являются СДУ Ито, если стохастический интеграл по винеровскому процессу $\mathbf{W}(t)$ в (3) понимается в смысле Стратоновича, то СДУ (3) являются СДУ Стратоновича.

Характеристическая мера Π , задающая пуассоновскую случайную меру ν , определяется через функцию π следующим образом:

$$\Pi(B, t, \mathbf{Y}(t^-)) = \int_B \pi(\theta, t, \mathbf{Y}(t^-)) d\theta, \quad B \in \Gamma. \quad (4)$$

Обозначим функции

$$\mu(t, \mathbf{Y}) = \int_{\Gamma} \pi(\theta, t, \mathbf{Y}) d\theta, \quad h(\theta, t, \mathbf{Y}) = \pi(\theta, t, \mathbf{Y}) / \mu(t, \mathbf{Y}), \quad (5)$$

характеризующие пуассоновскую случайную меру ν .

Если все элементы функции $a(\mathbf{Y}, t)$ дифференцируемы, а все элементы матрицы $\sigma(\mathbf{Y}, t)$ дважды дифференцируемы по \mathbf{Y} , то для процесса \mathbf{Y} , удовлетворяющего уравнению (3) переходная функция $p(t_0, \mathbf{Y}_0, t, \mathbf{Y})$ как функция t и \mathbf{Y} удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова [6]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K_{t, \mathbf{Y}}[p] \quad (6)$$

с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow t_0} p(t_0, \mathbf{Y}_0, t, \mathbf{Y}) = \delta(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0).$$

Оператор $K_{t, \mathbf{Y}}[\cdot]$ определяется выражением

$$K_{t, \mathbf{Y}}[\cdot] = L_{t, \mathbf{Y}}[\cdot] + M_{t, \mathbf{Y}}[\cdot], \quad (7)$$

$$L_{t, \mathbf{Y}}[p(\mathbf{Y})] = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_i(\mathbf{Y}, t) p(\mathbf{Y}) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(\sigma_{il} \sigma_{jl}(\mathbf{Y}, t) p(\mathbf{Y}) \right), \quad (8)$$

$$M_{t, \mathbf{Y}}[p(\mathbf{Y})] = \int_{R^{n_Y}} \int_{\Gamma} p(\mathbf{Z}) \left(\delta(\mathbf{Y} - \mathbf{Z} - c(\mathbf{Z}, t, \theta)) - \delta(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}) \right) \pi(\theta, t, \mathbf{Z}) d\theta d\mathbf{Z}. \quad (9)$$

Операторы K , L , M называют *прямыми производящими операторами* процесса \mathbf{Y} (заметим, что двойные индексы подразумевают суммирование по ним). *Обратные производящие операторы* K^* , L^* , M^* процесса \mathbf{Y} имеют вид:

$$K_{t,\mathbf{Y}}^*[\cdot] = L_{t,\mathbf{Y}}^*[\cdot] + M_{t,\mathbf{Y}}^*[\cdot], \quad (10)$$

$$L_{t,\mathbf{Y}}^*[p(\mathbf{Y})] = a_i(\mathbf{Y}, t) \frac{\partial p(\mathbf{Y})}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sigma_{il} \sigma_{jl}(\mathbf{Y}, t) \frac{\partial^2 p(\mathbf{Y})}{\partial y_i \partial y_j}, \quad (11)$$

$$M_{t,\mathbf{Y}}^*[p(\mathbf{Y})] = \int_{\Gamma} \left(p(\mathbf{Y} + c(\mathbf{Y}, t, \theta)) - p(\mathbf{Y}) \right) \pi(\theta, t, \mathbf{Y}) d\theta. \quad (12)$$

С помощью непосредственной проверки можно показать, что прямые и обратные операторы сопряжены между собой, т. е. для произвольной области V пространства S , в которой элементы функции $a(\mathbf{Y}, t)$ дифференцируемы, элементы матрицы $\sigma(\mathbf{Y}, t)$ дважды дифференцируемы по \mathbf{Y} , справедливо следующее равенство:

$$\int_V u(\mathbf{Y}) K_{t,\mathbf{Y}}[p(\mathbf{Y})] d\mathbf{Y} = \int_V p(\mathbf{Y}) K_{t,\mathbf{Y}}^*[u(\mathbf{Y})] d\mathbf{Y}, \quad (13)$$

где $u(\mathbf{Y})$ и $p(\mathbf{Y})$ – произвольные скалярные функции, из которых хотя бы одна вместе со своими первыми производными равна нулю на границе области V .

Алгоритм численного решения СДУ с пуассоновской составляющей. В работе [4] был описан алгоритм численного решения СДУ с пуассоновской составляющей, когда функция $\pi(\theta, t, \mathbf{Y})$, задающая пуассоновскую меру, не зависела от \mathbf{Y} . Мы обобщим его на случай, когда есть зависимость от \mathbf{Y} . Будем предполагать, что характеристическая мера конечна и

$$\mu(t, \mathbf{Y}) \leq \bar{\Pi}, \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{Y} \in R^{n_Y}. \quad (14)$$

Тогда на основе численных методов решения СДУ [4] и модифицированного метода "максимального сечения" [5] можно построить следующий алгоритм.

Алгоритм численного решения СДУ с пуассоновской составляющей (3):

- 0) $k := 0$. Пусть в момент t_k вектор состояния равен $\mathbf{Y}(t_k) = \mathbf{Y}_k$.
- 1) моделируем вспомогательную случайную величину α_1 - равномерную на интервале $(0,1)$ и полагаем $z = 1$, $s = 1$;
- 2) моделируем возможный момент скачка $t_{k+1} = t_k + \tau$: где τ - случайная величина с плотностью распределения $p(x) = \bar{\Pi} * \exp(-\bar{\Pi}x)$, которая моделируются по формуле [7]

$$\tau = -\ln \alpha / \bar{\Pi},$$

где $\alpha - (0,1)$ случайная величина, равномерная на интервале $(0,1)$;

- 3) если $t_{k+1} \geq T$, то $t_{k+1} = T$ и $s := 0$;
- 4) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ решаем уравнение

$$d\mathbf{Y}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{Y}, t) dt + \sum_{j=1}^{n_W} \sigma_{\cdot j}(\mathbf{Y}, t) dw_j(t), \quad \mathbf{Y}(t_k) = \mathbf{Y}_k \quad (15)$$

любым численным методом решения СДУ (15) [4] и находим \mathbf{Y}_{k+1} - вектор состояния системы в момент времени t_{k+1} ;

- 5) если $s = 0$, то STOP, иначе $z := z * (1 - \frac{\mu(t_{k+1}, \mathbf{Y}_{k+1})}{\Pi})$ и проверяем условие возможности скачка: если

$$1 - \alpha_1 > z,$$

то скачок произошел и идем на 5а), иначе идем на 6)

- 5а) моделируем случайную величину θ с плотностью $p(x) = \frac{\pi(x, t_{k+1}, \mathbf{Y}_{k+1})}{\mu(t_{k+1}, \mathbf{Y}_{k+1})}$;

- 5б) вычисляем

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{Y}_{k+1} + c(\mathbf{Y}_{k+1}, t_{k+1}, \theta);$$

- 6) $k := k + 1$ и идем на 1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09–01–00798, 11–01–00282).

ЛИТЕРАТУРА

1. Silicon carbide. A review of fundamental questions and application to current device technology / Eds W. J. Choyke, H. M. Matsunami, G. Pensl. Akademie, Berlin (1998). V. I, II.
2. Кукушкин С. А., Осипов А. В. Новый метод твердофазной эпитаксии карбида кремния на кремнии: модель и эксперимент. Физика твердого тела, 2008. Т. 50. Вып. 7. С. 1188–1195.
3. Змиевская Г. И., Бондарева А. Л. Островки тонкой пленки полупроводника и численный эксперимент // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, 2010. № 10. С. 50–58.
4. Artemiev S. S., Averina T. A. Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1997. (176 p.)
5. Аверина Т. А., Михайлов Г. А. Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 6. С. 1005–1016.
6. Параев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Советское радио, 1976. (184 с.)
7. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006.

Дискретный аналог дифференциального оператора

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}} \text{ и его свойства}$$

Азамов С. С.

Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент,
Узбекистан;

Задача построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления определенных интегралов является одним из *важных задач* вычислительной математики. Эта задача исследована многими математиками и имеются несколько методов построения оптимальных квадратурных формул. Один из таких методов является метод предложенный С.Л. Соболевым в [1], который основывается на построения дискретного

аналога некоторого дифференциального оператора. В связи с этим С.Л.Соболевым исследованы свойства дискретного аналога полигармонического оператора Δ^m , которые используются при построении оптимальных квадратурных и кубатурных формул в пространстве $L_2^{(m)}$, где $L_2^{(m)}$ – пространство функций обобщенные производные m -го порядка интегрируемые с квадратом. В одномерном случае построение дискретного аналога дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} исследован Э.Ж. Жамаловым, Х.М.Шадиметовым и в работе [3] дискретный аналог оператора d^{2m}/dx^{2m} полностью построен. Далее задача построения дискретных аналогов некоторых дифференциальных операторов изучены в работах [4,7,8].

В настоящей работе мы исследуем задачу построения дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$, который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2(P_m)$, где

$$K_2(P_m) = \{\varphi \mid \varphi^{(m-1)} - \text{абсолютно непрерывная и } \varphi^{(m)} \in L_2\}$$

$$\text{и } \int_0^1 (\varphi^{(m)} + \varphi^{(m-1)} + \varphi^{(m-2)})^2 dx < \infty$$

Норма функций в этом пространстве определяется формулой

$$\|\varphi\|_{K_2(P_m)} = \left[\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x) + \varphi^{(m-2)}(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Равенство (1) является полунормой и $\|\varphi\| = 0$ тогда и только тогда когда $\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x) + \varphi^{(m-2)}(x) = 0$.

Дискретный оператор $D_m[\beta]$ удовлетворяет следующее равенство

$$D_m[\beta] * G_m[\beta] = \delta[\beta], \quad (2)$$

где $G_m[\beta]$ – дискретная функция соответствующая функцию

$$G_m(x) = \frac{\text{sign}x}{2} \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{x^{6j+5}}{(6j+5)!} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \cosh \frac{x}{2}, \\ m = 3n, n = 1, 2, \dots, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+1}}{(6j+1)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \cosh \frac{x}{2} + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \sinh \frac{x}{2}, \\ m = 3n + 1, n = 1, 2, \dots, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+5}}{(6j+5)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{6j+3}}{(6j+3)!} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \cosh \frac{x}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \sinh \frac{x}{2}, \\ m = 3n + 2, n = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

$$\delta[\beta] = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}, [\beta] = h\beta, h = \frac{1}{N}, N = 2, 3, \dots$$

Функция $G_m(x)$ – является фундаментальным решением оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ (см. [6]), т.е. решение уравнения

$$\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}} \right) G_m(x) = \delta(x). \quad (3)$$

Здесь мы исследуем задачу построения дискретного аналога $D_m[\beta]$ при $m = 3n + 2$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ удовлетворяющий равенству (2) при $m = 3n + 2$ имеет следующий вид

$$D_{3n+2}[\beta] = \frac{1}{p_{6n+2}^{(6n+2)}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{3n+1} A_k \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2; \\ 1 + \sum_{k=1}^{3n+1} A_k, & |\beta| = 1; \\ C + \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $C = -4 \cosh\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) - 6n - \frac{p_{6n+1}^{(6n+2)}}{p_{6n+2}^{(6n+2)}}$,

$$A_k = \frac{P_4(\lambda_k)(\lambda_k - 1)^{6n} p_{6n+2}^{(6n+2)}}{\lambda_k \mathcal{P}'_{6n+2}(\lambda_k)}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{6n+2}(\lambda) &= \sum_{s=0}^{6n+2} p_s^{(6n+2)} \lambda^s = \left[K \lambda^2 + \left(\sinh(h) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}h) \right) \lambda + K \right] \times \\ &\times (1 - \lambda)^{6n} + P_4(\lambda) \times \left[\frac{h^5(1 - \lambda)^{6n-6}}{5!} E_4(\lambda) + \frac{h^{11}(1 - \lambda)^{6n-12}}{11!} E_{10}(\lambda) + \dots + \right. \\ &+ \frac{h^{6n-1}}{(6n-1)!} E_{6n-2}(\lambda) - \frac{h^3(1 - \lambda)^{6n-4}}{3!} E_2(\lambda) - \frac{h^9(1 - \lambda)^{6n-10}}{9!} E_8(\lambda) - \dots - \\ &\left. - \frac{h^{6n-3}(1 - \lambda)^2}{(6n-3)!} E_{6n-4}(\lambda) \right], \quad (6) \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{3}} \cosh\left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) - \sinh\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),$$

$$\begin{aligned} P_4(\lambda) &= \lambda^4 - 4 \cosh\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) \lambda^3 + 2(1 + \cosh(h) + \cos(\sqrt{3}h)) \lambda^2 \\ &- 4 \cosh\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) \lambda + 1. \end{aligned}$$

$p_{6n+2}^{(6n+2)}$, $p_{6n+1}^{(6n+2)}$ – коэффициенты многочлена $\mathcal{P}_{6n+2}(\lambda)$, λ_k корни многочлена $\mathcal{P}_{6n+2}(\lambda)$, по модулю меньшие единицы, $E_k(\lambda)$ многочлен Эйлера [2].

Теорема 2. Дискретный аналог $D_{3n+2}(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{6n+4}}{dx^{6n+4}} + \frac{d^{6n+2}}{dx^{6n+2}} + \frac{d^{6n}}{dx^{6n}}$ удовлетворяет следующим равенствам

- 1) $D_{3n+2}(h\beta) * e^{-\frac{1}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}h\beta = 0$,
- 2) $D_{3n+2}(h\beta) * e^{-\frac{1}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}h\beta = 0$,
- 3) $D_{3n+2}(h\beta) * e^{\frac{1}{2}h\beta} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}h\beta = 0$,
- 4) $D_{3n+2}(h\beta) * e^{\frac{1}{2}h\beta} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}h\beta = 0$,
- 5) $D_{3n+2}(h\beta) * (h\beta)^\alpha = 0$, $\alpha = 0, 6n - 1$,
- 6) $D_{3n+2}(h\beta) * G_{3n+2}(h\beta) = \delta(h\beta)$.

Здесь $G_{3n+2}(h\beta)$ определяется равенствам (3), а $\delta(h\beta)$ -дискретная дельта функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. -Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. 484 с.
3. *Шадиметов Х. М.* Дискретный аналог оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и его построение. Вопр. вычисл. и прикл. математики. Ташкент, 1985. 79. С. 22–35.
4. *Шадиметов Х. М., Хаётов А. Р.* Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$. Узб. матем. журнал. 2004, №2. С. 85–95.
5. *Максудов Ш., Салохиддинов М. С., Сирожиддинов С.* Комплекс узгарувчили функциялар назарияси. Тошкент, 1976. 363 б.
6. *Шадиметов Х. М., Азамов С. С.* Об экстремальной функции одной оптимальной квадратурной формулы. Узб. матем. журнал. 2009, №2. С. 176–185.
7. *Хаётов А. Р.* Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$. Узб. матем. журнал. 2009, № 3. С. 81–88.
8. *Шадиметов Х. М., Азамов С. С.* Об одном дискретном аналоге одного дифференциального оператора. Узб. матем. журнал. 2010, №1. С. 181–188.

Коэффициенты одной оптимальной квадратурной формулы

Ахмедов Д. М.

*Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент,
Узбекистан;*

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x-t} dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \varphi(h\beta), \quad (1)$$

где $0 < t < 1$, $\varphi(x) \in L_2^{(2)}(0, 1)$, $L_2^{(2)}(0, 1)$ – пространство Соболева, C_{β} – коэффициенты квадратурной формулы (1), $h = \frac{1}{N}$, $N = 2, 3, 4, \dots$.

В работе [1] для оптимальных коэффициентов квадратурных формул вида (1) в пространстве $L_2^{(2)}(0, 1)$ получена система, которая при $m = 2$ имеет вид

$$\sum_{\gamma=0}^N C([\gamma], t) \cdot \frac{|h\beta - h\gamma|^3}{12} + p_1 \cdot [\beta] + p_0 = f([\beta], t), \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C([\gamma], t) = g_0,$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C([\gamma], t) \cdot [\gamma] = g_1.$$

Здесь

$$f(h\beta, t) = \frac{1}{12} \int_0^1 \frac{|x-h\beta|^3}{x-t} dx = \frac{1}{12} \left(-\frac{11}{3} (h\beta)^3 + (5t+3)(h\beta)^2 - (2t^2+3t+1,5)(h\beta) + (t^2 + \frac{t}{2} + \frac{1}{3}) + (t-h\beta)^3(-2 \ln|h\beta-t| + \ln(t-t^2)) \right)$$

$$g_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x-t} = \ln \frac{1-t}{t}, \quad g_1 = \int_0^1 \frac{x}{x-t} dx = 1 + t \ln \frac{1-t}{t}.$$

$C([\gamma], t)$, $\gamma = \overline{0, N}$ и p_1, p_0 – неизвестные.

Приближенным вычислением сингулярных интегралов занимались многие математики (см., например, [2-6]).

Целью настоящей работы является нахождение оптимальных коэффициентов $C([\gamma], t)$, $\gamma = \overline{0, N}$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $t \neq h\beta$, $\beta = \overline{0, N}$. Тогда оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (1) в пространстве $L_2^{(2)}(0, 1)$ имеют вид

$$C[0] = \frac{6}{h^3} \left[\frac{g_0}{12} (h^3 - 3q^N (h^2 + h(q+2))) + \frac{g_1 q^N}{4} (h^2 + 2h(q+2)) + a_1^- h(q+1) + f(0, t)(3q+2) - f(h, t)(12q+5) - q^N (3f(1, t) \times (q+1) + a_1^+ h(q+2)) + 6(q+2) \sum_{\gamma=2}^N q^\gamma f(h\gamma, t) \right],$$

$$C[\beta] = \frac{6}{h^3} \left[6(q+2) \sum_{\gamma=0}^{\beta-2} q^{\beta-\gamma} f(h\gamma, t) - (12q+5) \left(f(h(\beta-1), t) + f(h(\beta+1), t) \right) + (6q+4)f(h\beta, t) + 6(q+2) \sum_{\gamma=\beta+2}^N q^{\gamma-\beta} f(h\gamma, t) + \frac{g_1}{4} \left(q^{N-\beta} (2h(q+2) + h^2) - q^\beta h^2 \right) + q^\beta \left(a_1^- h(q+2) - 3f(0, t) \times (q+1) \right) - q^{N-\beta} (3f(1, t)(q+1) + \frac{g_0}{4} (h(q+2) + h^2) + a_1^+ h(q+2)) \right], \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$C[N] = \frac{6}{h^3} \left[-\frac{g_0}{12} (3h(q+1) - h^3) + \frac{g_1}{4} (2h(q+1) - q^N h^2) + q^N \left(a_1^- h(q+2) - 3f(0, t)(q+1) \right) - a_1^+ h(q+1) + f(1, t)(3q+2) - f(1-h, t) \times (12q+5) + 6(q+2) \sum_{\gamma=0}^{N-2} q^{N-\gamma} f(h\gamma, t) \right].$$

где

$$a_1^- = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a_1^+ = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$a_0^- = f(0, t), \quad a_0^+ = f(1, t) - \frac{1}{12}g_0 + \frac{1}{4}g_1 - \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= B_2^2 - A_2^2, \\
\Delta_1 &= A_2 \left[-F_1 - \frac{1}{12}g_0(B_1 + 3B_2 + 3B_3) + \frac{1}{4}g_1(B_1 + 2B_2 + B_3 - A_3) - \right. \\
&\quad \left. -A_1f(0, t) - B_1 \left(f(1, t) - \frac{1}{12}g_0 + \frac{1}{4}g_1 \right) \right] - \\
&\quad -B_2 \left[-F_2 - \frac{1}{12}g_0(A_1 + 3A_2 + 3A_3) + \frac{1}{4}g_1(A_1 + 2A_2 + A_3 - B_3) - \right. \\
&\quad \left. -B_1f(0, t) - A_1 \left(f(1, t) - \frac{1}{12}g_0 + \frac{1}{4}g_1 \right) \right], \\
\Delta_2 &= -A_2 \left[-F_2 - \frac{1}{12}g_0(A_1 + 3A_2 + 3A_3) + \frac{1}{4}g_1(A_1 + 2A_2 + A_3 - B_3) - \right. \\
&\quad \left. -B_1f(0, t) - A_1 \left(f(1, t) - \frac{1}{12}g_0 + \frac{1}{4}g_1 \right) \right] + \\
&\quad +B_2 \left[-F_1 - \frac{1}{12}g_0(B_1 + 3B_2 + 3B_3) + \frac{1}{4}g_1(B_1 + 2B_2 + B_3 - A_3) - \right. \\
&\quad \left. -A_1f(0, t) - B_1 \left(f(1, t) - \frac{1}{12}g_0 + \frac{1}{4}g_1 \right) \right], \\
F_1 &= 6(q+2) \sum_{\gamma=1}^N q^{\gamma+1} f(h\gamma, t) - (12q+5)f(0, t), \\
F_2 &= 6(q+2) \sum_{\gamma=0}^{N-1} q^{N+1-\gamma} f(h\gamma, t) - (12q+5)f(1, t), \\
A_1 &= 3q+2, & B_1 &= 3q^N(3q+1) \\
A_2 &= h(2q+1), & B_2 &= hq^N(2q+1) \\
A_3 &= h^2q, & B_3 &= -h^2q^{N+1},
\end{aligned}$$

$$q = \sqrt{3} - 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шадиметов Х. М. Коэффициенты весовых оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$ // Кубатурные формулы и их приложения / Доклады V международного семинара-совещания (Красноярск, 13-18 сентября, 1999). Красноярск: КГТУ, 1999. С. 207–214.
2. Лифанов И. К. Метод сингулярных уравнений и численный эксперимент. (в математической физике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО "Янус 1995. 520 с.
3. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.-М.: Наука, 1985. 256 с.
4. Габдулхаев Б. Г. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов I // Известия вузов. Математика. 1975. № 4. С. 3–13.
5. Исраилов М. И., Шадиметов Х. М. Весовые оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов типа Коши. ДАН Узбекистана -1991, № 8. С. 10–11.
6. Шадиметов Х. М. Оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов типа Коши. ДАН Узбекистана, 1987. № 6. С. 9–11.

Метод конечных элементов решения эллиптико-параболического уравнения

Баяндуева Е. С.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ;

В [1] исследована одна краевая задача для уравнения:

$$Lu = k(x, t)u_{tt} + a(x, t)u_t + u_{xx} + c(x)u = f(t, x) \quad (1)$$

в цилиндрической области $G = \Omega \times [0, T]$, $\Gamma = \gamma \times [0, T]$, $T > 0$, $\Omega = [0, m]$, γ - граница Ω . Пусть $k(x, t) \geq 0$ в G .

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области G такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0; u|_{t=T} = 0; u|_{t=0} = 0, k(x, 0) > 0. \quad (2)$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) - достаточно гладкие функции и $c(x) < 0$ достаточно большой по модулю. Определим некоторые формулы:

$$(u, v)_1 = \int_G (u_x v_x + u_t v_t + uv) dG; \|u\|_1^2 = (u, u)_1; u, v \in W_2^1(G).$$

Пусть C_L -класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), $\widetilde{W}_2^1(G)$ -замыкание C_L по норме пространства $W_2^1(G)$. Через $\widehat{W}_2^1(G)$ обозначим класс функций $\eta(x, t)$ из $W_2^1(G)$, удовлетворяющих условиям: $\eta|_{\Gamma} = 0; \eta|_{t=0} = 0; \eta|_{t=T} = 0$, если $k(x, T) > 0$.

Определение. Функция $u(x, t) \in \widehat{W}_2^1(G)$ называется обобщенным решением краевой задачи (1), (2), если выполнено тождество

$$(Lu, \eta)_0 \equiv \int_G -(ku_t \eta_t + k_t u_t \eta + u_x \eta_x - au_t \eta - cu \eta) dG = \int_G f \eta dG,$$

$$\forall \eta \in \widehat{W}_2^1(G).$$

Остановимся на вопросе о разрешимости задачи (1), (2). Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $c(x) < 0$ достаточно большой по модулю,

$$k(x, 0) > 0, k(x, T) > 0, 2a - |k_t| \geq \delta > 0.$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^1(G)$ существует единственное решение $u(x, t)$ краевой задачи (1), (2) из пространства $W_2^2(G)$.

В работе [3] в теореме регулярная разрешимость задачи (1), (2) была доказана с помощью явной схемы метода конечных разностей. Мы будем применять метод конечных элементов, который представляет из себя разновидность вариационных методов Рунта и Галеркина, основанный на специальном выборе базисных функций. Для решения мы используем базисные функции $\varphi_{ij}(t, x)$. Каждая такая функция отлична от нуля лишь на элементарном шестиугольнике G_{ij} , составленном из шести треугольных элементов, имеющих общую вершину в точке (t_i, x_j) .

В точке (t_i, x_j) функция $\varphi_{ij}(t, x)$ принимает значение, равное единице, в остальных вершинах шестиугольника $\varphi_{ij}(t, x) = 0$, на каждом из треугольников с вершиной (t_i, x_j) функция линейна и тождественно равна нулю вне шестиугольника.

Построение базисной функции- пирамидки Куранта или просто "крышечки". Фиксируем вершину P_1 какого-либо треугольника. Составляем список соседей- вершин, принадлежащих треугольникам, имеющим вершину P_1 . Пусть в списке есть вершины Q_1 и Q_1 , принадлежащие треугольнику. В этом треугольнике представляем

$$\varphi_1(t, x) = \frac{1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \frac{t-x_2}{t_1-x_2}}{1 - \frac{x_{P_1}-x_1}{x_2-x_1} - \frac{t_{P_1}-x_2}{t_1-x_2}}.$$

Тогда для точки получаем:

$$P_1\psi_{P_1}^N(t, x) = \sum_{k=1}^6 \varphi_k(t, x).$$

Применим метод конечных элементов к решению задачи. Здесь

$$u^h(x, y) = \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} u_{kl}^h \varphi_{kl}(t, x),$$

где

$$u_{kl}^h = u^h(t_k, x_l).$$

Значение u_{kl}^h , найденные методом Галеркина, удовлетворяет системе уравнений:

$$\sum_{k,l=1}^{N-1} \left(\int_G [k \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial t} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t} + (a - k_t) \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial t} \varphi_{ij} - \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + c \varphi_{kl} \varphi_{ij}] dt dx \right) u_{kl}^h = \int_G f \varphi_{ij} dt dx \quad (3)$$

$$i, j = \overline{1, N-1}$$

Функции $\varphi_{kl}(t, x)$ и $\varphi_{ij}(t, x)$ отличны одновременно от нуля только, если точка (t_k, x_l) является одной из вершин шестиугольника G_{ij} или совпадает с его центром. Поэтому в левой части уравнений (3) содержится не более 7 ненулевых слагаемых при неизвестных $u_{i-1,j}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j+1}, u_{i+1,j}, u_{i-1,j-1}, u_{i,j-1}, u_{i,j}$.

Таким образом, получим систему уравнений:

$$\sum_{k,l=1}^{N-1} a_{kl}^{ij} u_{kl}^h = f_{ij}^h, i, j = \overline{1, N-1} \quad (4)$$

где коэффициенты $a_{kl}^{ij} = \int_G [k \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial t} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t} + (a - k_t) \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial t} \varphi_{ij} - \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + c \varphi_{kl} \varphi_{ij}] dt dx$;

$$f_{ij}^h = \int_G f \varphi_{ij} dt dx,$$

будут найдены с помощью кубатурных формул, используемых в [4].

Добавим к системе (4) аппроксимации условий:

$$u_{ij} = 0, (t_i, x_j) \in \Gamma^h \quad (5)$$

Эта система (4), (5) решается методом Гаусса- Зейделя, который состоит в построении последовательности итераций вида:

$$u_{ij}^{s+1} = \frac{1}{4} [u_{i-1,j}^{s+1} + u_{i+1,j}^s + u_{i,j+1}^s + u_{i,j-1}^{s+1}]. \quad (6)$$

(верхним индексом s обозначен номер итерации). При $s \rightarrow \infty$ последовательность u_{ij}^s сходится к точному решению системы (4), (5). В качестве окончания итерационного процесса можно принять:

$$\begin{aligned} \max \|u_{ij}^s - u_{ij}^{s+1}\| < \varepsilon \\ 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N-1. \end{aligned}$$

Работа выполнена в рамках целевой программы МОиН РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 г.г.) на 2011 год" (проект № РНП 2.1.1/13828).

ЛИТЕРАТУРА

1. Терехов А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Сб. методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979. С. 128–136.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики // М.: Наука, 1973. 409 с.
3. Романова Н. А. О сходимости разностных схем краевых задач для уравнений смешанного типа: Дис: канд. физ-мат. наук (01.01.02) // Якутский гос. универс. Якутск, 1994. 109 с.
4. Баяндуева Е. С. Арсаланов А. А. Построение эрмитовых кубатурных формул. // Сб. научных трудов. № 11. Улан-Удэ: ВСГТУ, 2010. 85 с.

К проблеме численного решения эллиптических задач

Белых В. Н.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; belykh@math.nsc.ru

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идет об аппроксимации континуальных объектов конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих финитную формализацию. Качество дискретизаций оценивается сравнением еџ характеристик (точности и объема) с асимптотиками двух числовых параметров $\alpha_n(X)$ и $H_\varepsilon(X)$, характеризующих аппроксимационные возможности компакта X решений задачи [1]. Точнее, с асимптотиками александровского n -поперечника $\alpha_n(X)$ при $n \rightarrow \infty$ и колмогоровской ε -энтропии $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Напомним, что поперечник $\alpha_n(X)$ характеризует способность компакта X "хорошо" приближаться компактами топологической размерности $\leq n$, а энтропия $H_\varepsilon(X)$, определяемая двоичным логарифмом от минимального числа элементов в наиболее экономном 2ε -покрытии X , задает минимальный объем информации в битах, требуемый для различения элементов компакта X с точностью $\varepsilon > 0$.

Величины асимптотик $\alpha_n(X)$ и $H_\varepsilon(X)$ определяются гладкостью составляющих компакт X элементов [1-3]. Грань отличающая качественную дискретизацию характеризуется наследованием дифференциальных свойств решений. Иначе говоря, практическая эффективность численного метода зависит от того, насколько полно конечномерные задачи, получаемые дискретизацией исходной краевой, наследуют дифференциальные свойства решений последней. Именно по этой причине уникальные аппроксимационные возможности компактов решений эллиптических задач (характеризующиеся наличием шаудеровских оценок) находятся в конфликте с той точностью, которую способны обеспечивать численные методы с главным членом погрешности (квадратур, конечных разностей, конечных элементов и т.п.).

В докладе указан принципиально новый – *ненасыщаемый* [1,4] – метод численного решения осесимметричных краевых задач для уравнения Лапласа в случае C^∞ -гладких тел

вращения достаточно произвольной формы. Специфическая его особенность – отсутствие главного члена погрешности и, как результат – способность автоматически подстраиваться к любым естественным для задач классам корректности. В результате экстраординарные запасы гладкости решений задач (к примеру, бесконечная дифференцируемость) прежде находившиеся на периферии насущных интересов компьютерных вычислений, становятся их активным персонажем [5,6].

В качестве примера с высокой точностью численно решена задача внешнего безотрывного обтекания потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости эллипсоида вращения с удлинением, равным 1000 (см. [7]). Отметим, что эллипсоид вращения, с удлинением, равным 25, становится уже непреодолимым препятствием для методов с главным членом погрешности – *насыщаемых*, т.е. таких, как методы квадратур, конечных разностей, конечных элементов и подобные им.

Полученный результат имеет и принципиальный интерес [1], поскольку в случае C^∞ -гладких решений построенный численный метод с точностью до медленно растущего множителя $O(\ln^2 n)$ реализует абсолютно неуплощаемую экспоненциальную оценку погрешности $O(e^{-n\rho})$, $\rho = \text{const}$, n – число свободных параметров у функций, из которых конструируется приближение. Неуплощаемость оценки обусловлена асимптотикой $\alpha_n(X)$ компакта X аналитических функций, содержащего точное решение задачи. Эта асимптотика также имеет вид $O(e^{-n\rho})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00147-а) и Междисциплинарного интеграционного проекта № 40 Президиума СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. РХД, Москва-Ижевск, 2002.
2. *Белых В. Н.* Об асимптотике колмогоровской ε -энтропии некоторых классов бесконечно дифференцируемых периодических функций (к проблеме К. И. Бабенко) // ДАН. 2010. Т. 431, № 6. С. 731–735.
3. *Белых В. Н.* Об абсолютной ε -энтропии одного компакта бесконечно дифференцируемых периодических функций // СМЖ. 2011. Т. 52, № 3 (в печати).
4. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞ -гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // СМЖ. 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499.
5. *Белых В. Н.* Внешняя осесимметричная задача Неймана для уравнения Лапласа: ненасыщаемые методы численного решения // ДАН. 2007. Т. 417. № 4. С. 442–445.
6. *Белых В. Н.* Ненасыщаемый численный метод решения внешней осесимметричной задачи Неймана для уравнения Лапласа // СМЖ. 2011. Т. 52, № 4 (в печати).
7. *Белых В. Н.* К проблеме обтекания осесимметричных тел большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 5. С. 56–67.

Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6} - 1$

Болтаев А. К.

*Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент,
Узбекистан;*

Задача минимизации нормы функционала погрешности по коэффициентам в пространстве $L_2^{(m)}$ в [1] С.Л.Соболевым приведена к системе разностных уравнений типа Винера-Хопфа и доказано существование и единственность решения этой системы. Центральное место в работе [1] занимает описание некоторого аналитического алгоритма отыс-

кания оптимальных коэффициентов. Для этого С.Л.Соболев определил и исследовал дискретный аналог $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ полигармонического оператора Δ^m . Задача построение дискретного оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ при произвольном n оказалось очень трудной. В одномерном случае построением дискретного аналога $D_h^{(m)}[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ занимались Э.Ж.Жамолов и Х.М.Шадиметов [2,3]. В работах [4,5] построены дискретные аналоги дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ и $\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$, соответственно.

В настоящей работе рассматривается задача построение дискретной функции $D[\beta]$, которая удовлетворяет равенству

$$D[\beta] * G[\beta] = \delta[\beta], \tag{1}$$

где

$$G[\beta] = \frac{\text{sign}[\beta]}{6} \cdot \left(\text{sh}[\beta] + e^{\frac{[\beta]}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta] + \frac{\pi}{3}\right) + e^{-\frac{[\beta]}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta] + \frac{2\pi}{3}\right) \right), \tag{2}$$

$$\delta[\beta] = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0, \end{cases} \quad [\beta] = h\beta, \quad h = \frac{1}{N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Следует отметить, что метод построения функции $D[\beta]$ аналогично методу построения дискретных аналогов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}, \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ и $\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$ (см.[3-5]).

Дискретная функция $D[\beta]$ имеет важную роль при вычислении коэффициентов оптимальных квадратурных формул и оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{P_3}(0, 1)$, снабженной нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^{P_3}(0, 1)} = \left\{ \int_0^1 \left[P_3\left(\frac{d}{dx}\right) \varphi(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $P_3(z) = z^3 + 1$.

Отметим что, уравнение (1) является дискретным аналогом следующего уравнения

$$\left(\frac{d^6}{dx^6} - 1\right) \cdot G(x) = \delta(x), \tag{3}$$

где $G(x) = \frac{\text{sign}x}{6} \cdot \left(\text{sh}(x) + e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2\pi}{3}\right) \right)$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6} - 1$, удовлетворяющий равенству (1), имеет вид

$$D[\beta] = \frac{3}{K} \cdot \begin{cases} B \cdot \tau_1^{|\beta|-1} + C \cdot \tau_2^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \\ 1 + B + C, & |\beta| = 1, \\ K_1 - M_1 + \frac{B}{\tau_1} + \frac{C}{\tau_2}, & \beta = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$K = \text{sh}(h) + \text{sh}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) - \sqrt{3} \cdot \text{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),$$

$$K_1 = 2\text{ch}(h) + \frac{4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) \text{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \text{sh}(h) + \text{sh}(h) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}h) - 2\text{sh}(h)\text{ch}(h)}{\text{sh}(h) + \text{sh}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) - \sqrt{3} \cdot \text{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)},$$

$$K_2 = \frac{2 \cos(\sqrt{3}h) \operatorname{sh}(h) + 4 \operatorname{sh}(h) \operatorname{ch}(h) - 2\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}h) \operatorname{ch}(h)}{\operatorname{sh}(h) + \operatorname{sh}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}h}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}h}{2}\right)},$$

$$M_1 = 2 \cdot \left(\operatorname{ch}(h) + 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}h}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) \right),$$

$$B = \frac{(\tau_1^2 - 2\tau_1 \cdot \operatorname{ch}(h) + 1) \cdot A_4(\tau_1)}{(\tau_1^2 - 1) \cdot (2\tau_1^2 - K_1\tau_1 + 2)},$$

$$C = \frac{(\tau_2^2 - 2\tau_2 \cdot \operatorname{ch}(h) + 1) \cdot A_4(\tau_2)}{(\tau_2^2 - 1) \cdot (2\tau_2^2 - K_1\tau_2 + 2)}.$$

$$A_4(\tau) = \tau^4 - 4\tau^3 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}h}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) + 2\tau^2 \cdot \left(1 + \cos(\sqrt{3}h) + \operatorname{ch}(h)\right) -$$

$$-4\tau \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}h}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2}\right) + 1.$$

$$\tau_1 = \frac{K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4 \cdot K_2 + 8} + \sqrt{\left(K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4 \cdot K_2 + 8}\right)^2 - 16}}{4},$$

$$\tau_2 = \frac{K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4 \cdot K_2 + 8} - \sqrt{\left(K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4 \cdot K_2 + 8}\right)^2 - 16}}{4}.$$

h – малый параметр.

Теорема 2. Дискретный аналог $D[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6} - 1$ удовлетворяет равенствам

- 1) $D[\beta] * e^{[\beta]} = 0,$
- 2) $D[\beta] * e^{-[\beta]} = 0,$
- 3) $D[\beta] * e^{\frac{1}{2}[\beta]} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) = 0,$
- 4) $D[\beta] * e^{\frac{1}{2}[\beta]} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) = 0,$
- 5) $D[\beta] * e^{-\frac{1}{2}[\beta]} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) = 0,$
- 6) $D[\beta] * e^{-\frac{1}{2}[\beta]} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) = 0,$
- 7) $D[\beta] * G[\beta] = \delta[\beta].$

Здесь $G[\beta]$ определяется равенством (2), а $\delta[\beta]$ – дискретная дельта-функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. *Жамалов З. Ж.* Об одном разностном аналоге оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и его построение // В кн.: Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения. Ташкент: Фан, 1978. С. 97–108.
3. *Шадиметов Х. М.* Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и его построение. Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1985. С. 22–25.
4. *Шадиметов Х. М., Хаётов А. Р.* Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ // УзМЖ, 2004. № 2. С. 85–95.
5. *Хаётов А. Р.* Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$ // УзМЖ, 2009. № 3. С. 81–88.

Вычисление сингулярных интегралов

Булгатова Е. Н.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ;
belena77@mail.ru

Сингулярный интеграл $\int_{-a}^a \frac{g(x)}{x} dx$ понимается в главном смысле, где $g(0) \neq 0$, т. е. как предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{0-\varepsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{0+\varepsilon}^a \frac{g(x)}{x} dx \right).$$

Любая непрерывная функция представляется как сумма четной и нечетной функции, т. е.

$$g(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2} + \frac{g(x) - g(-x)}{2} = f_1(x) + f_2(x).$$

Тогда $f_1(x)$ является четной функцией, а $f_2(x)$ нечетной, так как $f_1(-x) = \frac{g(-x) + g(x)}{2} = f_1(x)$, $f_2(-x) = \frac{g(-x) - g(x)}{2} = -f_2(x)$.

Известно, что $\int_{-a}^a f_1(x) dx = 2 \int_0^a f_1(x) dx$ и $\int_{-a}^a f_2(x) dx = 0$.

Если $g(x)$ удовлетворяет условию Гельдера в точке $x = 0$, т. е. $|g(x) - g(0)| \leq A|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, то сингулярный интеграл $\int_{-a}^a \frac{g(x)}{x} dx$ равен интегралу $\int_0^a \frac{g(x) - g(-x)}{x} dx$. Если $g(x)$ — гладкая функция, то функция $\frac{g(x) - g(-x)}{x}$ является гладкой.

Теорема. Если $\int_0^a \frac{g(x) - g(-x)}{x} dx$ сингулярный интеграл и $g(x) \in C^{2m+1}$ и $l_{(0,a)}^h(x)$ функционал с пограничным слоем с шагом $h = \frac{1}{N}$, то норма функционала $l_{(0,1)}^h(x)$ в пространстве $W_\infty^m(0,1)$ удовлетворяет оценке

$$\left\| l_{(0,1)}^h \right\|_{W_\infty^m(0,1)} \leq B_0 h^m (1 + o(h^{m+1})).$$

Доказательство: Несобственный интеграл преобразуем

$$\int_{-a}^a \frac{g(x)}{x} dx = \int_0^a \frac{g(x) - g(0)}{x} dx.$$

Покажем, что функция $f(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$ принадлежит $C_{(0,1)}^m$. Применим формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$g(x) - g(0) = g(0) - g(0) + \sum_{\alpha=1}^m \frac{g^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha + \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} g^{(m+1)}(tx) dt x^{m-1}.$$

Дифференцируя m раз по переменной x , получим

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^m t^m g^{(2m+1)}(tx) dt x^{m-1}.$$

Следовательно, функция $f(x) \in C^m$.

Используя основную оценку для функционала $l_{(0,1)}^h(x)$ с пограничным слоем в пространстве $W_\infty^m(0,1)$ [1], получаем

$$\langle l_{(0,1)}^h, f(x) \rangle \leq B_0 h^m (1 + o(h^{m+1})).$$

Теорема доказана.

Работа выполняется в рамках целевой программы МОиН РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010г. г.) на 2011 год" (проект № РНП 2.1.1/13828).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгатова Е. Н.* Построение и исследование кубатурных формул с пограничным слоем для интегрирования функций из пространств $W_p^m(E_n)$: Дисс. канд. физ-мат. наук (01.01.07) / Вост.-Сиб. технолог. ун-т. Улан-Удэ, 2009. 109 с.

Monte Carlo algorithms for numerical estimation of the elliptic BVP solution and its gradient

Aleksandr Burmistrov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk;
burm@osmf.ssc.ru

We propose numerical algorithms for estimating the solution of the boundary value problems for elliptic equation and the solution gradient. The problem of error reduction is considered for deterministic as well as statistical computational errors. We also propose "external" extrapolation for the Euler scheme in order to reduce the deterministic error. A variant of "antithetic variates" method is suggested for reducing the variance of the weight Monte Carlo estimate for the solution gradient. Numerical results are presented for Dirichlet BVP.

1. Dirichlet boundary value problem. We consider k -dimensional Dirichlet problem for equation

$$Lu + cu + g \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k b_{ij}(r) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^k v_i(r) \frac{\partial u}{\partial y_i} + cu + g = 0, \quad u \Big|_{\Gamma} = \psi, \quad (1)$$

in domain Ω with boundary Γ , which is supposed to be simply-connected and piecewise smooth. We also assume that functions $b_{ij}(\cdot), v_i(\cdot), c(\cdot)$ satisfy the Hölder condition in R^k , function $g(\cdot)$ satisfies the Hölder condition in $\bar{\Omega}$, function $\psi(\cdot)$ is continuous on Γ , and $B(r) = \sigma(r) \cdot \sigma^*(r) = (b_{ij}(r))_{i,j=1,\dots,k}$ is uniformly positive definite matrix in Ω . Moreover, we suppose that $c(r) < c^*$, where $-c^*$ is the first eigen value of L in Ω .

For estimating the solution of (1) we can use the probabilistic representation of $u(r_0)$ at an arbitrary point r_0 [3]:

$$u(r_0) = \mathbb{E} J_u, \quad J_u = \left[\int_0^{t^*} \exp \left(\int_0^t c(\xi_l) dl \right) g(\xi_t) dt + \psi(\xi_{t^*}) \exp \left(\int_0^{t^*} c(\xi_l) dl \right) \right].$$

Here ξ_t is a solution of the corresponding SDE system

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t v(\xi_l) dl + \int_0^t \sigma(\xi_l) dw(l) \quad \text{with } \xi_0 = r_0, \quad (2)$$

t^* is the first passage time of the process ξ_t to the boundary Γ , $w(t)$ is a standard Wiener process. We can simulate the solution of (2) using, for example, a discrete Euler scheme with a time step τ :

$$r_{n+1} = r_n + v(r_n)\tau + \sigma(r_n)\eta_{n+1}\sqrt{\tau}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

here η_{n+1} are i.i.d. gaussian vectors with independent coordinates.

Computational error of the Monte Carlo estimates consists of statistical and deterministic components. The order q of the latter component is equal to 0.5 for the Euler scheme [4], i. e. the deterministic error in this case is $O(\sqrt{\tau})$. We discuss the question of error reduction in the following sections.

2. “External” extrapolation. The following modification will help us to improve the deterministic error order q in the Euler scheme. We suggest *simultaneous* estimating of the desired functional J_u with two time steps [$J_u(\cdot, \tau)$ and $J_u(\cdot, 2\tau)$] and “external” extrapolating [1]. Moreover, every trajectory simulated with the time step 2τ (so called (2τ) -trajectory) is a part of (τ) -trajectory.

Let us compare the point $r_2^{(\tau)}$, which is obtained from r_0 after two iterations of (3) with the time step τ , and the point $r_1^{(2\tau)}$, which is obtained from r_0 after a single iteration of (3) with the time step 2τ :

$$\begin{aligned} r_2^{(\tau)} &= r_0 + [v(r_0) + v(r_1)]\tau + [\sigma(r_0)\eta_1 + \sigma(r_1)\eta_2]\sqrt{\tau}, \\ r_1^{(2\tau)} &= r_0 + 2v(r_0)\tau + \sigma(r_0)\tilde{\eta}_1\sqrt{2\tau}, \end{aligned}$$

where $\tilde{\eta}_1$ is a gaussian vector independent of η_1 and η_2 . For smooth functions $v(\cdot)$ and $\sigma(\cdot)$ we have

$$r_2^{(\tau)} \simeq r_0 + 2v(r_0)\tau + \sigma(r_0)[\eta_1 + \eta_2]\sqrt{\tau}.$$

Since the sum $(\eta_1 + \eta_2)$ and $\tilde{\eta}_1\sqrt{2}$ have the same distribution density, we can use the point $r_2^{(\tau)}$ instead of $r_1^{(2\tau)}$.

Since the sum $(\eta_{2n} + \eta_{2n-1})$ and $\tilde{\eta}_n\sqrt{2}$ have the same distribution density ($\tilde{\eta}_n$ are the i.i.d. gaussian vectors for Euler scheme with time step 2τ), proceeding by induction we come to conclusion that we can use the point $r_{2n}^{(\tau)}$ instead of $r_n^{(2\tau)}$ for any $n > 0$. Note, that simulation of (2τ) -trajectory can take place without simulation of (τ) -trajectory, if $r_{2j-1}^{(\tau)} \notin \bar{\Omega}$ and $r_{2j}^{(\tau)} = r_j^{(2\tau)} \in \bar{\Omega}$ for some $j > 0$.

Thus, we can simultaneously estimate both $J_u(\cdot, \tau)$ and $J_u(\cdot, 2\tau)$ using the same trajectories, moreover

$$\begin{aligned} J_u(\cdot) &= J_u(\cdot, \tau) + C\tau^q + o(\tau^q), \\ J_u(\cdot) &= J_u(\cdot, 2\tau) + C(2\tau)^q + o((2\tau)^q). \end{aligned}$$

After extrapolation, assuming that q is known, we obtain

$$J_u(\cdot) = J_u(\cdot, \tau) + \frac{J_u(\cdot, \tau) - J_u(\cdot, 2\tau)}{2^q - 1} + o(\tau^q) = J_u^{ext}(\cdot, \tau) + o(\tau^q).$$

Numerical results have shown, that for the Euler scheme with “external” extrapolation the deterministic error of the estimate

$$J_u^{ext}(r, \tau) \equiv J_u(\cdot, \tau) + \frac{J_u(\cdot, \tau) - J_u(\cdot, 2\tau)}{2^q - 1}$$

has the form $o(\tau^q) = O(\tau)$, i.e. $\mathbf{E}J_u^{ext}(r, \tau) = u(r) + O(\tau)$. Table presents numerical results for the following parameters:

$$\Omega = \{r = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |r| < 1\}, \quad u = \sin(2x) \sinh(2y), \quad g = \sin(2x) \sinh(2y),$$

$$c \equiv -1, \quad v = \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -\sinh(2y) \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{4 + \cos(2x)} & 0 \\ 0 & \sqrt{4 + \cosh(2y)} \end{pmatrix}.$$

Table 1. Total computational *Error* of the estimates $J_u(r_0, \tau)$, $J_u(r_0, 2\tau)$ and $J_u^{ext}(r_0, \tau)$ of the solution to the Dirichlet boundary value problem at the point $r_0 = (-0.6, -0.6)$, number of simulated trajectories is $N = 2 \cdot 10^6$.

Step τ	$\left(Error \pm \frac{\sqrt{\mathbf{V}J_u}}{\sqrt{N}} \right) \times 10^3$		
	for $J_u(r_0, \tau)$	for $J_u(r_0, 2\tau)$	for $J_u^{ext}(r_0, \tau)$
2^{-10}	113.274 ± 0.754	153.679 ± 0.768	15.727 ± 1.028
2^{-11}	83.067 ± 0.744	114.115 ± 0.755	8.112 ± 0.954

3. Estimation of the solution gradient. We suggest a weight analogue of the Euler scheme for estimating the spatial derivative $\frac{\partial u}{\partial \omega}(r_0) = (\omega, \text{gradu}(r_0))$, where $\omega \in R^k$. In order to estimate this value, we need to simulate the solution of SDE (2) with weight $(\eta_1, \sigma^{-1}(r_0)\omega)/\sqrt{\tau}$. This weight is calculated after the *first* (i.e. $n = 0$ in (3)) transition in the Euler scheme [2]. As a result, we obtain a weight Monte Carlo estimate $J_\omega(r_0)$ for $\frac{\partial u}{\partial \omega}(r_0)$:

$$J_\omega(r_0, \tau) = \frac{(\eta_1, \sigma^{-1}(r_0)\omega)}{\sqrt{\tau}} \cdot J_u(r_1, \tau), \quad (4)$$

here $J_u(r_1, \tau)$ is the estimate of solution to the problem (1) at the point $r_1 = r_0 + v(r_0)\tau + \sigma(r_0)\eta_1\sqrt{\tau}$ and $\mathbf{E}J_u(r_1, \tau) = u(r_1) + O(\tau^q)$.

The deterministic error of the estimate (4) and the error of the estimate $J_u(r_1, \tau)$ have the same order, which is equal to $O(\sqrt{\tau})$ [2]. The statistical error of the estimate (4) grows, when the time step τ decreases, since each sample of the estimate (4) is of the order $O(\tau^{-0.5})$. For improving the deterministic error, we can replace the estimate $J_u(r_1, \tau)$ by $J_u^{ext}(r_1, \tau)$ as it was described in section 2.

To reduce the variance of the estimate (4) (i.e. to reduce the statistical error), we suggest using $\tau_1 > \tau$ and a variant of the *antithetic variates* method [5], which is realized in our case as follows. We use two dependent identically distributed vectors: η_1 and $-\eta_1$, instead of the first gaussian vector η_1 . Thus, together with each trajectory starting at the point

$$r_1 \equiv r_1^+ = r_0 + v(r_0)\tau_1 + \sigma(r_0)\sqrt{\tau_1}\eta_1$$

we simulate another one starting at the point

$$r_1^- = r_0 + v(r_0)\tau_1 - \sigma(r_0)\sqrt{\tau_1}\eta_1,$$

using the same gaussian vectors η_n , $n > 1$.

As a result, we obtain the following estimate

$$J_\omega^{\pm ext}(r_0, \tau) = \frac{1}{2} (\eta_1, \sigma^{-1}(r_0)\omega) \cdot \frac{J_u^{ext}(r_1^+, \tau) - J_u^{ext}(r_1^-, \tau)}{\sqrt{\tau_1}}$$

for estimating the derivative $\frac{\partial u}{\partial \omega}(r_0)$. Note, that since $J_u(\cdot, \tau)$ and $J_u(\cdot, 2\tau)$ are strongly dependent estimates, the following inequalities hold for the covariance and the variance of these estimates:

$$\text{cov}(J_u(\cdot, \tau), J_u(\cdot, 2\tau)) > 0, \quad \mathbf{V}J_u^{ext}(\cdot, \tau) < \frac{2^{2q}\mathbf{V}J_u(\cdot, \tau) + \mathbf{V}J_u(\cdot, 2\tau)}{(2^q - 1)^2}.$$

Moreover, if the variances of the estimate $J_u^{ext}(\cdot, \tau)$ is finite, then we can also show uniform (with respect to τ) finiteness of the variance for the estimate $J_\omega^{\pm ext}(\cdot, \tau)$. In table you can find numerical results for the following parameters:

$$\Omega = \{r = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |r| < 1\}, \quad u = x^2 - y^2 + x, \\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = 0, \quad c = 0, \quad \tau_1 = 0.01.$$

Table 2. Total computational *Error* of the estimates $J_\omega(r_0, \tau)$, $J_\omega^\pm(r_0, \cdot)$, obtained using the antithetic variates method, and the estimate $J_\omega^{\pm ext}(r_0, \tau)$ of the derivative $\frac{\partial u}{\partial \omega}$ at the point (0.0,-0.5); number of simulated trajectories is $N = 4 \cdot 10^6$.

ω	τ	$\left(Error \pm \frac{\sqrt{\mathbf{V}J_\omega}}{\sqrt{N}} \right) \times 10^3$			
		$J_\omega(r_0, \tau)$	$J_\omega^\pm(r_0, \tau)$	$J_\omega^\pm(r_0, 2\tau)$	$J_\omega^{\pm ext}(r_0, \tau)$
x	2^{-8}	37.227 ± 4.739	28.704 ± 2.126	43.536 ± 2.142	7.105 ± 2.928
	2^{-9}	18.053 ± 4.734	21.732 ± 2.130	31.235 ± 2.144	1.210 ± 2.736
y	2^{-8}	70.089 ± 4.761	62.872 ± 2.212	87.232 ± 2.223	4.061 ± 3.008
	2^{-9}	46.403 ± 4.755	48.748 ± 2.221	66.603 ± 2.231	5.640 ± 2.811

REFERENCES

1. *Burmistrov A. V.* Global extrapolation in the Euler method // Proceedings of the ICM&MG Young Scientists Conference, Novosibirsk, 2003. P. 28–34 (in Russian).
2. *Burmistrov A. V., Mikhailov G.A.* Monte Carlo computation of derivatives of a solution to the stationary diffusion equation // *Comp. Math. Math. Phys.*, 2003. V. 43, No. 10. P. 1459–1471.
3. *Dynkin E.B.* Markov Processes. Academic Press, New York, 1965.
4. *Gobet E.* Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes // *Stoch. Proc. Appl.* 2000. V. 87. P. 167–197.
5. *Hammersley J.M., Morton K.W.* A new Monte Carlo technique: antithetic variates // *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1956. V. 52. P. 449–475.

Оценка опасности наводнений на основе данных мониторинга

Бурцев А. А.

*Отдел территориальной политики Сибирского регионального центра МЧС России,
Красноярск;*

burtsevandrey@mail.ru

Кириллова С. В.

Сибирский федеральный университет, Красноярск;

SVKirillova@rambler.ru

Симонов К. В.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск;

simonovkv@icm.krasn.ru

В работе предложена методика для оперативной оценки опасности наводнений основанная на сочетании методов логических решающих функций, метода экстремальных статистик и регрессионного анализа данных наблюдений.

Красноярский край и Сибирский федеральный округ в целом характеризуются высокой степенью паводковой опасности. По данным Центра мониторинга и прогнозирования чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера Сибирского регионального центра МЧС России только с 2001 по 2010 гг. на территории края зафиксировано 163 случая затопления жилых объектов, объектов промышленности и инфраструктуры. Наводнения происходили в 33-х муниципальных образованиях, 111 населенных пунктах, в результате них пострадало более 400 тыс. человек. Наиболее частыми причинами наводнений являются: бурное развитие весеннего половодья; заторные явления и аварии на гидротехнических сооружениях (ГТС).

Для своевременного выявления и реагирования на эти риски действует система мониторинга, лабораторного контроля и прогнозирования чрезвычайных ситуаций, основными задачами которой являются: заблаговременная оценка развития процесса половодья; оценка риска возникновения наводнений в течение заданного промежутка времени; определение вероятного времени между ЧС, обусловленными наводнениями; оперативная оценка опасности наводнений на основе анализа факторов, влияющих на развитие природного процесса; долгосрочный анализ рисков, ранжирование территории и выявление общей тенденции развития паводковых процессов.

В работе предложено решение этих задач на основе сочетания методов логических решающих функций, метода экстремальных статистик и регрессионного анализа данных наблюдений. Методической основой для решения указанных задач являются элементы технологии вычислительного эксперимента, который в последнее время получил широкое распространение в связи с развитием вычислительной техники. Вычислительный эксперимент (ВЭ) отличается многоцелевая направленность и методологическая универсальность. Под вычислительным экспериментом понимается создание и изучение математических моделей исследуемого процесса с помощью вычислительных средств, выделяя в качестве основы триаду «модель – алгоритм – программа». Вычислительный эксперимент позволяет на основе накопленной базы наблюдений, разработанных вычислительных алгоритмов и программного обеспечения эффективно решать задачи мониторинга, лабораторного контроля и прогнозирования ЧС. Кроме того, вычислительный эксперимент становится эффективным средством поддержки проведения натурного эксперимента.

В работе предлагается разработка методики для оперативной оценки опасности наводнений в рамках СМП ЧС с применением элементов технологии вычислительного эксперимента, включающая следующие основные компоненты:

– оперативные компоненты – оценка развития половодья в предстоящем году на основе определения года-аналога с помощью логических решающих функций и оценка паводковой опасности с помощью построения «критических поверхностей»;

– компоненты для долгосрочной оценки риска – оценка риска возникновения ЧС в течение заданного промежутка времени на основе теории экстремальных статистик, определение вероятного времени между ЧС с помощью комбинации распределения Эрланга и экспоненциального распределения максимальных уровней воды, а также ранжирование территории по степени паводковой опасности;

– компонента для оценки опасности наводнений в результате аварий на ГТС.

Оперативная оценка опасности наводнений на основе анализа физических факторов, влияющих на развитие природного процесса, проводится с помощью построения так называемых «критических поверхностей». «Критические поверхности» получаются из регрессионных моделей зависимости уровня воды от определяющих физических параметров и представляют собой функциональную зависимость трех выбранных параметров при фиксированных значениях остальных. Построение таких поверхностей помогает оперативно выявить опасные диапазоны изменения физических параметров, влияющих на развитие паводковых процессов. В зависимости от угла наклона поверхности к координатной оси определяется степень влияния физического параметра на развитие природного процесса. С помощью данного инструментария эффективно визуализируются решающие правила для системы поддержки принятия решений и управления рисками.

Оценка развития процесса половодья с помощью аппарата логических решающих функций проводится с помощью оперативного сопоставления физических параметров, определяющих уровень половодья в текущем году, с аналогичными параметрами прошлых лет, записанными в плоских таблицах (обучающей выборке). В результате находится год-аналог – год, для которого текущие значения физических параметров соответствуют более всего. В зависимости от выбора физических параметров решаются различные по масштабам задачи: от оценки опасности для целых гидрологических районов до оценки опасности для конкретных гидропостов. Целесообразность применения аппарата логических решающих функций определяется цикличностью процесса половодья во времени и его многомерностью: зависимостью от многих переменных как качественных, так и количественных.

Оценка риска возникновения наводнений в течение заданного промежутка времени производится с помощью построения модели, отражающей зависимость, превышения высоты воды H порогового уровня h в течение заданного промежутка времени T лет с помощью аппарата теории экстремальных статистик. Наводнения относятся к катастрофам, имеющим экспоненциальное распределение «существенного» параметра – высоты воды.

Функция распределения случайной величины H_i – высоты воды в i -й год, имеет вид:

$$F(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(h-k)}, & \text{при } h \geq k, \\ 0, & \text{при } h < k, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$. Поэтому согласно теоремам теории экстремальных статистик функция распределения $F(h)$ принадлежит области притяжения типа: $G(x) = \exp(-e^{-x})$, $-\infty < x < \infty$ [1], а константы a_T, b_T в сходимости $P(a_T(M_T - b_T) \leq x) \xrightarrow{w} G(x)$ имеют вид: $a_T = \lambda$, $b_T = \frac{\ln T}{\lambda} + k$. Здесь $M_T = \max(H_1, H_2, \dots, H_T)$, а символ \xrightarrow{w} означает сходимость в точках непрерывности предельной функции.

В этом случае соотношение для оценки риска превышения высоты воды H порогового уровня h в течение T лет имеет вид:

$$R_T(H > h) = P(M_T > h) = 1 - P(M_T \leq h) = 1 - P(a_T(M_T - b_T) \leq a_T(h - b_T)) \xrightarrow{w} \\ \xrightarrow{w} 1 - G(a_T(h - b_T)) = 1 - \exp(-e^{-a_T(h - b_T)}) = 1 - \exp(-T \cdot A \cdot e^{-Bh}),$$

где $A = e^{\lambda k}$, $B = \lambda$ определяются согласно статистическим данным наблюдений для конкретного гидропоста.

Определение вероятного времени между ЧС, обусловленными наводнениями, проводится, используя комбинацию распределения Эрланга и экспоненциального распределения, что позволяет точнее оценить опасность возникновения катастрофического наводнения. Использование в модели распределения Эрланга обусловлено тем, что к ЧС приводит не каждое возможное наводнение, поэтому простейший поток экстремальных природных явлений «прореживается» [2]. Время между ЧС оценивается с помощью соотношения:

$$T_{\text{ЧС}} = \frac{1}{\lambda \cdot q},$$

где λ – частота возникновения наводнений на определенной территории, q – частота возникновения ЧС, то есть тех наводнений, которые могут привести к ЧС. Параметры λ и q определяются, используя статистические данные наблюдений за уровнями воды.

Исследование повторяемости между ЧС с помощью функций распределения Эрланга и экспоненциального распределения показывает, что модель экспоненциального распределения дает верхнюю оценку опасности при малых промежутках времени между ЧС. Более опасной является ситуация при длительном сроке, для которого использование экспоненциального распределения занижает уровень опасности. Поэтому в этом случае целесообразно рассматривать распределение Эрланга.

Таким образом, используя в качестве модели оценки промежутков времени между ЧС сочетание распределения Эрланга и экспоненциального распределения, возможно получение верхней оценки опасности наводнений, более соответствующей эмпирическому распределению. Представленная модель позволяет точнее оценить опасность возникновения катастрофического наводнения в течение заданного промежутка времени и, следовательно, снизить ожидаемый ущерб.

Компонентом анализа пространственного распределения рисков является ранжирование территории по степени паводковой опасности и выявление общей тенденции развития паводковых процессов. Суть анализа заключается в определении показателей риска с помощью статистических данных. Основным показателем оценки риска и сравнения территории по степени опасности – значение индивидуального риска, которое рассчитывается по формуле:

$$R_i = \frac{Q_i}{T \cdot N_i},$$

где Q_i – количество случаев наводнений за период наблюдений, T – количество лет наблюдений, N_i – численность проживающего населения.

В результате выполнено ранжирование исследуемой территории по степени паводковой опасности, оценены риски в муниципальных районах, выявлены наиболее паводкоопасные населенные пункты и реки. На основе полученной информации построены тематические карты пространственного распределения рисков для исследуемой территории, с помощью которых планируется размещение элементов системы мониторинга паводковой опасности; развитие группировки сил и средств для ликвидации возможных ЧС; создание резервов финансовых и материальных средств и размещение мест их хранения; проводится комплекс мероприятий, направленных на снижение риска. Отметим, что проведение ранжирования требуется также для разработки схем территориального планирования, определения стратегий устойчивого развития территорий.

Важным компонентом разрабатываемой методики является оперативная оценка опасности наводнений при вероятных авариях на ГТС. Общая схема проведения исследований и получения оценки опасности включает: сбор исходных данных, расчет параметров волны прорыва, построение зоны затопления, расчет вероятного ущерба.

Расчеты проводятся на основе сценарного подхода и ГИС-технологий, особенностью предлагаемого подхода является применение различных расчетных схем оценки ущерба (детальной оценки или укрупненных показателей) в зависимости от степени детальности исходных данных.

Элементом информационного обеспечения методики является специализированная база данных, особенностями которой являются: распределенность ресурсов, направленность ее на использование в ГИС-технологиях и экспертных системах поддержки принятия решений. По модели представления информации база данных является реляционной, состоящей из связанных двумерных таблиц, главными из которых являются: таблица гидропостов; гидрологических уровней; метеоусловий; объектов, попадающих в зону наводнения; ГТС; сил и средств для реагирования на ЧС; таблица случаев наводнений; физических параметров перед началом половодья.

Предлагается «трехзвенная» архитектура СУБД: сервер баз данных – сервер приложений – клиент. Такая архитектура позволит переложить всю функциональность программы с машины клиента на отдельную машину (сервер приложений), оставив клиенту только интерфейсную часть, что разгрузит клиента и сервер баз данных от вычислений. При большом количестве пользователей можно использовать несколько серверов приложений. Для распределения нагрузки возможно кэширование на сервере приложений часто используемых таблиц для ускорения доступа к ним. В качестве сервера для управления базой данных предлагается программный продукт Microsoft SQL Server.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 449 с.
2. Акимов В.А., Лесных В.В., Радаев Н.Н. Основы анализа и управления риском в природных и техногенной сферах. М.: ЗАО ФИД «Деловой экспресс», 2004. 352 с.

Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатур

Васкевич В. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; vask@math.nsc.ru

В докладе рассматриваются вопросы, связанные с представлением в различных формах погрешности кубатурных формул на многомерной единичной сфере. В качестве числа обусловленности конкретной кубатурной формулы предлагается эффективно вычисляемый параметр, даются его явные оценки сверху. На основе комбинирования полученных представлений погрешности формулы на классах типа пространств Соболева на сфере и введенного числа обусловленности проводится оценка погрешности реализации формулы в арифметике с конечной точностью.

Теория и приложения дискретно-стохастических численных методов: новые результаты

Войтишек А. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск; vav@osmf.sccc.ru

Введение. С развитием вычислительной техники возрастает интерес к численным методам решения прикладных задач, в частности к статистическому моделированию (или

методу Монте-Карло; см., например, [1]). Традиционно методы Монте-Карло рассматриваются в качестве альтернативных «детерминированным» численным методам (в частности, конечно-разностным и конечно-элементным схемам). Однако во многих случаях эффективными оказываются смешанные алгоритмы, содержащие в себе элементы детерминированных и стохастических численных схем. Такие комбинированные алгоритмы можно назвать *дискретно-стохастическими численными методами* (см. разд. 5.3 в работе [1]).

Следует сразу отметить, что спектр дискретно-стохастических алгоритмов достаточно широк. Комбинированные численные методы возникают во всех основных разделах теории численного статистического моделирования, к которым следует отнести: численную реализацию выборочных значений и траекторий случайных величин, векторов и функций; вычисление многократных интегралов; функциональные оценки метода Монте-Карло; приложения, связанные с решением задач вычислительной математики и математической физики [1]. Заметим, что под термин «дискретно-стохастические численные методы» подходят также алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, динамико-вероятностные модели окружающей среды, вероятностные клеточные автоматы, рандомизированные сеточные алгоритмы и многое другое.

В данной работе сделан обзор результатов исследований дискретно-стохастических методов, проводимых в последнее время в отделе статистического моделирования в физике Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН (г. Новосибирск).

1. «Моделируемые» базисы и вероятностные распределения. В настоящее время широкое применение находят алгоритмы и пакеты программ, в которых реализуются множества точек, распределенных в сложных областях согласно заданной плотности распределения. К таким задачам относятся, в частности, проблемы визуализации объектов на ЭВМ, построения адаптивных сеток и др. В работах [2, 3] представлен программный модуль *AITricks GeomRandom*, в котором использован ряд принципиальных соображений по оптимизации соответствующих алгоритмов численного моделирования. В частности, существенным является то обстоятельство, что при применении кусочно-полиномиальных аппроксимаций функции плотности $g(\mathbf{x})$ вида

$$f(\mathbf{x}) = HL_M g(\mathbf{x}); \quad L_M g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(\mathbf{g}) \chi_i(\mathbf{x}); \quad H = \frac{1}{\int L_M g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (1)$$

(здесь $\{w_i(\mathbf{g})\}$ – коэффициенты, связанные со значениями $\mathbf{g} = (g(\mathbf{x}_1), \dots, g(\mathbf{x}_M))$ в узлах сетки $\{\mathbf{x}_i\}$, а $\{\chi_i(\mathbf{x})\}$ – базисные функции) для больших M возможна реализация эффективных модификаций соответствующего метода суперпозиции (квантильного метода, метода Уолкера и др. – см., например, [1]). Кроме того, существенным здесь является подбор соответствующего аппроксимационного базиса, который кроме обычных свойств аппроксимации и устойчивости должен обладать свойством «*моделируемости*». Последнее означает, что функции $\{\chi_i(\mathbf{x})\}$ из соотношения (1) должны быть пропорциональны вероятностным плотностям, для которых существуют эффективные алгоритмы численной реализации выборочных значений. В работе [4] показано, что хорошими свойствами моделируемости обладает многомерный конечно-элементный базис Стренга–Фикса (терминология из книги [5]). Интересной видится возможность (пока не изученная) использования в приближениях вида (1) вейвлетовых методов.

Во многих ситуациях для более «быстрого» получения выборочных значений случайно распределенных точек вместо приближения плотности целесообразно выбирать *моделируемые вероятностные распределения*, допускающие построение эффективных алгоритмов численного моделирования (эта возможность также предусмотрена в программном модуле *AITricks GeomRandom* [3]). В работе [2] представлены соответствующие соображения по «искусственному» конструированию вероятностных распределений, допускающих

эффективное моделирование методами: обратной функции распределения, моделирования двумерного случайного вектора с зависимыми компонентами, интегральной и дискретной суперпозиции, исключения. Это является, в частности, основой создания «банка» моделируемых вероятностных распределений с целью использования его при построении эффективных алгоритмов численного статистического моделирования. В качестве одного из примеров применения представленных технологий в работе [2] рассмотрен итерационный дискретно-стохастический алгоритм построения адаптивных сеток (см. [6, 7], а также доклад данной конференции [8]).

2. Дискретно-стохастические алгоритмы численного интегрирования. Для приближенного вычисления интегралов малых размерностей с гладкими (в обычном или обобщенном смысле) подынтегральными функциями и относительно простыми областями интегрирования развита теория *кубатурных формул* (см., например, [9]). К недостаткам «классических» (детерминированных) кубатурных формул на классах подынтегральных функций следует отнести: слабый учет специфики той или иной подынтегральной функции, необходимость разработки специальных численных алгоритмов поиска оптимальных весов и (или) узлов, чувствительность к росту размерности и гладкости начальных данных (подынтегральной функции и области интегрирования), трудности в построении показательных тестовых численных примеров и контроля точности и затрат при практических вычислениях. Для существенно многомерных задач достаточно эффективным оказывается *стандартный метод Монте-Карло* (см., например, [1]). Главным недостатком метода Монте-Карло является относительно низкая скорость сходимости погрешности к нулю при возрастании числа случайных узлов.

В работах [10, 11] показано, что весьма эффективными могут оказаться и смешанные, *комбинированные процедуры численного интегрирования*, сочетающие в себе элементы кубатурных формул и метода Монте-Карло. По-видимому, одна из первых численных схем подобного рода была представлена Н. С. Бахваловым в начале шестидесятых годов прошлого века (см. работу [12], а также доклад [13] данной конференции). Этот алгоритм можно трактовать как предельный случай *выборки по группам*. Кроме этой конструкции в работах [10, 11] рассмотрены *дискретно-стохастические версии выборки по важности, выделения главной части, метода интегрирования по части области, метода сложной многомерной симметризации, метода равномерной выборки, метода с поправочным множителем, геометрического метода* и др. Все эти приемы позволяют в ряде случаев существенно понизить трудоемкость стандартного алгоритма метода Монте-Карло.

3. Функциональные алгоритмы метода Монте-Карло. В последние два десятилетия активно развивается (в основном в отделе статистического моделирования в физике ИВМиМГ СО РАН) теория приближения функций, заданных в интегральной форме, а также ее приложения. Основным объектом изучения является решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода, отражающее распределение состояний важных модельных марковских процессов. Дискретно-стохастический алгоритм приближения решения включает введение сетки по параметру, оценку значений функции в узлах методом Монте-Карло и восполнение решения по полученным значениям в узлах с использованием аппроксимационного базиса. Соответствующий базис должен обладать хорошими свойствами устойчивости (этими свойствами обладают, в частности, базисные функции Стренга–Фикса [1, 4, 5, 14]).

При изучении сходимости дискретно-стохастических численных алгоритмов приближения функций важным является вопрос о выборе функциональной меры и вероятностного смысла сходимости к нулю погрешности метода. Следуя традициям классического численного анализа (см., например, [9]), здесь разумно использовать L_2 - и C -метрику для погрешности и сходимость в среднем и по вероятности соответственно (см., например, [1, 14]). Для этих подходов к оценке погрешности удается разложить погрешность на «детерминирован-

ную» и «стохастическую» компоненты, первая из которых оценивается сверху с помощью соответствующих аппроксимационных теорем [5], а вторая сводится к оценке максимума случайных погрешностей в узлах сетки.

Далее следует учесть, какие стохастические оценки метода Монте-Карло (независимые, зависимые, слабо зависимые и т.д.) используются в узлах сетки. Для независимых оценок при построении верхней границы для максимума случайных погрешностей в узлах сетки используется теория порядковых статистик. Для оценок по методу зависимых испытаний требуется использование специальной теории слабой (функциональной) сходимости последовательностей случайных функций [1, 14].

Полученные верхние границы погрешности $T(M, n)$ используются затем для определения *условно-оптимальных параметров* – числа M_{opt} узлов используемой сетки и числа n_{opt} реализаций стохастических оценок в узлах. Здесь из уравнения $T(M, n) = \delta$ (здесь δ – требуемый уровень погрешности) один из параметров (например, число узлов M) выражается через другой (через число испытаний n) и подставляется в выражение $S(M, n)$, характеризующее трудоемкость (затраты) функционального алгоритма. Получаемая функция одного переменного исследуется на минимум. Точка минимума дает выражение для соответствующего условно-оптимального параметра (см., например, [1, 14]).

Применение описанной здесь общей схемы построения и исследования функциональных алгоритмов встречает специфические трудности для тех или иных прикладных задач. Для целого ряда важных приложений эти трудности преодолены в работах Е. В. Шкарупа. Ему, в частности, подробно исследованы функциональные алгоритмы для решения уравнения Больцмана [15, 16] и ряда краевых задач математической физики [17, 18].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09–01–00035, 10–01–00040, 11–01–12030).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006.
2. Бессмельцев М. В., Войтишек А. В. Модификации геометрических программных модулей, связанные с построением моделируемых вероятностных плотностей // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 4.
3. <http://aitricks.com/products/geomrandom/>
4. Voytishchek A. V., Kablukova E. G. Using the approximation functional bases in Monte Carlo methods // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2003. V. 18, № 6. P. 521–542.
5. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
6. Нечаева О. И. Нейросетевые модели, алгоритмы и комплекс программ для построения адаптивных сеток // Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: НГУ, 2007.
7. Kohonen T. Self-Organizing Maps. Springer-Verlag, 2001.
8. Войтишек А. В., Малицкая Н. С., Сидорова Т. В. Исследование эффекта упорядочения узлов в одномерном дискретно-стохастическом алгоритме построения адаптивных сеток // Данный сборник. С. 41–44.
9. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
10. Войтишек А. В. Дискретно-стохастические модификации стандартного метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.
11. Каблукова Е. Г. Адаптивные дискретно-стохастические алгоритмы численного интегрирования // Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: ИВМиМГ

СО РАН, 2009.

12. Бахвалов Н. С. Об оптимальных оценках скорости сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 5–63.

13. Войтишек А. В. Оптимальные дискретно-стохастические кубатурные формулы // Данный сборник. С. 37–41.

14. Войтишек А. В. Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.

15. Plotnikov M. Yu., Shkarupa E. V. Construction of an upper error bound and optimization of the test particle method // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2008. V. 23, № 3. P. 251–264.

16. Plotnikov M. Yu., Shkarupa E. V. Some approaches to error analysis and optimization of the DSMC method // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2010. V. 25, 2. P. 147–167.

17. Шкарупа Е. В. Оценка погрешности и оптимизация функциональных алгоритмов блуждания по решетке решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44, № 5. С. 1163–1182.

18. Makarov R. N., Shkarupa E. V. Stochastic algorithms with Hermit cubic spline interpolation for global estimation of solutions of boundary value problems // SIAM Journal of Scientific Computing. 2008. V. 30, № 1. P. 169–188.

Оптимальные дискретно-стохастические кубатурные формулы

Войтишек А. В.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; vav@osmf.sccc.ru*

1. Введение. В обзорном докладе [1] данной конференции описаны ситуации эффективного применения *дискретно-стохастических численных алгоритмов*, сочетающих в себе элементы сеточных схем и методов Монте-Карло. Упомянуты, в том числе, комбинированные алгоритмы численного интегрирования, в частности, дискретно-стохастические версии выборки по важности, выделения главной части, метода интегрирования по части области, метода сложной многомерной симметризации, метода равномерной выборки, метода с поправочным множителем, геометрического метода и др. (более подробно эти конструкции описаны в работах [2, 3]). В данном докладе проводится анализ алгоритмов из работы [4], которые можно трактовать как *дискретно-стохастическую версию выборки по группам*. Здесь удастся получить оптимальные по порядку погрешности на классах гладких функций.

2. Алгоритмы Н. С. Бахвалова. Рассмотрим задачу интегрирования по единичному d -мерному кубу

$$I = \int_{Q_d} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) dx^{(1)} \dots dx^{(d)}. \quad (1)$$

Разобьем исходную область интегрирования на равные кубы

$$X_m = \{\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) : (j_m^{(i)} - 1)/\mu \leq x^{(i)} \leq j_m^{(i)}/\mu\}; \quad (2)$$

здесь $i = 1, \dots, d$; $j_m^{(i)} = 1, \dots, \mu$; $m = 1, \dots, n$; $n = \mu^d$.

АЛГОРИТМ 1 [4]. Реализуем по одной равномерно распределенной случайной точке ξ_m в каждом кубе X_m вида (2) и вычисляем приближение интеграла (1) согласно формуле

$$I \approx \bar{\theta}_n = \frac{1}{\mu^d} \sum_{j_m^{(1)}, \dots, j_m^{(d)}=1}^{\mu} g(\xi_m) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g(\xi_m). \quad (3)$$

Рассмотрим также стандартный алгоритм метода Монте-Карло (см., например, [5]):

$$I \approx \bar{\zeta}_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g(\hat{\xi}_m), \quad (4)$$

где точки $\{\hat{\xi}_m\}$ равномерно распределены во всем кубе Q_d . Несложно показать (см., например, [2, 5]), что для дисперсий оценок (3) и (4) выполнено неравенство $\mathbf{D}\bar{\theta}_n^{(M)} \leq \mathbf{D}\bar{\zeta}_n$.

Рассмотрим класс $C^{\mathbf{r}}(\mathbf{L}; Q_d) = C^{(r^{(1)}, \dots, r^{(d)})}(L^{(1)}, \dots, L^{(d)}; Q_d)$ функций d переменных, у которых $(r^{(s)} - 1)$ -е производные по s -ой координате непрерывны, а $r^{(s)}$ -е производные кусочно-непрерывны и ограничены по модулю константой $L^{(s)}$ в кубе Q_d для $s = 1, \dots, d$. Предположим, что $g(\mathbf{x}) \in C^{(1, \dots, 1)}(L, \dots, L; Q_d)$ (это означает, в частности, что $g(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица с константой L по каждой из переменных).

Для выборочной дисперсии оценки (3) выполнено соотношение

$$\mathbf{D}\bar{\theta}_n = \sum_{m=1}^n \frac{\mathbf{D}(g(\xi_m))}{n^2} = \sum_{m=1}^n \frac{\mathbf{E}(g(\xi_m) - g_m)^2}{n^2}, \quad \text{где } g_m = \mathbf{E}g(\xi_m) = \mu^d \int_{X_m} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Из теоремы о среднем следует, что для каждого m найдется точка $\mathbf{x}_m \in X_m$ такая, что $\int_{X_m} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = g(\mathbf{x}_m)/\mu^d$. Следовательно, $g_m = g(\mathbf{x}_m)$. Для приращений $\Delta^{(i)}$, $i = 1, \dots, d$ с учетом того, что $g(\mathbf{x}) \in C^{(1, \dots, 1)}(L, \dots, L; Q_d)$, имеем

$$|g(x^{(1)} + \Delta^{(1)}, \dots, x^{(d)} + \Delta^{(d)}) - g(x^{(1)}, \dots, x^{(d)})| \leq L(|\Delta^{(1)}| + \dots + |\Delta^{(d)}|).$$

Так как точка ξ_m принадлежит X_m , то каждая из ее координат отличается от соответствующей координаты точки \mathbf{x}_m не более чем на μ^{-1} . Поэтому из последнего неравенства, с учетом соотношения $\Delta^{(i)} < \mu^{-1}$, имеем

$$|g(\xi_m) - g(\mathbf{x}_m)| \leq Ld\mu^{-1} \quad \text{или} \quad |g(\xi_m) - g_m| \leq Ld\mu^{-1}. \quad (6)$$

Используя очевидное неравенство $|\int_Y z(\mathbf{y}) d\mathbf{y}| \leq \sup_{\mathbf{y} \in Y} |z(\mathbf{y})| \times \text{mes } Y$, из соотношений (5), (6) получаем

$$\mathbf{D}\bar{\theta}_n \leq \sum_{m=1}^n \frac{\sup_{\mathbf{y}_m \in X_m} (g(\mathbf{y}_m) - g_m)^2}{n^2} \leq \sum_{m=1}^n \frac{(Ld\mu^{-1})^2}{n^2} = n n^{-2} L^2 d^2 n^{-2/d} = \frac{L^2 d^2}{n^{1+2/d}}.$$

Отсюда следует, что для погрешности $\delta_n^{(\theta)} = |I - \bar{\theta}_n|$ можно построить доверительный интервал вида

$$\mathbf{P} \left(\delta_n^{(\theta)} \leq H_\varepsilon \frac{\sigma^{(\theta)}}{\sqrt{n}} \leq H_\varepsilon \frac{Ld}{n^{1/2+1/d}} \right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Здесь $H_\varepsilon = \text{const}$ и $\sigma^{(\theta)} = \sqrt{n \mathbf{D}\bar{\theta}_n}$, причем справедливо неравенство $\sigma^{(\theta)} \leq Ld/n^{1/d}$. Полученный порядок $t = 1/2 + 1/d$ является для погрешности $\tilde{\delta}_n^{(M)} \sim n^{-t}$ неулучшаемым. Это

дает следующее утверждение. Обозначим через Ξ_n произвольную кубатурную формулу, использующую значения подынтегральной функции $g(\mathbf{x})$ в n узлах $\{\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n\}$ – случайных или фиксированных (приближения (3) и (4) являются частными примерами формулы Ξ_n).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [4]. *Существуют положительные константы $H(\mathbf{r}, \mathbf{L})$ и P , удовлетворяющие следующему соотношению. Для любого натурального n и любой формулы Ξ_n найдется функция $g(\mathbf{x}) \in C^r(\mathbf{L}; Q_d)$, для которой*

$$\delta_n^{(\Xi)}(\mathbf{r}, \mathbf{L}) = |\Xi_n - I| > \frac{H(\mathbf{r}, \mathbf{L})}{n^{r+1/2}} \quad (7)$$

с вероятностью P ; здесь $1/r = 1/r^{(1)} + \dots + 1/r^{(d)}$.

Для рассматриваемого нами множества функций имеем $\mathbf{r} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{L} = (L, \dots, L)$ и $r = 1/d$. Следовательно, согласно соотношению (7) для класса $C^{(1, \dots, 1)}(L, \dots, L; Q_d)$ получаем $\delta_n^{(\theta)} > \tilde{H}/n^{1/2+1/d}$. Таким образом, для оценки (3) нашлись константы $H_1(P)$ и $H_2(P)$, для которых с заданной вероятностью P выполнено двойное неравенство $H_1(P)/n^{1/2+1/d} < \delta_n^{(\theta)} \leq H_2(P)/n^{1/2+1/d}$, что означает оптимальность алгоритма 1 по порядку t вероятностной погрешности $\delta_n^{(\theta)} \sim n^{-t}$.

Аналогичным образом можно показать, что если подынтегральная функция $g(\mathbf{x})$ принадлежит классу $C^2(L, Q_d) \subset C^{(2, \dots, 2)}(L, \dots, L; Q_d)$ функций, имеющих непрерывные смешанные производные второго порядка, ограниченные в совокупности общей константой L , то оптимальный порядок $t = 1/2 + 2/d$ дает следующая кубатурная формула.

АЛГОРИТМ 2 [4]. *Реализуем по одной случайной точке ξ_m в каждом кубе X_m вида (2). Строим точку $\xi_{m, sim}$, симметричную ξ_m относительно центра куба X_m . Вычисляем приближение интеграла (1) согласно формуле*

$$I \approx \bar{\Theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n/2} (g(\xi_m) + g(\xi_{m, sim})). \quad (8)$$

Заметим, что алгоритмы 1 и 2 допускают несколько названий. Во-первых, это частные случаи *алгоритма расслоенной выборки* (см., например, [5]), для которых число испытаний n либо равно числу M подмножеств (2), либо $n = 2M$ соответственно. Во-вторых, в связи с наличием «сеточного» разбиения области интегрирования X на малые кубы X_m вида (2) и выбора одной или двух случайных точек в каждом малом кубе можно отнести алгоритмы 1 и 2 к *дискретно-стохастическим алгоритмам численного интегрирования* [2]. В-третьих, алгоритмы 1 и 2 являются частными случаями *случайных кубатурных формул* (см., например, [5]). Отметим, что представленные здесь результаты из работы [4] вызвали большой научный резонанс и привели к бурному развитию (главным образом, в западноевропейских научных школах) *теории сложности численных алгоритмов* [6]. Классической задачей в этой теории является следующая: *при фиксированном числе операций n определить максимальный порядок t погрешности $\delta_n \sim n^{-t}$ (в обычном или вероятностном смысле) заданного класса вычислительных алгоритмов*. Алгоритмы численного интегрирования являются наиболее удачными иллюстрациями конструкций и методик теории сложности.

3. О трудоемкости алгоритмов Н. С. Бахвалова. На самом деле, максимальные порядки t по n погрешностей δ_n рассмотренных выше алгоритмов 1 и 2 не гарантируют того, что кубатурные формулы (2) и (8) действительно являются *оптимальными* (т. е. дающими заданный уровень погрешности за минимальное время) из-за необходимости получения случайных точек ξ_m в подмножествах X_m вида (2); это требует осуществления многократных обращений к датчику стандартных случайных чисел α_i , равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$. Как известно (см., например, [5]), при использовании широко распространенных датчиков, основанных на методе вычетов, получение α_i является достаточно

«дорогостоящей» компьютерной операцией. Описанные затруднения проявляются более заметно с ростом кратности d интеграла (1).

Нами было проведено численное сравнительное исследование алгоритмов 1 и 2 с точки зрения их трудоемкости при получении заданного уровня погрешности. Формулы (3) и (8) сравнивались как с «детерминированными» численными схемами (типа формулы прямоугольников, для которой значения подынтегральной функции вычислялись в центральных точках кубов X_m), так и с простейшим методом Монте-Карло (4). Рассматривалась также специальная модификация алгоритма (4) – *дискретно-стохастическая версия выборки по важности* [2, 3]. При проведении численных экспериментов использовалась *стохастическая тестовая система* [7], основанная на использовании модельных траекторий случайных полей.

На основе численных экспериментов (частично представленных в работе [3]) можно сформулировать следующие выводы.

1. Для размерностей $d < 5$ вычисление интегралов с помощью оптимальных алгоритмов 1 и 2 от всех тестовых функций более экономично.

2. При вычислении интегралов от достаточно «гладких» функций из стохастической системы функций и размерностей $d \leq 7$ время работы дискретно-стохастической версии выборки по важности сравнимо с затратами алгоритмов 1 и 2. Но для больших размерностей интеграла и функций малой гладкости этот метод малоэффективен.

3. При вычислении интегралов высокой размерности ($d \geq 6$) трудоемкость простейшего метода Монте-Карло (4) не превосходит трудоемкости «оптимальных» алгоритмов 1 и 2.

4. Трудоемкость алгоритмов 1 и 2 во всех случаях не превосходит трудоемкости метода прямоугольников. При небольших размерностях интеграла метод прямоугольников эффективнее простейшего метода Монте-Карло (4).

Таким образом, смешанные дискретно-стохастические численные схемы (алгоритм выборки по важности, алгоритмы 1 и 2) могут быть эффективными для «промежуточных» размерностей ($d = 3 - 9$). Для малых размерностей и гладких подынтегральных функций неплохо работают простейшие кубатурные формулы (вплоть до формулы прямоугольников). В ходе численных экспериментов нами было также установлено, что методы Бахвалова (алгоритмы 1 и 2), предложенные им для пространств функций $C^{(1, \dots, 1)}(L, \dots, L; Q_d)$ и $C^2(L; Q_d)$, можно применять и для кусочно-непрерывных функций с кусочно-непрерывными производными.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00035, 10-01-00040, 11-01-12030).

ЛИТЕРАТУРА

1. Войтишек А. В. Теория и приложения дискретно-стохастических численных методов: новые результаты // Данный сборник. С. 33–37.
2. Войтишек А. В. Дискретно-стохастические модификации стандартного метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.
3. Каблукова Е. Г. Адаптивные дискретно-стохастические алгоритмы численного интегрирования // Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2009.
4. Бахвалов Н. С. Об оптимальных оценках скорости сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 5–63.

5. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006.

6. Traub J. F., Wasilkowski G. W. and Wozniakowski H. Information-based Complexity. New York: Academic Press, 1988.

7. Войтишек А. В., Каблукова Е. Г., Булгакова Т. Е. Использование спектральных моделей случайных полей при исследовании алгоритмов численного интегрирования // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9, специальный выпуск. С. 50–61.

Исследование эффекта упорядочения узлов в одномерном дискретно-стохастическом алгоритме построения адаптивных сеток

Войтишек А. В., Малицкая Н. С., Сидорова Т. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; Сибирский федеральный университет, Красноярск; vav@osmf.sccc.ru

Введение. В обзорном докладе [1] данной конференции описаны ситуации эффективного применения *дискретно-стохастических численных алгоритмов*, сочетающих в себе элементы сеточных схем и методов Монте-Карло. Упомянуты, в том числе, рандомизированные сеточные методы, в частности, алгоритмы построения адаптивных сеток.

Проблема реализации адаптивных сеток на сложных многомерных компактных областях $X \subset R_X^d$ является весьма актуальной [2–4]. Использование адаптивных сеток в задачах численного моделирования позволяет повысить точность приближенного решения задачи без существенного увеличения числа узлов. «Сгущения» узлов (т. е. их распределение согласно заданной плотности $f(\mathbf{x})$) часто требуются в подобластях, где либо само решение, либо его градиент принимают большие значения. Кроме того, важные приложения адаптивных сеток (такие, как обработка изображений, визуализация данных и т. п.) связаны с учетом сложной геометрии трехмерных областей и их поверхностей.

Среди всех видов методов построения сеток можно выделить важный класс, в котором адаптивные сетки получаются в результате отображения некоторой «вычислительной» области $Q \subset R_Q^k$ на «физическую» область X . К указанному классу относятся: метод эквираспределения [2], метод Томпсона, эллиптические методы и др. Эти методы, а также алгебраические методы и метод конформных отображений, требуют решения сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (при этом приходится накладывать довольно жесткие условия гладкости на граничные и начальные условия, а также на способы задания области) – см. соответствующий обзор в работе [3]. При применении разностных схем для решения краевых задач математической физики определенную проблему представляет собой выбор функции плотности узлов $f(\mathbf{x})$. Еще один недостаток перечисленных методов рассматриваемого класса связан с трудностями автоматизации и распараллеливания соответствующих численных схем.

Преодолеть указанные недостатки позволяет подход, предложенный в работе [3] и подразумевающий использование стохастических нейросетевых моделей самоорганизации, таких как самоорганизующиеся карты Т. Кохонена (*Self-Organizing Maps – SOM*), растущий нейронный газ (*Growing Neural Gas – GNG*), растущие клеточные структуры (*Growing Cell Structures – GCS*) [4]. Однако и эти алгоритмы индуцируют ряд проблем при их реализации и исследовании.

Определенную трудность представляет собой аналитическое описание стохастических нейросетевых моделей. В данной работе проведен анализ возможностей такого описания для простейших алгоритмов типа *SOM*. В частности, представлен разработанный нами в работе [4] «рекуррентный» подход к аналитическому описанию усредненных «наиболее

вероятных» асимптотических положений узлов для простейшей версии этого алгоритма (используются упрощения из монографии Т. Кохонена [5]). Кроме того, в данной работе обсуждаются возможности применения аналитических рекуррентных подходов для описания явления упорядочения узлов в одномерном случае.

1. Основной дискретно-стохастический алгоритм. Опишем постановку задачи [3, 5]. В *физической области* X (или на ее поверхности G_X , или на некоторой кривой Γ) требуется построить сетку $X^{(M)} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$, распределение узлов которой соответствует заданной плотности $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R_X^d$. Структура этой сетки (порядок и структура расположения узлов) задается *картой* $Q^{(M)} = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_M\}$ и системой *нейронов* $E^{(M)} = \{e_1, \dots, e_M\}$ (где $e_i = (\mathbf{q}_i, \mathbf{x}_i)$), определяющих соответствие между сетками $X^{(M)}$ и $Q^{(M)}$.

Приближение нейронов осуществляется с помощью процедуры *самообучения*, представляющей собой итерационный процесс, основанный на последовательном формировании *обучающего множества* $\Xi^{(T)} = \{\xi_0(1), \dots, \xi_0(T)\}$ в виде выборки из вероятностного распределения случайного вектора ξ , имеющего плотность $f(\mathbf{x})$; здесь T – количество итераций, а $\xi_0(t) \in X$ (или $\xi_0(t) \in G_X$; $t = 1, \dots, T$). Кроме того, с помощью специальных *коэффициентов обучения* $\theta_{\mathbf{q}_i}(t, \mathbf{q}_i) \in [0, 1]$ на каждом шаге итерации устанавливаются *латеральные связи* между нейронами e_i и e_j . В результате получается последовательность сеток $X^{(M)}(t) = \{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_M(t)\}$; при этом требуется выполнение соотношения

$$X^{(M)} \approx \tilde{X}^{(M)} = \lim_{t \rightarrow \infty} X^{(M)}(t) \approx X^{(M)}(T). \quad (1)$$

Знаки приближенных равенств в соотношении (1) означают не только малость расстояний $\rho(\mathbf{x}_i(\infty), \mathbf{x}_i)$, $\rho(\mathbf{x}_i(\infty), \mathbf{x}_i(T))$ и $\rho(\mathbf{x}_i(T), \mathbf{x}_i)$, где $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + \dots + (x^{(d)} - y^{(d)})^2}$, $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$, $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(d)})$, но и воспроизведение (с хорошей точностью) требуемых свойств сетки $X^{(M)}$ (например, свойств прямоугольности, отсутствия граничного эффекта и др.) при реализации следующего итерационного процесса.

ОСНОВНОЙ АЛГОРИТМ [3, 5]. 1. Устанавливаются начальные положения узлов сетки $X^{(M)}(0) = \{\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_M(0)\}$.

2. На каждой итерации с номером $t = 1, \dots, T$ выполняются следующие действия:

а) выбирается очередной элемент $\xi_0(t)$ выборки $\Xi^{(T)}$;

б) вычисляются расстояния $\rho(\xi_0(t), \mathbf{x}_i(t-1))$ от точки $\xi_0(t)$ до всех узлов $\mathbf{x}_i(t-1)$ и выбирается ближайший к $\xi_0(t)$ узел $\mathbf{x}_m(t-1)$ в соответствии с условием: $m = \arg \min_{i=1, \dots, M} \rho(\xi_0(t), \mathbf{x}_i(t-1))$; такой узел $\mathbf{x}_m(t-1)$ называют **победителем**.

в) проводится корректировка положений всех узлов в соответствии с формулой:

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t-1) + \theta_{\mathbf{q}_m}(t, \mathbf{q}_i) (\xi_0(t) - \mathbf{x}_i(t-1)) \quad (2)$$

для всех $i = 1, \dots, M$.

На каждой итерации алгоритма узлы сетки сдвигаются к случайной точке $\xi_0(t)$. Поэтому в местах высокой концентрации элементов выборки постепенно скапливается все больше узлов, за счет чего достигаются сгущения сетки. В работе [3] показано, что при $T \rightarrow \infty$ основной алгоритм обеспечивает выполнение аналога принципа эквираспределения, т. е. получение требуемой плотности сетки, определяемой функцией $f(\mathbf{x})$.

2. Рекуррентные формулы для наиболее вероятных средних положений узлов. В работе [5] Т. Кохоненом была предпринята попытка аналитического описания положений узлов при итерациях основного алгоритма. Рассуждения проводились при следующих упрощающих предположениях:

– *одномерный случай*: $[a, b] = [0, 1]$, *упрощенный вид коэффициента обучения*:

$$\theta_{\mathbf{q}_m}(t, \mathbf{q}_i) \equiv \theta(t) \text{ для } i \in \{\max(1, m-1), m, \min(M, m+1)\} \text{ и } \theta_{\mathbf{q}_m}(t, \mathbf{q}_i) = 0 \text{ иначе,} \quad (3)$$

– предположение об упорядоченности начального распределения узлов, то есть выполнено

$$-\infty < a \leq x_1(0) \leq x_2(0) \leq \dots \leq x_M(0) \leq b \leq \infty, \quad (4)$$

– равномерное распределение для «узлов притяжения»,

– замена условных значений на «усредненные наиболее вероятные».

На основе этих упрощений и перехода к «непрерывному» случаю Т. Кохонену удалось получить систему дифференциальных уравнений для усредненных наиболее вероятных положений узлов сетки. В работе [5] сформулированы соображения о существовании и единственности решения этой системы, однако аналитических соотношений для решения системы получить не удалось.

В работе [4] нами был проведен критический анализ формализма Т. Кохонена и отмечено, что вместо перехода к дифференциальным уравнениям целесообразно осуществить непосредственное усреднение соотношения (2):

$$\mathbf{E}_{(t)} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{E}_{(t-1)} \mathbf{x}_i(t-1) + \mathbf{E}_{(t-1, \boldsymbol{\xi}(t))} \theta_{\mathbf{q}_m}(t, \mathbf{q}_i) (\boldsymbol{\xi}(t) - \mathbf{x}_i(t-1));$$

здесь индекс « $(t-1)$ » означает взятие математического ожидания по распределению набора сеток $\{X^{(M)}(0), X^{(M)}(1), \dots, X^{(M)}(t-1)\}$; добавление $\boldsymbol{\xi}(t)$ в этом индексе означает дополнительное усреднение по распределению с плотностью $f(\mathbf{x})$ на t -ом шаге алгоритма. Далее можно использовать сформулированные выше упрощения и можно получить точные значения усредненных наиболее вероятных положений узлов для $t = 1, 2, \dots$:

$$\langle x_i(t) \rangle = \langle x_i(t-1) \rangle + \theta(t) \left(E_i^{(\xi)}(t-1) - \langle x_i(t-1) \rangle \right) P_i^{(\xi)}(t-1), \quad (5)$$

где $P_i^{(\xi)}(t-1) = s_i^{(+)}(t-1) - s_i^{(-)}(t-1)$, $E_i^{(\xi)}(t-1) = (s_i^{(+)}(t-1) + s_i^{(-)}(t-1))/2$, а $s_i^{(-)}(t-1)$ и $s_i^{(+)}(t-1)$ – это левый и правый концы отрезка $S_i(t-1)$, определяемого соотношением

$$\begin{cases} S_i(\tilde{t}) = [\frac{1}{2}(\langle x_{i-2}(\tilde{t}) \rangle + \langle x_{i-1}(\tilde{t}) \rangle), \frac{1}{2}(\langle x_{i+1}(\tilde{t}) \rangle + \langle x_{i+2}(\tilde{t}) \rangle)], & 3 \leq i \leq M-2; \\ S_1(\tilde{t}) = [a, \frac{1}{2}(\langle x_2(\tilde{t}) \rangle + \langle x_3(\tilde{t}) \rangle)], \\ S_2(\tilde{t}) = [a, \frac{1}{2}(\langle x_3(\tilde{t}) \rangle + \langle x_4(\tilde{t}) \rangle)], \\ S_{M-1}(\tilde{t}) = [\frac{1}{2}(\langle x_{M-3}(\tilde{t}) \rangle + \langle x_{M-2}(\tilde{t}) \rangle), b], \\ S_M(\tilde{t}) = [\frac{1}{2}(\langle x_{M-2}(\tilde{t}) \rangle + \langle x_{M-1}(\tilde{t}) \rangle), b]. \end{cases}$$

Подтверждением точности полученных усредненных значений положений узлов явились проведенные нами в работе [4] расчеты по методу Монте-Карло. В работе [4] также показано, что при увеличении числа испытаний n проявляется сходимость монтекарловских приближений математических ожиданий (5) для алгоритма со скоростью порядка H/\sqrt{n} . Это обстоятельство является численным подтверждением правильности соотношений (5). Кроме того, в работе [4] было проведено исследование дисперсий положений узлов, которые (по аналогии с соотношениями (5)) могут быть вычислены аналитически. Таким образом, использование «рекуррентного» подхода (5) позволяет получить соотношения, являющиеся основой содержательных аналитических исследований основного алгоритма, заменяющих многочисленные реализации этого алгоритма с последующим усреднением положений узлов.

3. Изучение эффекта упорядочения узлов. Дальнейшее развитие рекуррентного аналитического подхода из [4] может быть связано, в том числе, со снятием упрощений Т. Кохонена, перечисленных в предыдущем пункте. В частности, для преодоления т. н. «граничного эффекта» (когда адаптивная сетка, реализуемая с помощью основного алгоритма, растягиваясь по физической области, не достигает ее границ) целесообразно выбирать коэффициент обучения более сложного (по сравнению с соотношением (3)) вида [3]. При этом

в рекуррентных формулах вида (5) правые части становятся более громоздкими (включающими суммы по всем узлам, а не только по соседним), оставаясь, тем не менее, вполне пригодными для расчетов.

Более существенными могут быть трудности построения аналитических формул для случая, когда не выполняется предположение (4). В книге [5] сформулировано (без доказательства) утверждение о том, что для $\theta(t) \equiv \text{const}$ при любом начальном положении узлов происходит упорядочение значений $\{x_i(t); i = 1, \dots, M\}$. Этот факт, по-видимому, можно доказать индукцией по M , выписывая аналоги соотношения (5). На данный момент этот факт проверен лишь численно, причем замечено, что упорядочение происходит тем быстрее, чем ближе константа θ к единице.

Определенная проблема состоит в том, что практическое использование описанного выше основного алгоритма предполагает реализацию «умеренного» числа итераций T , а для сходимости этих итераций требуется стремление функции $\theta(t)$ к нулю. Легко убедиться в том, что если это стремление к нулю слишком быстрое, то упорядочения узлов не происходит. Таким образом, правильный подбор коэффициента обучения $\theta_{\mathbf{q}_m}(t, \mathbf{q}_i)$, обеспечивающего одновременно упорядочение узлов и сходимость алгоритма, является достаточно непростой задачей [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09–01–00035, 10–01–00040, 11–01–12030).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войтшишек А. В.* Теория и приложения дискретно-стохастических численных методов: новые результаты // Данный сборник. С. 33–37.
2. *Хакимзянов Г. С., Шожин Ю. И., Барзахтин В. Б., Шокина Н. Ю.* Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: изд-во СО РАН. 2001.
3. *Нечаева О. И.* Нейросетевые модели, алгоритмы и комплекс программ для построения адаптивных сетей // Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: НГУ, 2007.
4. *Войтшишек А. В., Хмель Д. С.* Аналитическое описание применения одномерной схемы Т. Кохонена для построения адаптивных сетей // Сибирский журнал вычислительной математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 131–140.
5. *Kohonen T.* Self-Organizing Maps. Springer-Verlag, 2001.

Группы целочисленных автоморфизмов совершенных форм от восьми переменных

Гуломов О. Х., Шодиев С. Ю.

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан; otabek10@mail.ru

Пусть

$$f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

положительно-определенная квадратичная форма от n переменных ($n \geq 2$) (п.к.ф.) с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$), матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$, определителем $d = d(f) = \det(a_{ij}) > 0$, арифметическим минимумом $m = m(f)$ и представлениями минимума $\pm m_k = \pm(m_{ik}, \dots, m_{nk})$ ($k = 1, \dots, s$; $s = s(f)$), то есть $m(f) = f(\pm m_1) = \dots = f(\pm m_s)$.

Говорят, что п.к.ф. f является совершенной формой (с.ф.) Вороного, если системой линейных уравнений

$$\sum_{I \leq i, j \leq n} a_{ij} m_{ik} m_{jk} = m \quad (k = 1, \dots, s) \quad (2)$$

коэффициенты a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) формы f определяются однозначно. Так как система (2) однозначно определяет $N = \frac{n(n+1)}{2}$ неизвестных коэффициентов (a_{ij}), то $\frac{n(n+1)}{2} \leq s \leq 2^n - 1$ для любой совершенной формы.

Две п.к.ф. $f_1(x)$ и $f_2(y)$, называются целочисленно эквивалентными, если существует целочисленная унимодулярная преобразование, $x = yU$ переводящее форму $f_1(x)$ в $f_2(y)$, то есть $f_1(yU) = f_2(y)$. Здесь $\det(U) = \pm 1$ и элементы u_{ij} матрицы целые числа. Отсюда, в частности, в случае $f_1 = f_2 = fU$ называется целочисленным автоморфизмом формы, то есть $f(yU) = f(y)$.

Относительно операции умножения целочисленных унимодулярных матриц $n \times n$ совокупность целочисленных автоморфизмов данной п.к.ф. f составляет группу и она конечная. Мы эту группу будем обозначать через $Aut(f)$.

В работе [2] разработан алгоритм для вычисления $Aut(f)$ для с.ф. f от n переменных. Идея алгоритма [2] заключается в следующем. Прямоугольная $(s * n)$ матрица всех представлений минимума п.к.ф. f называется минимальной матрицей формы f и обозначается через $M = M(f)$, а миноры n -го порядка этой матрицы называются минимальными определителями формы f . Минимальный определитель, абсолютная величина которого равна 1, называется базисным определителем формы f , а соответствующая матрица называется базисной подматрицей минимальной матрицы или базисной матрицей ([3],[2]). В решетке, отвечающей п.к.ф. f , базисной подматрице соответствуют основной репер минимальных векторов этой решетки. По минимальной матрице $M(f)$ п.к.ф. f вида (1) вычисляем матрицу $= MAM^T$, т.е. симметричную $(s \times s)$ матрицу, составленную из скалярных произведений (m_k, m'_k) представлений минимума m в метрике формы f . При этом каждой базисной подматрице матрицы M будет отвечать подматрица γ матрицы $M = M(f)$ являющаяся матрицей Грамма, соответствующей этой базисной матрице основного репера минимальных векторов. Теперь в матрице \tilde{A} ищется максимальный набор одинаковых подматриц γ , отвечающих базисным минорам матрицы $M(f)$. Так как каждой подматрице γ соответствуют целочисленный автоморфизм формы f , то максимальному набору подматриц γ будет соответствовать группа $Aut(f)$ целочисленных автоморфизмов формы f .

На основе этого алгоритма, в частности, для форм

$$f = \sigma m_{10} = \varphi_1^8 + \frac{1}{3} \{x_1 x_2 - x_3(x_4 + \dots + x_8) - x_4(x_5 + \dots + x_8) - x_5(x_6 + x_7 + x_8) - x_6(x_7 + x_8)\},$$

$$f = \sigma_{52} = \varphi_1^8 + \frac{1}{4} \{x_1 x_2 - x_2(x_7 + x_8) - x_3(x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 + 2x_8) - x_4(x_5 + x_6 + 2x_7 + 2x_8) - x_5(x_6 + 2x_7 + 2x_8) - 2x_6(x_7 + x_8)\}$$

непосредственными вычислениями получаются следующие предложения.

Теорема 1. Группа $Aut M(\sigma m_{10})$ имеет порядок 480 и ее можно представить в виде

объединения 10 смежных классов по подгруппе $S_4^* \text{Aut } M(\sigma_{10}) = U_{i=0}^9 S_4^* A_i$, где

$$A_1 : \quad x_1 \rightarrow y_2 - y_3, x_2 \rightarrow y_1 - y_3, x_3 \rightarrow -y_3, x_i \rightarrow y_1 + y_2 - y_3 - y_i (i = 4, \dots, 8),$$

$$A_2 : \quad x_1 \rightarrow y_2 - y_4, x_2 \rightarrow y_1 - y_4, x_3 \rightarrow -y_4, x_4 \rightarrow y_1 + y_2 - y_3 - y_4, x_i \rightarrow y_1 + y_2 - y_4 - y_i \\ (i = 5, 6, 7, 8),$$

$$A_3 : \quad x_1 \rightarrow y_2 - y_5, x_2 \rightarrow y_1 - y_5, x_3 \rightarrow -y_5, x_4 \rightarrow y_1 + y_2 - y_3 - y_5,$$

$$A_4 : \quad x_1 \rightarrow y_2 - y_6, x_2 \rightarrow y_1 - y_6, x_3 \rightarrow -y_6, x_4 \rightarrow y_1 + y_2 - y_3 - y_6, x_5 \rightarrow y_1 + y_2 - y_4 - y_6, \\ x_6 \rightarrow y_1 + y_2 - y_5 - y_6, x_i \rightarrow y_1 + y_2 - y_6 - y_i (i = 7, 8),$$

$$A_5 = \quad x_1 \rightarrow y_2, x_2 \rightarrow y_1, A_6 = A_5 A_1, A_7 = A_5 A_2, A_8 = A_5 A_3, A_9 = A_5 A_4,$$

A_0 – единичная матрица. S_4^* : образующими элементами являются всевозможные перестановки x_3, x_4, x_5, x_6 и $x_7 \rightarrow x_8, x_8 \rightarrow x_7$ порядок подгруппы S_4^* равен 48.

Теорема 2. Группа $\text{Aut } M(\sigma_{52})$ имеет порядок 240, и ее можно представить в виде объединения 5 смежных классов по S_4^* :

$$\text{Aut } M(\sigma_{52}) = U_{i=0}^4 S_4^* A_i, \text{ где } S_4^*, A_0, A_1, A_2 A_3, A_4 \text{ определены в теореме 1.}$$

Следствие. Группа $\text{Aut } M(\sigma_{52})$ является подгруппой группы $\text{Aut } M(\sigma_{10})$, то есть $\text{Aut } M(\sigma_{52}) \subset \text{Aut } M(\sigma_{10})$.

Группы $\text{Aut } M(\sigma_{52})$ и $\text{Aut } M(\sigma_{10})$ нужны для отыскания совершенных форм смежных с совершенными формами σ_{52} и σ_{10} [4,5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вороной Г. Ф.* О некоторых свойствах положительных квадратичных форм // Собр. Соч. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. С. 171–238.

2. *Шуибаев С. Ш.* Об одном алгоритме вычисления групп автоморфизмов совершенных форм // В кн.: "Численное интегрирование и смежные вопросы". Ташкент: АН. УзССР, 1990. С. 90–108.

3. *Рышков С. С., Барановский Е. П.* Классические методы теории решетчатых упаковок // Успехи матем. наук. 1979. 34. № 4. С. 3–63.

4. *Шуибаев С. Ш., Гулямов О. Х.* К проблеме отыскания совершенных форм от восьми переменных. Новая совершенная форма // Узбек. матем. журн. 2001. № 3,4. С. 70–75.

5. *Шуибаев С. Ш., Гулямов О. Х.* О совершенных формах от восьми переменных. Новые совершенные формы // Труды VI международного семинара - совещания "Кубатурные формулы и их приложения". Уфа: ИМ ВЦ УНЦ РАН, 2001. С. 188–197.

Чувствительность диффузионного процесса к параметрам движения границы ¹

Гусев С. А.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; sag@osmf.sccc.ru*

В работе рассматривается диффузионный процесс в 2D ограниченной области с подвижной поглощающей границей. Задается функционал этого процесса, математическое которого совпадает с решением параболической краевой задачи в заданной точке внутри области. Движение границы области определяется некоторым набором параметров, которые мы называем параметрами движения границы.

Основное внимание уделяется построению метода оценки решения данной краевой задачи и его производных по параметрам движения границы с использованием численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

¹Работа поддержана грантом РФФИ, №11-01-00252-а.

Предлагаемый метод решения этой задачи основан на аппроксимации подвижной границы ломаной линией и построении взаимно однозначного отображения области с подвижной границей на область, граница которой неподвижна. При этом взаимно однозначное отображение задается с помощью преобразования переменных, которое приводит к изменению коэффициентов диффузии и сноса так, что эти коэффициенты становятся зависимыми от параметров. В результате получается случайный процесс, движение которого происходит в области с неподвижной границей, но при этом траектория процесса внутри области зависит от параметров, определяющих положение подвижной границы.

Обозначим (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство и $\{\mathcal{F}_t\}$ — неубывающую последовательность σ -алгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq 0$. Пусть W — двумерный винеровский процесс и предположим, что для любого t случайная величина W_t измерима относительно \mathcal{F}_t , и для $s > t$ разность $W_s - W_t$ независима от σ -алгебры \mathcal{F}_t .

Пусть $G(t) \subset R^2$ зависящая от t область, ограниченная при любом $t \in [0, T]$. Обозначим Γ границу области. Будем предполагать, что движение Γ однозначно определяется некоторым набором параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_p})$, и при этом координаты точек $\Gamma(t, \theta)$ являются дифференцируемыми функциями t и θ_i , $i = 1, \dots, n_p$.

Пусть точка $(x, y) \in G(t)$ при некотором значении $t \in [0, T]$ и некотором заданном наборе параметров θ . Зададим диффузионный процесс $(x_s, y_s) \in G(s) \subset R^2$ при $s \in [t, T]$, определяемый системой стохастических дифференциальных уравнений (СДУ):

$$\begin{aligned} x_s &= x + \int_t^s a_{1v} dv + \int_t^s \sum_{i=1}^2 \sigma_{1iv} dW_{iv} , \\ y_s &= y + \int_t^s a_{2v} dv + \int_t^s \sum_{i=1}^2 \sigma_{2iv} dW_{iv} , \end{aligned} \tag{1}$$

у которого коэффициенты сноса и диффузии a_i, σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) зависят от v, x_v, y_v .

В данной работе, для некоторой достаточно гладкой функции φ , мы рассматриваем получение оценки представленного ниже математического ожидания функционала процесса, определяемого системой СДУ (1), на основе статистического моделирования траекторий

$$u(t, x, y, \theta) = E_{t,x,y}[\varphi(x_T, y_T, \theta)\chi_{\tau>T}]. \tag{2}$$

В (2) приняты следующие обозначения: $\tau = \inf\{v \mid v > t, (x_v, y_v) \in \Gamma\}$ — момент первого достижения границы; χ_A — индикаторная функция множества A ; $E_{t,x,y}$ — знак условного математического ожидания при условии, что в момент t процесс (x, y) находился в точке (x, y) .

Известно (см., например, [1]), что математическое ожидание функционала в (2) совпадает со значением в точке (t, x, y) решения краевой задачи

$$\partial u / \partial t + Lu = 0 , \tag{3}$$

$$u(T, x, y) = \varphi(x, y, \theta), \tag{4}$$

$$u(t, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma(t, \theta), \tag{5}$$

где $L \equiv \frac{1}{2} \left(b_{11}(t, x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b_{12}(t, x, y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{22}(t, x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + a_1(t, x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_2(t, x, y) \frac{\partial}{\partial y}$; $B = (b_{ij}) = \sigma\sigma^*$. Предполагается, что матрица B положительно определена. Будем предполагать также, что существует единственное решение задачи (3) – (5); функция φ непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам. Кроме того, для определения производных функционала (2) требуется существование производных решения задачи (3) – (5) по x, y, θ на Γ .

Для построения взаимно однозначного отображения области с подвижной границей на неподвижную область в окрестности подвижной границы задается треугольная сетка

такая, что часть сторон треугольников образует ломаную линию, которая является аппроксимацией подвижной части границы. При этом вершины треугольников этой сетки, находящиеся на границе, движутся и тем самым определяют движение границы. Построенную таким образом область будем обозначать G_m . Обозначим G_c область с неподвижной границей, и она полностью идентична G_m в начальный момент времени. В G_c тоже задается треугольная сетка, которая полностью совпадает с начальным положением треугольной сетки в G_m .

Взаимно однозначное соответствие между треугольниками в G_c и треугольниками в G_m устанавливается следующим образом. Рассмотрим два треугольника: T в G_m с координатами вершин (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) и \bar{T} в G_c с координатами вершин (\bar{x}_1, \bar{y}_1) , (\bar{x}_2, \bar{y}_2) , (\bar{x}_3, \bar{y}_3) .

Построим в пространстве \mathbb{R}^3 плоскость, проходящую через три точки $X_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, x_1)$, $X_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, x_2)$, $X_3 = (\bar{x}_3, \bar{y}_3, x_3)$. Пусть уравнение плоскости записывается в виде

$$A_x \bar{x} + B_x \bar{y} + C_x x + D_x = 0 . \quad (6)$$

Тогда коэффициенты этой плоскости можно выразить через координаты точек $X_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, x_1)$, $X_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, x_2)$, $X_3 = (\bar{x}_3, \bar{y}_3, x_3)$

$$A_x = (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(x_3 - x_1) - (\bar{y}_3 - \bar{y}_1)(x_2 - x_1) , \quad (7)$$

$$B_x = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(x_3 - x_1) - (\bar{x}_3 - \bar{x}_1)(x_2 - x_1) , \quad (8)$$

$$C_x = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{y}_3 - \bar{y}_1) - (\bar{x}_3 - \bar{x}_1)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) , \quad (9)$$

$$D_x = -(A_x \bar{x}_1 + B_x \bar{y}_1 + C_x x_1). \quad (10)$$

Аналогично определяем плоскость $A_y \bar{x} + B_y \bar{y} + C_y y + D_y = 0$, проходящую через точки $Y_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, y_1)$, $Y_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, y_2)$, $Y_3 = (\bar{x}_3, \bar{y}_3, y_3)$.

На самом деле $C_x = C_y$, поэтому в дальнейшем этот коэффициент пишем без индексов. Выразим x , y из уравнений плоскостей

$$x = -\frac{1}{C}(A_x(t, \theta)\bar{x} + B_x(t, \theta)\bar{y} + D_x(t, \theta)), \quad (11)$$

$$y = -\frac{1}{C}(A_y(t, \theta)\bar{x} + B_y(t, \theta)\bar{y} + D_y(t, \theta)). \quad (12)$$

Равенства (11), (12) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками (\bar{x}, \bar{y}) неподвижного треугольника \bar{T} в G_c и точками (x, y) треугольника T подвижной сетки в G_m , если

$$A_x B_y - A_y B_x \neq 0. \quad (13)$$

Для указания принадлежности точек и треугольников области G_c в их обозначениях ставим черту сверху.

Из системы уравнений (11), (12) при выполнении условия (13), легко выражаются координаты точки неподвижного треугольника \bar{T} через координаты соответствующей точки треугольника $T \subseteq G_m$.

Пусть k_T — количество треугольников в сетке. Обозначим T_i, \bar{T}_i , $i = 1, \dots, k_T$ треугольники подвижной сетки в G_m и неподвижной сетки в G_c соответственно. Верхние индексы у коэффициентов плоскостей: $A_x^i, B_x^i, D_x^i, A_y^i, B_y^i, D_y^i, C^i$, $i = 1, \dots, k_T$ в наших обозначениях соответствуют номерам треугольников.

Обозначим f_x, f_y правые части равенств (11), (12) соответственно. Установим взаимно однозначное отображение $F : G_c \rightarrow G_m$ с помощью равенства

$$(x, y) = \begin{cases} (f_x, f_y), & (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcup_{i=1}^{k_T} \bar{T}_i, \\ (\bar{x}, \bar{y}), & (\bar{x}, \bar{y}) \notin \bigcup_{i=1}^{k_T} \bar{T}_i. \end{cases} \quad (14)$$

Мы используем биекцию (14) G_c на G_m для построения случайного процесса в G_c такого, что с помощью моделирования его траекторий можно получать требуемые оценки $u(t, x, y)$, $u_\theta(t, x)$.

Пусть $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{T}_i$, где \bar{T}_i — некоторый треугольник в G_c . Точке (\bar{x}, \bar{y}) при отображении (14) соответствует в G_m точка $(x, y) = (f_x(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta), f_y(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta))$.

Определим на треугольниках области G_c функции \bar{u} , \bar{a}_i , \bar{b}_{ij} , $\bar{\sigma}_{ij}$ равенствами

$$\bar{u}(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta) = u(t, f_x(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta), f_y(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta)), \quad (15)$$

$$\bar{a}_i(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta) = a_i(t, f_x(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta), f_y(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta)), \quad (16)$$

$$\bar{b}_{ij}(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta) = b_{ij}(t, f_x(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta), f_y(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta)). \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta) = \sigma_{ij}(t, f_x(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta), f_y(t, \bar{x}, \bar{y}, \theta)). \quad (18)$$

Мы в нашей работе устанавливаем, что диффузионный процесс в треугольниках $\bar{T}_i \in G_c$, получаемый с учетом построенного взаимно однозначного соответствия между G_m и G_c , удовлетворяет векторному уравнению

$$\begin{pmatrix} d\bar{x}^i \\ d\bar{y}^i \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^i} \begin{pmatrix} -B_y^i & A_y^i \\ B_x^i & -A_x^i \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_1 - \frac{\partial f_x}{\partial t} \\ a_2 - \frac{\partial f_y}{\partial t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{1t} \\ dW_{2t} \end{pmatrix} \right]. \quad (19)$$

Из (19) на основании равенств (16), (18) приходим к системе СДУ, которая описывает диффузионный процесс в треугольнике $\bar{T}_i \in G_c$

$$\begin{pmatrix} d\bar{x}^i \\ d\bar{y}^i \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^i} \begin{pmatrix} -B_y^i & A_y^i \\ B_x^i & -A_x^i \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \bar{a}_1 - \frac{\partial f_x}{\partial t} \\ \bar{a}_2 - \frac{\partial f_y}{\partial t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{21} & \bar{\sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{1t} \\ dW_{2t} \end{pmatrix} \right]. \quad (20)$$

Уравнение (19) позволяет получить преобразование, с помощью которого осуществляется переход от процесса (\bar{x}^i, \bar{y}^i) в треугольнике $\bar{T}_i \subseteq G_m$ к диффузионному процессу (\tilde{x}, \tilde{y}) в G_m , имеющему такие же коэффициенты диффузии и сноса как у процесса (1)

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x} \\ d\tilde{y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{C^i} \begin{pmatrix} A_x^i & B_x^i \\ A_y^i & B_y^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\bar{x}^i \\ d\bar{y}^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(t, \bar{x}^i, \bar{y}^i, \theta)}{\partial t} \\ \frac{\partial f_y(t, \bar{x}^i, \bar{y}^i, \theta)}{\partial t} \end{pmatrix} dt. \quad (21)$$

Таким образом, процесс (\bar{x}^i, \bar{y}^i) в любом из треугольников \bar{T}_i индуцирует процесс (\tilde{x}, \tilde{y}) в G_m , у которого коэффициенты сноса и диффузии совпадают с соответствующими коэффициентами процесса (x, y) в G_m . Отсюда следует, что на основе моделирования траекторий случайного процесса в области G_c и отображения их в соответствующие траектории в области G_m , можно получать оценки математического ожидания диффузионного процесса (x, y) (2).

С другой стороны в силу биективности отображения (14) оценку решения краевой задачи (3)–(5) можно находить на основе моделирования траекторий процесса (\bar{x}, \bar{y}) в области G_m без отображения их в траектории подвижной области, а как оценку математического ожидания функционала диффузионного процесса (x, y) в области G_c

$$\begin{aligned} u(t, x, y, \theta) = & E_{t, \bar{x}, \bar{y}} [\varphi(f_x(T, \bar{x}_T, \bar{y}_T), f_y(T, \bar{x}_T, \bar{y}_T), \theta) \chi_{(\tau > T) \& ((\bar{x}_T, \bar{y}_T) \in \cup \bar{T}_i)} \\ & + \varphi(\bar{x}_T, \bar{y}_T), \theta) \chi_{(\tau > T) \& ((\bar{x}_T, \bar{y}_T) \notin \cup \bar{T}_i)}], \end{aligned} \quad (22)$$

где \bar{x}, \bar{y} — координаты точки в G_c , соответствующей точке $(x, y) \in G_m$ при взаимно однозначном соответствии (14).

В данной работе получено выражение производной u_θ , с использованием которого можно определять оценки производных по параметрам u_θ

$$\begin{aligned} u_\theta(t, x, y, \theta) = E_{t, \bar{x}, \bar{y}} & \left[\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_T \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} (\bar{x}_\theta)_T + \frac{\partial f_x}{\partial y} (\bar{y}_\theta)_T + \frac{\partial f_x}{\partial \theta} \right) \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_T \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} (\bar{x}_\theta)_T + \frac{\partial f_y}{\partial y} (\bar{y}_\theta)_T + \frac{\partial f_y}{\partial \theta} \right) \right] \chi_{(\tau > T) \& ((\bar{x}_T, \bar{y}_T) \in \cup \bar{T}_i)} \\ & + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_T (\bar{x}_\theta)_T + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_T (\bar{y}_\theta)_T \right] \chi_{(\tau > T) \& ((\bar{x}_T, \bar{y}_T) \notin \cup \bar{T}_i)}, \end{aligned}$$

где $\bar{x}_\theta, \bar{y}_\theta$ — производные \bar{x}, \bar{y} по θ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.

Экстремальная функция функционала погрешности квадратурной формулы и его норма в пространстве $H_2^\mu(R)$

Жалолов И. И., Жалолов Икром. И., Аслонов Ф. Б.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;

В настоящей работе рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 P(x) f(x) dx \approx \sum_{\beta=0}^N C_\beta f(x_\beta), \quad (1)$$

где соответственно, C_β и x_β называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $P(x)$ — весовая функция, $f(x)$ является элементом гильбертова пространства $H_2^\mu(R)$.

Определения 1. Пространство $H_2^\mu(R)$ определяется как замыкание пространства бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени, которая норма функций определяется следующим образом:

$$\|f(x) | H_2^\mu(R)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F^{-1}[\mu(\xi) \cdot F[f(x)](\xi)](x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\mu(\xi)$ - бесконечно дифференцируемая, $\mu > 0$, F и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье:

$$F[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \xi x} dx, \quad F^{-1}[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx,$$

Отметим, что условие

$$\nu(x) = \left(F^{-1} \left(\frac{1}{\mu(\xi)} \right) \right) (x) \in L_2(R)$$

обеспечивает вложение пространства $H_2^\mu(R)$ в $C(R)$ — непрерывных функций. Условие вложения пространства $H_2^\mu(R)$ в пространство непрерывных функций $C(R)$ является необходимым условием функциональном подходе к теории квадратурных и кубатурных формул.

Разность между интегралом и квадратурной суммой, т. е.

$$\int_0^1 P(x)f(x)dx - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}f(x_{\beta}) = \langle \ell_N(x), f(x) \rangle, \quad (2)$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1) и этой разности соответствует функционал погрешности $\ell_N(x)$, который имеет вид:

$$\ell_N(x) = P(x)\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}\delta(x - x_{\beta}) \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - характеристическая функция отрезка $[0,1]$, а $\delta(x)$ — дельта функция Дирака.

Задача построения оптимальных квадратурных формул в пространстве $H_2^{\mu}(R)$ — это вычисления следующей величины

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}_N | H_2^{\mu*}(R) \right\| = \inf_{C_{\beta}, x_{\beta}} \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{|\langle \ell_N(x), f(x) \rangle|}{\|f(x) | H_2^{\mu}(R)\|}, \quad (4)$$

где $H_2^{\mu*}(R)$ - сопряженное пространство к пространству $H_2^{\mu}(R)$.

Эта задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму $\|\ell_N(x) | H_2^{\mu*}(R)\|$ функционала погрешности $\ell_N(x)$ в пространстве $H_2^{\mu*}(R)$, а потом минимизировать его по коэффициентам C_{β} и узлам x_{β} .

В настоящей работе мы занимаемся решением первой части задачи, т. е. вычислением нормы $\|\ell_N(x) | H_2^{\mu*}(R)\|$ функционала погрешности $\ell_N(x)$. Для этого мы используем понятие экстремальной функции функционала погрешности $\ell_N(x)$ введенным С. Л. Соболевым [1].

Определения 2. Функция $\psi_{\ell}(x)$ для которой выполняется равенство

$$\langle \ell_N(x), \psi_{\ell}(x) \rangle = \|\ell_N(x) | H_2^{\mu*}(R)\| \cdot \|\psi_{\ell}(x) | H_2^{\mu}(R)\| \quad (5)$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности $\ell_N(x)$. Так как пространство $H_2^{\mu}(R)$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного функционала (см. [2]) существует единственная функция $\psi_{\ell}(x) \in H_2^{\mu}(R)$ для которой

$$\langle \ell_N(x), f(x) \rangle = \langle \psi_{\ell}(x), f(x) \rangle \quad (6)$$

и

$$\|\ell_N(x) | H_2^{\mu*}(R)\| = \|\psi_{\ell}(x) | H_2^{\mu}(R)\|,$$

где $\langle \psi_{\ell}(x), f(x) \rangle$ — скалярное произведение двух функций $\psi_{\ell}(x)$ и $f(x)$ из пространства $H_2^{\mu}(R)$. Напомним, что скалярное произведение $\langle \psi_{\ell}(x), f(x) \rangle$ определяется следующим образом:

$$\langle \psi_{\ell}(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1} [\mu(\xi) \cdot F[\psi_{\ell}(x)](\xi)] \times F^{-1} [\mu(\xi) \cdot F[f(x)](\xi)] dx.$$

В частности, из (6) при $f(x) = \psi_{\ell}(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \ell_N(x), f(x) \rangle &= \langle \psi_{\ell}(x), f(x) \rangle = \|\psi_{\ell}(x) | H_2^{\mu}(R)\|^2 = \\ &= \|\psi_{\ell}(x) | H_2^{\mu}(R)\| \cdot \|\ell_N(x) | H_2^{\mu*}(R)\| = \|\ell_N(x) | H_2^{\mu*}(R)\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что решения $\psi_\ell(x)$ уравнения (6) удовлетворяет уравнению (5) и является экстремальной функцией. Таким образом, для того чтобы вычислить норму функционала погрешности $\ell_N(x)$, сперва надо решить уравнение (6), т. е. найти экстремальную функцию $\psi_\ell(x)$ а потом вычислить скалярные произведения

$$\langle \ell_N(x), f(x) \rangle = \|\ell_N(x)|_{H_2^{\mu^*}(R)}\|^2$$

Ниже мы будем находить экстремальную функцию другим путем. Далее, из теории преобразования Фурье обобщенных функций имеем

$$\langle \ell_N(x), f(x) \rangle = (F[\ell_N(x)](\xi), F[f(x)](\xi)) =$$

$$= (\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi), \mu(\xi)F[f(x)](\xi)) = (F^{-1}\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\}, F^{-1}\{\mu(\xi)F[f(x)](\xi)\}).$$

Если в этом равенстве полагать

$$F^{-1}\{\mu(\xi)F[\psi_\ell(x)](\xi)\} = F^{-1}\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\},$$

т.е. если полагать $f(x) = \psi_\ell(x) = F^{-1}\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\}(x)$, то будем иметь:

$$\langle \ell_N(x), \psi_\ell(x) \rangle = \langle \psi_\ell(x), \psi_\ell(x) \rangle = \|\ell_N(x)|_{H_2^{\mu^*}(R)}\|^2.$$

Отсюда следует, во первых, что

$$\psi_\ell(x) = F^{-1}\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\}(x) =$$

$$= [P(x) \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] \cdot \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \nu_m(x - h\beta), \quad (7)$$

где $\nu_m(x) = F^{-1}[\mu^{-1}(\xi)](x)$. Так как $\psi_\ell(x)$ является экстремальной функцией функционала погрешности (2); во вторых

$$\|\ell_N(x)|_{H_2^{\mu^*}(R)}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| [P(x) \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \nu_m(x - h\beta) \right|^2 dx. \quad (8)$$

Этим доказана следующая

Теорема. Экстремальная функция функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) имеет вид (7), квадрат нормы функционала погрешности над пространством $H_2^\mu(R)$ имеет вид (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. 484 с.

Наилучшая весовая кубатурная формула над пространством С. Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$.

Жалолов О. И., Аслонов Ф. Б.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;

В работах [1-5] исследуется проблема оптимальности кубатурных формул относительно некоторого определенного пространства. Большинство из них рассмотрены в пространстве Соболева [1]. Рассмотрим кубатурную формулу общего вида

$$\int_{T_n} p(x) f(x) dx \approx \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha c_\lambda^\alpha f^{(\alpha)}(x^{(\lambda)}), \tag{1}$$

над пространством С. Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$. Здесь соответственно c_λ^α и $x^{(\lambda)}$ являются коэффициентами и узлами кубатурной формулы (1), $p(x)$ — весовая функция, $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$, T_n — n -мерный тор и α — порядок обобщенных производных и $0 \leq q \leq m - 1$.

Определение 1. Множество $T_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_k = \{t_k\}, t_k \in R\}$, где $\{t_k\} = t_k - [t_k]$, т. е. дробная доля t_k , называется n -мерным тором T_n .

Определение 2. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ — определяется как пространство функций заданных на n -мерном торе T_n и имеющих все обобщенные производные порядка m суммируемые с квадратом в норме [1]

$$\|f(x) / \tilde{W}_2^{(m)}(T_n)\|^2 = \left(\int_{T_n} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} |\hat{f}_k|^2, \tag{2}$$

со скалярным произведением

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle_{\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)} = \int_{T_n} \sum_{|\alpha| \leq q} D^\alpha f(x) D^\alpha \varphi(x) dx + \left(\int_{T_n} f(x) dx \right) \left(\int_{T_n} \varphi(x) dx \right),$$

где \hat{f}_k — коэффициенты Фурье, т.е. $\hat{f}_k = \int_{T_n} f(x) e^{2\pi i(k,x)} dx$.

Обобщенную функцию

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = p(x) \varepsilon_{T_n}(x) - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha \delta^{(\alpha)}(x - x^{(\lambda)}), \tag{3}$$

назовем функционалом погрешности кубатурной формулы (1). Здесь $\varepsilon_{T_n}(x)$ — характеристическая функция T_n .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности (3) кубатурной формулы общего вида (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ равен

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_n) \right\|^2 = \left| \hat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha \right|^2 +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \left| \frac{\hat{p}_k - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha (2\pi i)^\alpha \left(\prod_{j=1}^n k_j \right)^\alpha e^{2\pi i(k, x^{(\lambda)})}}{k^{2m}} \right|^2,$$

где c_λ^α – коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ – узлы кубатурной формулы (1) и \hat{p}_k – коэффициенты Фурье функции $p(x)$, т. е. $\hat{p}_k = \int_{T_n} p(x) e^{2\pi i(k, x)} dx$.

Доказательство. Известно, что для функции $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x) = \sum_k \hat{f}_k e^{-2\pi i(k, x)},$$

где

$$\hat{f}_k = \langle f(x), e^{2\pi i(k, x)} \rangle = \int_{T_n} f(x) e^{2\pi i(k, x)} dx,$$

т.е. коэффициенты Фурье.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \langle \ell_N^{(\alpha)}, f(x) \rangle &= \langle \ell_N^{(\alpha)}(x), \sum_k \hat{f}_k e^{-2\pi i(k, x)} \rangle = \\ &= \sum_k \hat{f}_k \langle \ell_N^{(\alpha)}(x), e^{-2\pi i(k, x)} \rangle = \sum_k \hat{f}_k \tilde{\ell}_{-k}^{(\alpha)} = \hat{f}_0 \tilde{\ell}_0^{(\alpha)} + \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \tilde{\ell}_{-k}^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\tilde{\ell}_0^{(\alpha)} = \int_{T_n} \ell_N^{(\alpha)}(x) dx,$$

$$\tilde{\ell}_{-k}^{(\alpha)} = \int_{T_n} \ell_N^{(\alpha)}(x) e^{-2\pi i(k, x)} dx.$$

Применяя к правой части (4) неравенство Коши-Шварца и учитывая (2) получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \left| \langle \ell_N^{(\alpha)}, f(x) \rangle \right| &= \left| \hat{f}_0 \tilde{\ell}_0^{(\alpha)} + \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \tilde{\ell}_{-k}^{(\alpha)} \right| \leq |\hat{f}_0 \tilde{\ell}_0^{(\alpha)}| + \\ &+ \left| \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \tilde{\ell}_{-k}^{(\alpha)} |2\pi k|^m \cdot \frac{1}{|2\pi k|^m} \right| \leq |\hat{f}_0 \tilde{\ell}_0^{(\alpha)}| + \sum_{k \neq 0} |\hat{f}_k| |\tilde{\ell}_{-k}^{(\alpha)}| |2\pi k|^m \frac{1}{|2\pi k|^m} \leq \\ &\leq \left\{ |\hat{f}_0|^2 + \sum_{k \neq 0} |\hat{f}_k|^2 |2\pi k|^{2m} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ |\tilde{\ell}_0^{(\alpha)}|^2 + \sum_{k \neq 0} \frac{|\tilde{\ell}_{-k}^{(\alpha)}|^2}{|2\pi k|^{2m}} \right\}^{1/2} = \\ &= \left\| f(x) / \tilde{W}_2^{(m)}(T_n) \right\| \cdot \left\{ |\tilde{\ell}_0^{(\alpha)}|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{|\tilde{\ell}_k^{(\alpha)}|^2}{|k|^{2m}} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Принимая во внимание (2) и (5), получим

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_n) \right\| \leq \left\{ \left| \tilde{\ell}_0^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \tilde{\ell}_k^{(\alpha)} \right|^2}{|k|^{2m}} \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

где

$$\tilde{\ell}_k^{(\alpha)} = \hat{p}_k - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha (2\pi i)^\alpha \left(\prod_{j=1}^n k_j \right)^\alpha e^{2\pi i(k, x^{(\lambda)})} \quad (7)$$

Таким образом, имея ввиду (7) и (6) получим

$$\begin{aligned} \left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_n) \right\|^2 &\leq \left| \hat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha \right|^2 + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{p}_k - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha (2\pi i)^\alpha \left(\prod_{j=1}^n k_j \right)^\alpha e^{2\pi i(k, x^{(\lambda)})} \right|^2}{k^{2m}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Существует такая функция из $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$, что в неравенстве (8) равенство достигается. Действительно, рассмотрим следующую функцию $u(x)$:

$$u(x) = \hat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\tilde{\ell}_{-k}^{(\alpha)} e^{-2\pi i(k, x)}}{|k|^{2m}}.$$

Вычисляя значение функционала $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ на функции $u(x)$ получим

$$\begin{aligned} \langle \ell(x), u(x) \rangle &= \langle \ell_N^{(\alpha)}(x), \hat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\tilde{\ell}_{-k}^{(\alpha)} e^{-2\pi i(k, x)}}{|k|^{2m}} \rangle = \\ &= \left| \hat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{p}_k - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha (2\pi i)^\alpha \left(\prod_{j=1}^n k_j \right)^\alpha e^{2\pi i(k, x^{(\lambda)})} \right|^2}{k^{2m}} = \\ &= \left\| u(x) / \tilde{W}_2^{(m)}(T_n) \right\|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая (9),(6) получим доказательство теорема.

Введём обозначения

$$D^N(x) = \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \delta(x - x^{(\lambda)}),$$

тогда для функционала погрешности кубатурной формулы (1) при $\alpha = 0$ имеет место следующая теорема, которая является основным результатом этой работы.

Теорема 2. Среди всех кубатурных формул вида (1) при

$$\ell_N(x) = P(x) \varepsilon_{T_n}(x) - \prod_{i=1}^n D^{N_i}(x_i)$$

и $\alpha = 0$, наилучшая в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ является единственная формула с коэффициентами $\overset{\circ}{c}$ тогда, когда как узлы кубатурной формулы являются образом решетки на торе T_n и коэффициенты которой равны между собой

$$c_1 = c_2 = \dots = c_N = \overset{\circ}{c},$$

где

$$\overset{\circ}{c} = \frac{\hat{p}_0 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \cdot \frac{1}{N^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{p}_k}{|k|^{2m}}}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \frac{1}{N^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^{2m}} \right)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. *Рамазанов М. Д.* Лекции по теории приближенного интегрирования. Уфа, 1973. 173 с.
3. *Салихов Г. Н.* Кубатурные формулы для многомерных сфер. Ташкент: Фан, 1985. 104 с.
4. *Шарипов Т. Х.* Некоторые вопросы теории приближенного интегрирования. Диссертация кандидата физ.-мат. наук. Ташкент, 1975. 102 с.
5. *Шадиметов Х. М.* Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С. Л. Соболева. Диссертация доктора физ.-мат. наук. Ташкент, 2002. 218 с.

Наилучшая весовая квадратурная формула над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$

Жалолов Ф. И.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_{T_1} P(x) f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda f(x^{(\lambda)}), \quad (1)$$

где $x^{(\lambda)}$ и c_λ — узлы и коэффициенты квадратурной формулы. Квадратурной формуле (1) сопоставим обобщенную функцию

$$\ell(x) = p(x) \varepsilon_{T_1}(x) - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \delta(x - x^{(\lambda)}), \quad (2)$$

и назовем ее функционалом погрешности. Здесь $\varepsilon_{T_1}(x)$ — характеристическая функция T_1 , $\delta(x)$ — δ -функция Дирака и $p(x) \in L_2(T_1)$.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ определяется как пространство функций заданных на одномерном T_1 — окружности длины равной единице и имеющих все обобщенные производные порядка m суммируемые с квадратом [1]. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ становится гильбертовым, если на нем ввести скалярное произведение

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle_{\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)} = \int_{T_1} f^{(m)}(x) \varphi^{(m)}(x) dx + \left(\int_{T_1} f(x) dx \right) \left(\int_{T_1} \varphi(x) dx \right). \quad (3)$$

Норма определяется по формуле

$$\|f(x) | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} |\hat{f}_k|^2. \tag{4}$$

Известно, что

$$\|\ell | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\| = \sup_{\|\varphi\| \neq 0} \frac{|\langle \ell, \varphi \rangle|}{\|\varphi | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|}. \tag{5}$$

Определение 2. Квадратурная формула вида (1) называется наилучшей, если для нормы ее функционала погрешности $\ell(x)$ выполняется равенство

$$\|\ell | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\|^\circ = \inf_{c_\lambda, x^{(\lambda)}} \|\ell(x) | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\|.$$

В работе [2] найдена оптимальная формула над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T)$, когда узлы квадратурной формулы равноотстоящие и $p(x) = 1$.

В пространстве $\tilde{W}_p^{(\mu)}$ М. Д. Рамазановым [3] построена периодическая оптимальная кубатурная формула на решетке при $p(x) = 1$.

В настоящей работе рассматриваются следующие задачи:

1. Вычисление нормы функционала погрешности весовых квадратурных формул над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

2. Построение наилучшей, т.е. оптимальной по коэффициентам c_λ и по узлам $x^{(\lambda)}$, весовой квадратурной формулы над пространством С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности весовой квадратурной формулы (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\begin{aligned} & \|\ell(x) | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\|^2 = \\ & = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}, \end{aligned}$$

где c_λ — коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ — узлы квадратурной формулы вида (1) и \hat{P}_k — коэффициенты Фурье функции $p(x)$.

Доказательство. Известно [1], что для функции $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-2\pi i k x} = \sum_k \hat{f}_k e^{-2\pi i k x},$$

где $\hat{f}_k = \langle f(x), e^{2\pi i k x} \rangle = \int_{T_1} f(x) e^{2\pi i k x} dx$, т. е. коэффициенты Фурье.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \langle \ell(x), f(x) \rangle & = \left\langle \ell(x), \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{-2\pi i k x} \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \langle \ell(x), e^{-2\pi i k x} \rangle = \\ & = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \hat{\ell}_k = \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 + \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_{-k}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\hat{\ell}_0 = \int_{T_1} \ell(x) dx, \quad \hat{\ell}_{-k} = \int_{T_1} \ell(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

Применяя к правой части (6) неравенство Шварца, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & |\langle \ell(x), f(x) \rangle| = \\ & = \left| \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 + \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_k \right| \leq \left| \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 \right| + \left| \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \hat{\ell}_{-k} (2\pi i k)^m \frac{1}{(2\pi i k)^m} \right| \times \\ & \times \left| \hat{f}_0 \hat{\ell}_0 \right| + \sum_{k \neq 0} \left| \hat{f}_k \right| \left| \hat{\ell}_{-k} \right| |(2\pi i k)^m| \frac{1}{|(2\pi i k)^m|} \leq \left\{ \left| \hat{f}_0 \right|^2 + \sum_{k \neq 0} \left| \hat{f}_k \right|^2 |2\pi k|^{2m} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left\{ \left| \hat{\ell}_0 \right|^2 + \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{\ell}_k \right|^2}{|2\pi k|^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left\| f(x) | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\| \cdot \left\{ \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{\ell}_k \right|^2}{k^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7) \\ & \hat{p}_0 = \int_{T_1} p(x) dx. \end{aligned}$$

Принимая внимание (4), (5) и (7), получим

$$\left\| \ell(x) | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 \leq \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}. \quad (8)$$

Рассмотрим следующую функцию из пространства $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$

$$\psi_\ell(x) = \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{2\pi i k x}}{k^{(2m)}}.$$

Вычисляя скалярное произведение, получаем

$$\begin{aligned} \langle \ell(x), \psi_\ell(x) \rangle & = \left\langle \ell(x), \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right\rangle + \left\langle \ell(x), \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k e^{2\pi i k x}}{(2\pi)^{2m} k^{2m}} \right\rangle = \\ & \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{\ell}_k \hat{\ell}_k}{k^{2m}} = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{\ell}_k \right|^2}{k^{2m}}. \quad (9) \end{aligned}$$

На основании неравенств (8) и (9) для квадрата нормы функционала погрешности имеем

$$\left\| \ell(x) | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}} \quad (10)$$

что и требовалось доказать.

2. Из (10) видно, что качество квадратурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить еѐ. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по c_λ и $x^{(\lambda)}$ есть задача исследования функции на экстремум.

Значения c_λ и $x^{(\lambda)}$, реализующие этот минимум, определяют наилучшую квадратурную формулу.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2. Наилучшая весовая квадратурная формула вида (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет равноотстоящие узлы $x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}$, $\lambda = 1, 2, \dots, N$ и равные коэффициенты $c_1 = c_2 = \dots = c_N = \overset{\circ}{c}$, которые выражаются формулой

$$\overset{\circ}{c} = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \frac{1}{N^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^{2m}}}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \frac{1}{N^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^{2m}} \right)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул, М.: Наука, 1974. 808 с.
2. *Бабушка И.* Оптимальные квадратурные формулы. ДАН СССР, 1963. Т. 149, № 2. С. 227–229.
3. *Рамазанов М. Д.* Периодическая оптимальная кубатурная формула на пространстве \tilde{W}_p^m . Вычислительные технологии, 2006. Т. 11. С. 90–96.

Анализ сложных сигналов на основе вейвлет-преобразования

Кадена Л.

Сибирский федеральный университет, Красноярск;
escuadorx@gmail.com

Кириллова С. В.

Сибирский федеральный университет, Красноярск;
SVKirillova@rambler.ru

Симонов К. В.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск;
simonovkv@icm.krasn.ru

Работа посвящена построению алгоритмов вейвлет-преобразования сложных сигналов различной природы, а так же задачам, в основе решения которых лежит теория вейвлетов. Изложены основы кратномасштабного анализа данных инструментальных наблюдений, в частности, на примере вейвлетов Хаара.

Введение. В задачах обработки и анализа больших массивов данных геомониторинга часто требуется представлять анализируемый сигнал в виде совокупности его последовательных приближений. Инструментом разделения (декомпозиции) сигналов на такие составляющие с учетом разрешения по времени и по частоте является кратномасштабный анализ (КМА). Кратномасштабный анализ данных позволяет получить хорошее разрешение по времени (плохое по частоте) на высоких частотах и хорошее разрешение по частоте (плохое по времени) на низких частотах. Этот подход становится особенно эффективным,

когда сигнал имеет высокочастотные компоненты короткой длительности и протяженные низкочастотные компоненты.

1. Кратномасштабный анализ. Кратномасштабный анализ данных заключается в разложении сигнала по ортогональному базису, образованному сдвигами и кратномасштабными копиями вейвлетной функции. Свертка сигнала с вейвлетами позволяет выделить характерные особенности сигнала в области локализации этих вейвлетов, при этом, чем больший масштаб имеет вейвлет, тем более широкая область сигнала оказывает влияние на результат свертки [1, 2]. Ниже приведены основы кратномасштабного анализа на примере вейвлета Хаара.

Рассмотрим пространство функций $L^2(R)$, определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ и обладающих конечной энергией (нормой):

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2 dx < \infty.$$

В общем случае, для комплексных функций, норма определяется следующим образом:

$$\|s\| = \langle s, s \rangle^{1/2}, \quad \langle s, p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)p^*(x)dx.$$

Реальные сигналы, как правило, принадлежат пространству $L^2(R)$.

Рассмотрим систему не пересекающихся вложенных подпространств $V^m \subset L^2(R)$, $m = 0, 1, \dots$: $V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^j \subset \dots$. Базис для V^j задается множеством масштабированных и сдвинутых характеристических функций:

$$\phi_i^j = 2^{j/2} \phi(2^j x - i), \quad \text{где } i = 0, \dots, 2^j - 1,$$

причем

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее определим новое векторное пространство W^j , причем

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j.$$

Совокупность всех линейно независимых функций ψ_i^j – базис пространства W^j , называется множеством вейвлетов. Вейвлеты, соответствующие базису, состоящему из характеристических функций ϕ_i^j , носят название вейвлетов Хаара и определяются как

$$\psi_i^j = 2^{j/2} \psi(2^j x - i), \quad \text{где } i = 0, \dots, 2^j - 1,$$

причем

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & \text{при } 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эти функции образуют нормированные взаимно ортогональные базисы, по которым может быть разложен анализируемый сигнал.

Пусть задан дискретный сигнал $\{x_0, x_1, \dots, x_{2^m-1}\}$, имеющий 2^m отсчетов. Приведем алгоритм разложения анализируемого сигнала на уровни декомпозиции.

Нулевой уровень разложения ($j = m$) может быть получен непосредственно из дискретных данных:

$$c_i^m = \frac{x_i}{\sqrt{2^m}}, \quad i = 0, \dots, 2^j - 1.$$

В результате сигнал представим в виде:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{2^m-1} c_i^m \phi_i^m(x).$$

Далее, на каждом последующем уровне декомпозиции получаем аппроксимирующие коэффициенты c_i^{j-1} разложения сигнала по базису $\{\phi_i^{j-1}(x)\}$ пространства V^{j-1} и детализирующие коэффициенты d_i^{j-1} , характеризующие изменения сигнала в пределах каждого интервала усреднения, по следующим формулам:

$$c_i^{j-1} = \frac{c_{2i}^j + c_{2i+1}^j}{\sqrt{2}}, \quad d_i^{j-1} = \frac{c_{2i}^j - c_{2i+1}^j}{\sqrt{2}}.$$

Разложение функций на вейвлетные ряды на заданном уровне разрешения j выполняется по формуле:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{2^j-1} c_i^j \phi_i^j(x) + \sum_{l=j}^{m-1} \sum_{i=0}^{2^l-1} d_i^l \psi_i^l(x).$$

Таким образом, сигнал аппроксимируется набором простых локальных функций $\phi_i^j(x)$ и $\psi_i^j(x)$. Первая сумма в этом выражении дает «сглаженные средние» значения функции $s(x)$ на j -том масштабном уровне, а вторая сумма вейвлетных функций добавляет к «грубой» аппроксимации сигнала все более подробные детали на все меньших масштабных интервалах. Заметим, что в областях «гладких» значений сигнала коэффициенты детализации близки к нулевым и ими можно пренебречь, что позволяет осуществлять сжатие информации для хранения.

Восстановление значений коэффициентов более высокого уровня, а следовательно, восстановление исходного дискретного сигнала осуществляется по формулам:

$$c_{2i}^j = \frac{c_i^{j-1} + d_i^{j-1}}{\sqrt{2}}, \quad c_{2i+1}^j = \frac{c_i^{j-1} - d_i^{j-1}}{\sqrt{2}}.$$

Кратномасштабный анализ данных является основой пирамидального алгоритма вычисления вейвлет-коэффициентов (алгоритма Малла) [2]:

$$c_i^{j-1} = \sum_n h_n c_{2i+n}^j, \quad d_i^{j-1} = \sum_n g_n c_{2i+n}^j,$$

$$c_i^m = \int_{x_i}^{x_{i+1}} s(x) \phi(x-i) dx.$$

Для дискретных сигналов коэффициенты c_i^m рассчитываются по исходным данным. Здесь явный вид вейвлетной функции требуется только для расчета коэффициентов фильтров h_n и g_n . Сущность алгоритма заключается в последовательном разложении сигнала с помощью фильтров h_n и g_n на низкочастотные и высокочастотные составляющие.

2. Дискретное преобразование Хаара. Другим способом разложения сигнала по функциям Хаара является осуществление дискретного преобразования Хаара [3]. Коэффициенты преобразования Хаара $\{Y_n(k)\}$, соответствующие входной последовательности $\{X_n(k)\}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, получаются в результате вычисления преобразования:

$$Y_n = \frac{1}{N} H_n X_n,$$

где H_n – матрица Хаара размером $(N \times N)$, $n = \log_2 N$, получаемая путем дискретизации системы функций Хаара.

Обратное преобразование Хаара имеет вид:

$$X_n = H_n^T Y_n,$$

где H_n^T – транспонированная матрица Хаара.

3. Сжатие данных. Вейвлеты широко используются для сжатия сигналов, получаемых в результате мониторинга или моделирования сложных явлений и процессов. В основу алгоритма сжатия данных положено дискретное преобразование Хаара. Для реализации дискретного преобразования Хаара разработано соответствующее программное обеспечение. Алгоритм сжатия сигналов включает следующие этапы.

1. Выполняется дискретное преобразование Хаара.
2. Выбираются K коэффициентов дискретного преобразования, абсолютные значения которых больше заданного порогового значения. Все оставшиеся коэффициенты приравниваются нулю.
3. Вычисляется обратное дискретное преобразование Хаара.

Приведем обоснование второго этапа алгоритма [1]. Предположим, что функция $s(x)$ выражена через взвешенную сумму базисных функций $u_1(x), \dots, u_m(x)$ (в алгоритме – это функции Хаара): $s(x) = \sum_{i=1}^m c_i(x)u_i(x)$. Набор данных в этом случае состоит из коэффициентов c_1, \dots, c_m . Необходимо найти некоторую функцию $\hat{s}(x)$, аппроксимирующую $s(x)$, с меньшим числом коэффициентов $\hat{m} < m$, для которой выполняется условие $\|s(x) - \hat{s}(x)\| \leq \varepsilon$. Постановка задачи сжатия может заключаться в таком упорядочении коэффициентов c_1, \dots, c_m , что для каждого $\hat{m} < m$ первые \hat{m} элементов последовательности давали бы наилучшее приближение $\hat{s}(x)$ к $s(x)$.

Пусть $\pi(i)$ – это перестановка $1, \dots, m$, а $\hat{s}(x)$ – функция, использующая коэффициенты, соответствующие первым \hat{m} членам перестановки $\pi(i)$: $\hat{s}(x) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_{\pi(i)}(x)u_{\pi(i)}(x)$. Если базис является ортонормированным, что верно в случае базиса Хаара, тогда $\|s(x) - \hat{s}(x)\| = \sum_{i=\hat{m}+1}^m c_{\pi(i)}(x)^2$.

Таким образом, квадрат общей ошибки равен сумме квадратов коэффициентов, которыми пренебрегли. Поэтому, для того, чтобы минимизировать эту погрешность для любого данного \hat{m} , лучше всего выбрать такую перестановку $\pi(i)$, которая располагает коэффициенты в порядке уменьшения их абсолютных величин. В алгоритме сжатия осуществлялось обнулением коэффициентов, абсолютные значения которых меньше заданного порогового.

Эксперименты показали, что с помощью дискретного преобразования Хаара, без значительной потери информации, возможно сжатие записей данных (осциллограмм) в 1,6 – 2 раза.

Заключение. Таким образом, разложение сигнала на составляющие с учетом разрешения по времени и по частоте дает возможность анализа составляющих и выявления особенностей сигнала. Представление сигнала мониторинга сложного явления или процесса в виде совокупности его последовательных приближений позволяет получать в зависимости от целей задачи грубую версию или более детальную, а так же исключать определенные составляющие, например шумы или малозначимые детали. Так же вейвлет-анализ широко используется для сжатия данных инструментальных наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 272 с.
2. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002. 446 с.
3. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. / Под ред. И. Б. Фоменко. М.: Связь, 1980. 248 с.

Об оценках погрешности кубатурных формул, точных для полиномов Хаара

Кириллов К. А.

Сибирский федеральный университет, Красноярск;
kkirillov@rambler.ru

На пространствах S_p и H_α найдены оценки нормы функционала погрешности формул приближенного интегрирования, обладающих d -свойством Хаара (на S_p — в одномерном, на H_α — в одномерном и двумерном случаях).

Задача построения и исследования кубатурных формул, точных на некотором конечномерном классе функций, характеризует одно из важных направлений теории приближенного интегрирования. Ранее эта задача в основном решалась для вычисления интегралов, точных на алгебраических и тригонометрических многочленах.

Кубатурные (квадратурные) формулы, точные для системы функций Хаара, впервые были построены И.М. Соболев в [1]. Описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих d -свойством Хаара (формул, точных на константах и функциях Хаара первых d групп), было проведено в [2].

В двумерном случае задача построения кубатурных формул, обладающих d -свойством Хаара (формул, точных для полиномов Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d), решалась в [3]–[5]; исследование нормы функционала погрешности указанных кубатурных формул проводилось на пространствах S_p в [6] — была найдена верхняя оценка нормы функционала погрешности этих формул

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leq 2^{\frac{1}{p}} \cdot (2^d)^{-\frac{1}{p}},$$

и установлено, что в случае $N \sim 2^d$ при $d \rightarrow \infty$

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \sim 2^{\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

В представленной работе продолжены эти исследования. Рассматриваются квадратурные (кубатурные) формулы

$$I[f] = \int_{[0,1]^n} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N C_i f(x^{(i)}) = Q_N[f], \quad (1)$$

где $f(x)$ — функция, определенная и суммируемая на $[0, 1]^n$, $x^{(i)} \in [0, 1]^n$ — узлы формулы ($n = 1, 2$), C_i — коэффициенты формулы при узлах (вещественные числа), $i = 1, 2, \dots, N$. Норма функционала погрешности $\delta_N[f] = I[f] - Q_N[f]$ формул (1), обладающих d -свойством Хаара, на пространствах S_p изучена в одномерном, а на пространствах H_α — в одномерном и двумерном случаях.

На пространствах S_p найдена нижняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул, точных на константах:

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \geq 2^{-\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}},$$

и верхняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул, обладающих d -свойством Хаара:

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leq (2^d)^{-\frac{1}{p}}.$$

На пространствах H_α получены верхние оценки нормы функционала погрешности формул приближенного интегрирования, обладающих d -свойством Хаара, которые в одномерном случае записываются в виде

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \leq (2^{-\alpha d-1})(2^\alpha - 1)^{-1},$$

а в двумерном — в виде

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \leq 2^{-\alpha d-2} [d(2^\alpha - 1)^{-1} + (2^{\alpha+2} - 3)(2^\alpha - 1)^{-2}].$$

Установлены также следующие факты: для исследованных формул $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ в одномерном случае при $N = 2^{d-1}$ имеет наилучший порядок сходимости к нулю, равный $N^{-\frac{1}{p}}$, $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*}$ в одномерном случае при $N = 2^{d-1}$ ограничена по сравнению с $N^{-\alpha}$, $N \rightarrow \infty$, а в двумерном при $N \sim 2^d$, $d \rightarrow \infty$ — по сравнению с $N^{-\alpha} \ln N$, $N \rightarrow \infty$, что соответствует результатам, полученным И. М. Соболев для некоторых из построенных им кубатурных формул. В то же время исследованные в настоящей статье формулы, будучи минимальными (близкими к минимальным) формулами приближенного интегрирования при указанных ограничениях на число узлов, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
2. Кириллов К. А., Носков М. В. Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. №6. С. 791–799.
3. Кириллов К. А. Построение минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара высших степеней в двумерном случае // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10. Спец. выпуск. С. 29–47.
4. M. V. Noskov, K. A. Kirillov. Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials // Journal of Approximation Theory. Volume 162. Issue 3. March 2010. P. 615–627.
5. Кириллов К. А. Алгоритм построения минимальных кубатурных формул, обладающих d -свойством Хаара в двумерном случае // Научный журнал Сибирского федерального ун-та. Серия «Математика и физика». 2010. Т. 3. №2. С. 205–215.
6. Кириллов К. А., Носков М. В. Оценки погрешности на пространствах S_p кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. №1. С. 3–13.

Ценностное моделирование для решения уравнения Смолуховского с линейными коэффициентами коагуляции

Коротченко М. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; kmaria@osmf.ssc.ru

Введение. В настоящей работе для численного решения уравнения Смолуховского в однородном по пространству случае применяются весовые алгоритмы ценностного моделирования. Уравнение Смолуховского описывает широкий класс процессов коагуляции в физических системах; примерами коагуляции являются процессы полимеризации, створаживания молока и многие другие. В случае парного слипания частиц, который будет

рассматриваться далее, уравнение Смолуховского принимает вид:

$$\frac{\partial n_l(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=l} K_{ij} n_i(t) n_j(t) - \sum_{i \geq j} K_{il} n_i(t) n_l(t), \quad n_l(0) = n_l^{(0)}, \quad l \geq 0,$$

где $n_l(t)$ – числовая плотность частиц размера l в момент времени t (размер частицы l принимает натуральные значения); K_{ij} – заданные коэффициенты коагуляции. Численное решение уравнения понимается в смысле оценки линейных функционалов от функции $n_l(t)$.

Решение кинетического уравнения можно оценивать с помощью моделирования марковского процесса эволюции N -частичного ансамбля. Введение номера взаимодействующей пары π в число координат фазового пространства позволило в работе [2] получить интегральное уравнение (1) специального вида:

$$F(Z, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} F(Z', t') K(Z', t' \rightarrow Z, t) dZ' dt' + F_0(Z) \delta(t), \quad (1)$$

где $Z = (X, \pi)$, $X = (N, l_1, \dots, l_N)$, $N \leq N_0$, l_i – размер i -й частицы, $dZ = dX d\mu_0(\pi)$, причем интегрирование по мере μ_0 означает суммирование по всем номерам пар π . Ядро данного уравнения содержит сингулярности лишь в качестве сомножителей и имеет вид $K(Z', t' \rightarrow Z, t) = r(t' \rightarrow t | X') \frac{a'(\pi)}{A(X')} k(l_i, l_j \rightarrow l)$. Здесь и далее использованы следующие обозначения:

$r(t' \rightarrow t | X') = A(X') \exp\{-(t - t')A(X')\}$ – плотность распределения времени между столкновениями в ансамбле;

$$A(X) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N a(N, l_i, l_j), \quad \text{где } a(N, l_i, l_j) = \sum_{l=1}^{\infty} k(l_i, l_j \rightarrow l);$$

$k(l_i, l_j \rightarrow l) = N_0^{-1} K_{l_i, l_j} \delta_{l_i + l_j, l}$ определяет преобразование ансамбля при взаимодействии пары с номером π , в результате которого происходит замена взаимодействующих частиц на одну частицу размера $l = l_i + l_j$, при этом $N = N' - 1$;

$a(\pi)/A(X)$ – вероятность выбора значения $\pi = (i, j)$.

Факторизованный вид ядра уравнения (1) позволяет использовать его для построения стандартных весовых методов моделирования многочастичных систем.

Как правило, при решении уравнения (1) вычисляют функционалы вида $J_H(t) = (\Phi, H)$ от “потока частиц” $\Phi(X, t) = A^{-1}(X) \sum_{\pi} F(Z, t)$ в заданные моменты времени.

В работе [2] для функции $\tilde{H}(X, t) = H(X) \exp\{-A(X)t\}$, $H(X) \in L_{\infty}$ получено следующее равенство:

$$J_H(T) = \int_0^T \int_{\mathbb{Z}} \tilde{H}(X, T - t') F(Z, t') dZ dt' = (F, \tilde{H}).$$

С помощью этого равенства для оценки функционала $J_H(T)$ можно использовать весовую оценку “по столкновениям”:

$$\xi = \sum_{i=0}^{\nu} Q_n \tilde{H}(X_n, T - t_n), \quad \text{где } \nu = \max\{n : t_n < T, n = 0, 1, \dots\},$$

а веса Q_n определяются через отношение физических и моделируемых плотностей перехода. Для этого рассмотрим вспомогательную цепь Маркова, в которой будет использовано полное ценностное моделирование, т. е. каждый элементарный переход будет моделироваться по ценности, а именно: время между столкновениями и номер пары взаимодействующих частиц. При этом для моделирования времени между столкновениями будет использоваться приближение к функции ценности, полученное для задачи с постоянными коэффициентами (см. [1]). Для ценностного выбора номера пары взаимодействующих частиц разработан новый алгоритм, который является обобщением алгоритмов, предложенных в работах [1] и [4] для постоянных ($K_{ij} \equiv 1$) и аддитивных ($K_{ij} \equiv (i + j)/2$) коэффициентов, соответственно.

Тестовая задача коагуляции. Далее будет рассмотрено ценностное моделирование с целью оценки решения тестовой задачи для уравнения (1) с линейными коэффициентами

$$K_{ij} \equiv a + b(i + j)/2 \quad \text{и} \quad n_l(t = 0) = \delta_{l,1}, \quad l \geq 1,$$

Такие коэффициенты являются линейной комбинацией постоянного и аддитивного коэффициентов и возникают, например, в модели полимеризации $A-R-B_{f-1}$, где $f \geq 3$ — общее число молекул типа A и B в мономере (см., например, в [3]). В этом случае скорость полимеризации K_{ij} пропорциональна величине $(i + j)(f - 2) + 2$. Точное решение данной задачи Коши известно (см., например, [5]) и имеет следующий вид:

$$n_1(\mu(t)) = \mu \cdot \left(\frac{a\mu + b}{a + b} \right)^{1+b/a}, \quad n_2(\mu(t)) = \mu \cdot (1 - \mu) \cdot \left(\frac{a\mu + b}{a + b} \right)^{1+2b/a},$$

$$\mu(t) = \frac{b}{(a + b) \exp\{bt/2\} - a}.$$

Для такой задачи аналитически вычисляются

$$A(X) = \frac{(N - 1)}{2} \left[a \frac{N}{N_0} + b \right], \quad a(\pi) \equiv a(N, l_i, l_j) = \frac{2a + b(l_i + l_j)}{2N_0}.$$

Численные результаты. В качестве оцениваемых функционалов были выбраны $J_H^{(1)}(T)$ и $J_H^{(12)}(T)$, то есть среднее число мономеров и суммарное число мономеров и димеров, соответственно, в момент времени T . Смещение оценок относительно $n_1(T)$ и $n_1(T) + n_2(T)$ объясняется конечностью величины N_0 .

С целью обрыва цепи Маркова при моделировании вводится параметр ε для продления временного интервала, на котором строится данная цепь. В численных экспериментах было использовано значение $\varepsilon = 10^{-5}$, которое дает почти минимальную (по ε) дисперсию, не сильно увеличивая среднее число столкновений, в сравнении с прямым моделированием.

Обозначения в таблицах: N_0 — начальное количество частиц; M — количество моделируемых траекторий; σ — среднеквадратическое отклонение; t_c — время расчета (секунд) на РС Pentium 4 (3.5 GHz); S_d, S_v — трудоемкости алгоритмов прямого статистического моделирования (подсчет числа мономеров или суммы мономеров и димеров при $t = T$) и ценностного моделирования, соответственно.

Результаты, приведенные в таблицах 1–2, показывают, что при полном ценностном моделировании наблюдается уменьшение трудоемкости оценки искомых функционалов, которое особенно замечено при больших значениях T .

Кроме того, результаты расчетов, приведенные в таблицах 3–4, показывают, что с помощью разработанных алгоритмов ценностного моделирования можно оценивать малые величины, которые невозможно оценить с помощью прямого моделирования за сопоставимое время.

ЛИТЕРАТУРА

Таблица 1: Оценка функционала $J_H^{(1)}(T)$ для $a = 1, b = 2$ ($T = 0.1; 1; 10$).

Моделирование	$\tilde{J}_H^{(1)}(T)$	$\bar{\sigma}$	RE (%)	t_c	S_d/S_v
$n_1(0.1) = 7.5131 \cdot 10^{-1}$ ($T = 0.1; M = 10^4; N_0 = 10^3$)					
прямое	$7.5053 \cdot 10^{-1}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	0.10	4.8	--
ценностное	$7.5155 \cdot 10^{-1}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	0.03	5.5	1.79
$n_1(1) = 1.2263 \cdot 10^{-1}$ ($T = 1; M = 10^4; N_0 = 10^3$)					
прямое	$1.2266 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	0.02	37.7	--
ценностное	$1.2271 \cdot 10^{-1}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	0.07	34.9	6.09
$n_1(10) = 8.9684 \cdot 10^{-6}$ ($T = 10; M = 10^5; N_0 = 2 \cdot 10^2$)					
прямое	$9.4500 \cdot 10^{-6}$	$6.9 \cdot 10^{-7}$	5.37	68.9	--
ценностное	$8.6176 \cdot 10^{-6}$	$5.4 \cdot 10^{-8}$	3.91	74.9	152

Таблица 2: Оценка функционала $J_H^{(12)}(T)$ для $a = 1, b = 2$ ($T = 0.1; 10$).

Моделирование	$\tilde{J}_H^{(12)}(T)$	$\bar{\sigma}$	RE (%)	t_c	S_d/S_v
$n_1(0.1) + n_2(0.1) = 8.4460 \cdot 10^{-1}$ ($T = 0.1; M = 10^4; N_0 = 10^3$)					
прямое	$8.4363 \cdot 10^{-1}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	0.12	4.6	--
ценностное	$8.4516 \cdot 10^{-1}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	0.07	5.3	3.85
$n_1(10) + n_2(10) = 1.2954 \cdot 10^{-5}$ ($T = 10; M = 10^5; N_0 = 2 \cdot 10^2$)					
прямое	$1.3600 \cdot 10^{-5}$	$8.3 \cdot 10^{-7}$	5.37	64.1	--
ценностное	$1.2594 \cdot 10^{-5}$	$7.2 \cdot 10^{-8}$	2.78	72.5	117

Таблица 3: Оценка функционала $J_H^{(1)}(T)$ для $a = 2, b = 10$ ($T = 10$).

Моделирование	$\tilde{J}_H^{(1)}(T)$	$\bar{\sigma}$	RE (%)
$n_1(10) = 5.3828 \cdot 10^{-23}$ ($T = 10; M = 10^6; N_0 = 10^3$)			
ценностное	$5.3047 \cdot 10^{-23}$	$1.9 \cdot 10^{-25}$	1.45
прямое	0.0	--	100

Таблица 4: Оценка функционала $J_H^{(12)}(T)$ для $a = 2, b = 10$ ($T = 10$).

Моделирование	$\tilde{J}_H^{(12)}(T)$	$\bar{\sigma}$	RE (%)
$n_1(10) + n_2(10) = 7.5460 \cdot 10^{-23}$ ($T = 10; M = 10^6; N_0 = 10^3$)			
ценностное	$7.4278 \cdot 10^{-23}$	$2.1 \cdot 10^{-25}$	1.57
прямое	0.0	--	100

1. *Коротченко М. А.* Статистические алгоритмы ценностного моделирования для решения уравнения Смолуховского // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, Специальный выпуск 4. С. 68–74.
2. *Михайлов Г. А., Рогачинский С. В.* Весовые методы Монте–Карло для приближенного решения нелинейного уравнения Больцмана // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 620–628.
3. *Flory P. J.* Principles of polymer chemistry. Ithaca, New York: Cornell University Press, 1953.
4. *Korotchenko M. A.* Value simulation for solving the Smoluchowski equation with linear coefficients // Proceedings of the 6th St.Petersburg Workshop on Simulations. Volume I. VVM com. Ltd., 2009. P. 55–63.
5. *Spouge J. L.* Solutions and critical times for the monodisperse coagulation equation when $a(i, j) = A + B(i + j) + Cij$ // J. Phys. A: Math. Gen., 1983. V. 16. P. 767–773.

Представление функционала погрешности кубатурной формулы в пространстве Соболева с нормой, осложненной биномиальными коэффициентами

Корытов И. В.

Иркутский государственный университет, Иркутск; kor2003@inbox.ru

В работе показано представление финитного функционала погрешности через локально суммируемую функцию. В представлении используется известное фундаментальное решение одного эллиптического оператора. При этом, для нормирования пространства Соболева не используются псевдодифференциальные операторы. Ни норма, ни представление функционала не совпадают с описанными ранее ни при каких значениях наибольшего порядка производных функций рассматриваемого класса.

Локально суммируемая функция, реализующая функционал погрешности кубатурной формулы в основном пространстве, является решением некоторого дифференциального уравнения с частными производными в обобщенных функциях. Если уравнение является линейным с постоянными коэффициентами, то такая функция представляет собой свертку правой части с фундаментальным решением. В случае фактор-пространств таким уравнением выступает полигармоническое, где оператором является оператор Лапласа соответствующего порядка [1], [2]. В пространстве же Соболева, нормированном с участием производных всех порядков, оператор содержит сумму операторов Лапласа с возрастанием порядка, и нахождение фундаментального решения такого уравнения представляет значительную трудность. Поскольку уравнение строится на основе нормы основного пространства, то задача решается обычно подбором такой нормы, чтобы фундаментальное решение соответствующего уравнения было известным.

В данной работе в отличие от [3] норма определена таким образом, что при ее построении не используются псевдодифференциальные операторы.

Рассматривается пространство Соболева $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)$ основных функций φ с нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)} = \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1)$$

Функционал погрешности кубатурной формулы

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}_n} \left(\chi_{\Omega}(x) - \sum_{k=0}^N c_k \delta(x - x^{(k)}) \right) \varphi(x) dx,$$

где c_k — коэффициенты, $x^{(k)}$ — узлы, является финитным: $\exists r > 0: \text{supp } l \subset B(a, r)$. Здесь $B(a, r)$ шар с центром $a \in \mathbf{R}_n$ и радиусом r . Область интегрирования $\Omega \subset B(a, r)$ имеет характеристическую функцию

$$\chi_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

На параметры пространства $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)$ накладываются ограничения

$$pm > n, \quad 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1. \quad (2)$$

Покажем, что представление существует, единственно и реализуется функцией, локально суммируемой в степени q вместе со всеми своими производными.

Теорема 1. *Существует функция $\psi \in W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)$, реализующая на произвольной функции $\varphi \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)$ с нормой (1) и при условиях (2) данный линейный функционал в виде*

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{\alpha} \psi D^{\alpha} \varphi dx \quad (3)$$

с нормой $\|l\|_{W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n)} = \|\psi\|_{W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)}$.

Доказательство. Последовательное применение неравенств Гельдера к выражению (3) приводит к оценке

$$|\langle l, \varphi \rangle| \leq \|\psi\|_{W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)} \|\varphi\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)},$$

что означает, во-первых, ограниченность функционала, во-вторых, необходимость принадлежности функции ψ пространству $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)$, откуда

$$\frac{|\langle l, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)}} \leq \|\psi\|_{W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)}.$$

Далее, поскольку правая часть неравенства не зависит от функций $\varphi \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)$, и неравенство верно для всех таких функций, то

$$\sup_{\varphi \neq 0} \frac{|\langle l, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)}} \leq \|\psi\|_{W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)},$$

что согласно определению нормы дает

$$\|l\|_{W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n)} \leq \|\psi\|_{W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)}. \quad (4)$$

Для построения обратного неравенства рассмотрим функционал на функции θ :

$$D^{\alpha} \theta = |D^{\alpha} \psi|^{1/(p-1)} \text{sign} D^{\alpha} \psi, \quad \forall |\alpha| \leq m, \quad (5)$$

он будет равен

$$\langle l, \theta \rangle = \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \psi|^q dx = \left\| \psi \Big| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\|^q. \quad (6)$$

Далее из (5) следует

$$D^\alpha \psi = |D^\alpha \theta|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \theta, \quad \forall |\alpha| \leq m.$$

Известно, что для любой $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, функция $|f|^{p-1} \operatorname{sign} f \in L_q$ [1]. Так как $\psi \in W_q^{(m)}$, то $D^\alpha \psi \in L_q$, следовательно, $D^\alpha \theta \in L_p$, $|\alpha| \leq m$, $\theta \in W_p^{(m)}$. Таким образом, норма функции θ удовлетворяет соотношению

$$\left\| \theta \Big| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\|^p = \left\| \psi \Big| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\|^q. \quad (7)$$

Далее из

$$\langle l, \theta \rangle \leq \left\| l \Big| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n) \right\| \left\| \theta \Big| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\|$$

с учетом (6) и (7) следует

$$\left\| l \Big| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n) \right\| \geq \frac{|\langle l, \theta \rangle|}{\left\| \theta \Big| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\|} = \left\| \psi \Big| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\|.$$

Получилось неравенство, обратное к (4), следовательно,

$$\left\| l \Big| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n) \right\| = \left\| \psi \Big| W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n) \right\|.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Функция, реализующая представление (3) в условиях теоремы 1, единственна в пространстве обобщенных функций и имеет вид*

$$\psi = G_{2m} * l \quad (8)$$

где G_{2m} — фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha}.$$

Доказательство основано на интегрировании по частям (3)

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha} \psi \varphi dx,$$

что равносильно дифференциальному уравнению в обобщенных функциях

$$\sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha} \psi = l.$$

Оператор уравнения линеен и имеет постоянные коэффициенты. Согласно [4] решение такого уравнения единственно в пространстве обобщенных функций и равно свертке его фундаментального решения с правой частью, что доказывает утверждение теоремы. Фундаментальное решение его известно и приведено в [5].

Теорема 3. Функция (8) в условиях (2) принадлежит пространству $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)$ с нормой вида (1).

Доказательство. Для доказательства требуется установить суммируемость в степени q частных производных всех порядков $|\alpha| \leq m$ функции G_{2m} . На основании оценок [5]

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C e^{-|x|} |x|^{\frac{2m-n-1}{2}}, \quad |x| > 1,$$

все частные производные убывают на бесконечности по экспоненциальному типу, и несобственные интегралы вне единичного шара от каждой производной сходятся. Оценка внутри единичного шара разбивается на три случая. Несобственный интеграл от оцениваемой функции

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C(1 - \ln |x|), \quad |x| < 1,$$

сходится при $n - 2m + |\alpha| = 0$ и четном $|\alpha|$. При $n - 2m + |\alpha| < 0$ интеграл от оценки

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C, \quad |x| < 1,$$

является собственным. При $n - 2m + |\alpha| = 0$ и нечетном $|\alpha|$ или $n - 2m + |\alpha| > 0$ несобственный интеграл от оценки

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C \frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, \quad |x| < 1,$$

возведенной в степень q сходится при $p(2m - |\alpha|) > n$. Следовательно, интегралы от производных наивысшего порядка оцениваются сходящимся несобственным интегралом при $pm > n$.

На основании сказанного и с учетом ограниченности линейного функционала в L_q [1] для всех $|\alpha| \leq m$ интегралы от производных свертки, возведенных в степень q , сходятся при $pm > n$, следовательно $D^\alpha G_{2m} * l \in L_q(\mathbf{R}_n)$, $|\alpha| \leq m$ и $G_{2m} * l \in W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n)$, т. е. свертка и ее производные всех порядков локально суммируемы в степени q .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. : Наука, 1974.
2. *Половинкин В. И.* Формула для функций, реализующих функционалы // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42, №4. С. 920–925.
3. *Шойнжуров Ц. Б.* Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных : Дис. . . . докт. физ.-мат. наук. Улан-Удэ, 1977.
4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1977.

Об одной оптимальной интерполяционной формуле

Кулдошев Х. М.

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент,
Узбекистан; hakim71@rambler.ru

Для того чтобы найти приближенное представление функции φ с помощью элементов определенного конечномерного пространства возможно использование значений данной функции на некотором конечном множестве точек x_β , $\beta = 0, 1, \dots, N$. Соответствующая задача называется *задачей интерполяции* и точки x_β называются *узлами интерполяции*.

Существуют полиномиальные и сплайн интерполяции. В настоящее время теория сплайн интерполяции быстро развивается. По теории сплайн функций ввели и введут исследования многие авторы.

Пусть функции φ принадлежат к гильбертово пространству (см. [1])

$$K^m(0, 1) = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi^{(m-1)} \text{ — абсолютно непрерывные и } \varphi^{(m)} \in L_2(0, 1)\},$$

снабженный с нормой

$$\|\varphi\| = \left(\int_0^1 (L\varphi(x))^2 dx \right)^{1/2} \quad (1)$$

и $\int_0^1 (L\varphi(x))^2 dx < \infty$, где

$$L \equiv a_m(x) \cdot \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x) \cdot \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_0(x), \quad (2)$$

здесь каждый $a_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots, m$) из $C^j[0, 1]$ и $a_m(x)$ не превращается в ноль на $[0, 1]$. Пусть L^* является формально смежной к L и

$$L^* \equiv (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \{a_m(x) \cdot \} + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \{a_{m-1}(x) \cdot \} + \dots - \frac{d}{dx} \{a_1(x) \cdot \} + a_0(x).$$

Равенство (1) является полу нормой и $\|\varphi\| = 0$ тогда и только тогда когда $L\varphi = 0$.

Если $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ является сетка на $[0, 1]$, тогда *обобщенный сплайн* (или *L-сплайн*) дефекта k ($0 \leq k \leq m$) по Δ это функция $S_\Delta(x)$, которая принадлежит $K^{2m-k}(a, b)$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$L^*LS_\Delta = 0 \quad (3)$$

на каждом открытом интервале сетки Δ [1]. Обычный сплайн (дефекта 1) имеет разрывы в производном порядка $(2m - 1)$, но только в узлах сетки.

Задача. Пусть на сетке $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ отрезка $[0, 1]$, где $N \geq m$ заданы $N + 1$ вещественных чисел r_i , $i = 0, 1, \dots, N$. Требуется среди всех функций $f \in K^{(m)}(0, 1)$, для которых

$$f(x_i) = r_i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

найти такую, для которой функционал

$$l_m(f) = \int_0^1 (Lf)^2 dx$$

принимает наименьшее значение.

Эта задача называется задачей минимальной нормы и она в различных пространствах исследована многими математиками (см. например, [1-6] и библиографию в них).

В настоящей работе задача минимальной нормы исследована в пространстве $K^{(2)}(0, 1)$ при $L \equiv d^2/dx^2 - 1$ и справедлива следующая

Теорема. На сетке $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ отрезка $[0, 1]$, где $N \geq 2$ при заданных $N + 1$ вещественных чисел r_i , $i = 0, 1, \dots, N$ среди всех функций $f \in K^{(2)}(0, 1)$, для которых

$$f(x_i) = r_i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

существует единственная функция

$$S_2(x) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta G(x - x_\beta) + d_1 e^{-x} + d_2 x e^{-x},$$

где $G(x) = \frac{1}{8} \operatorname{sign} x \cdot (e^x(x-1) + e^{-x}(x+1))$, дающая минимум функционалу

$$I_2(f) = \int_0^1 (f'' - f)^2 dx.$$

Кроме того, коэффициенты функции $S_2(x)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma G(x_\beta - x_\gamma) + d_1 e^{-x_\beta} + d_2 x_\beta e^{-x_\beta} &= r_i, \\ \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma e^{-x_\gamma} &= 0, \\ \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma x_\gamma e^{-x_\gamma} &= 0. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The theory of splines and their applications, Mathematics in Science and Engineering, New York: Academic Press, 1967.
2. Arcangeli R., Lopez M. C. de Silanes, Torrens J. J. Multidimensional minimizing splines, Kluwer Academic publishers. Boston, 2004, 261 p.
3. De Boor C. A practical guide to splines, Springer-Verlag, 1978.
4. Васильенко В. А. Сплайн функции: Теория, алгоритмы, программы, Новосибирск, 1983, 216 с.
5. Игнатьев М. И., Певный А. Б. Натуральные сплайны многих переменных, Наука, Ленинград, 1991.
6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация, Мир, Москва, 1975, 496 с.

Имитационное моделирование процесса распространения лесного пожара по неоднородному слою горючего материала Лепп Н. Э., Ушанов С. В.

Сибирский государственный технологический университет, г. Красноярск;

Случайный характер процесса распространения огня в лесу, обусловленный влиянием множества факторов, отмечался в работах [1–3] и др. Первые попытки моделирования процесса распространения лесного пожара по методу Монте-Карло были предприняты в работах [4,5]. Однако количественное описание вероятностных характеристик процесса распространения не было получено.

Эффект увеличения средней скорости движения фронта за счет влияния важнейшего фактора-скорости ветра, показан в [6]. Подобный эффект проявляется еще сильнее при учете случайного распределения свойств горючего [3]. Важное практическое значение имеет оценка влияния неоднородности слоя лесных горючих материалов (ЛГМ) на скорость распространения, динамику и интегральные характеристики развития кромки лесного пожара (ЛП) [2,3].

В данной работе рассматривается задача моделирования случайного поля скорости распространения кромки пожара по неоднородному слою ЛГМ на основе модифицированной модели Р. Ротермела [6]. Каждый из наиболее значимых параметров, характеризующих теплофизические свойства слоя ЛГМ (глубина слоя, запас горючего материала, теплопроводная способность материала, влагосодержание), формируется как отдельное случайное поле

(СП) на плоскости с заданными характеристиками. Численное моделирование поля проводится по авторегрессионной схеме [7].

Алгоритм расчета входных параметров модели:

$$z_{00} = \sigma \cdot \xi_{00}$$

$$z_{i0} = \rho_1 x_{i-1,0} + \sigma \sqrt{1 - \rho_1^2} \cdot \xi_{i0}, \quad j \geq 1,$$

$$z_{0j} = \rho_2 x_{0,j-1} + \sigma \sqrt{1 - \rho_2^2} \cdot \xi_{0j}, \quad i \geq 1,$$

$$z_{ij} = \rho_1 x_{i-1,j} + \rho_2 x_{i,j-1} - \rho_1 \rho_2 + \sigma \sqrt{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)} \cdot \xi_{ij} \quad i, j \geq 1,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} z_{i,j}, x_{ij} \in [x_{min}, x_{max}], \\ x_{min}, z_{ij} < x_{min}, \\ x_{max}, z_{ij} < x_{max}. \end{cases}$$

Здесь ξ_{ij} двумерное СП гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, x_{ij} двумерное СП значений входного параметра, x_{min}, x_{max} его минимальное и максимальное значение, σ^2 — заданное значение дисперсии, ρ_1 и ρ_2 — коэффициенты корреляции соседних элементов поля по столбцу и строке соответственно.

Заданные вероятностные характеристики генерируемого поля (математическое ожидание M_{zad} и дисперсия D_{zad}) определяются решением системы [8]:

$$\begin{cases} M_{zad} = M(\mu, \sigma) = \mu - (\lambda_2 - \lambda_1)\sigma, \\ D_{zad} = D(\mu, \sigma) = (1 + \lambda_1 \xi_1 - \lambda_2 \xi_2 - (\lambda_2 - \lambda_1)^2)\sigma^2. \end{cases}$$

где μ, σ , — искомые параметры нормального распределения; $a_1 < a_2$ точки усечения, $\varphi(x)$ — плотность вероятностей стандартного нормального распределения $N(0, 1)$, $\Phi(x)$ — функция Лапласа,

$$\lambda_1 \frac{\varphi(\xi_1)}{\Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_1)}, \quad \lambda_2 \frac{\varphi(\xi_2)}{\Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \frac{a_1 - \mu}{\sigma}, \quad \xi_2 = \frac{a_2 - \mu}{\sigma}.$$

Расчеты процесса распространения выполнены в системе MathCad волновым алгоритмом Ли на шаблоне из 32 точек на квадратной решетке 300×300 .

На рисунке 1 представлены результаты вычислительных экспериментов, соответствующих моделированию распространения низового лесного пожара при вариации запаса ЛГМ и глубины слоя горючего для наиболее горимого соснового лишайникового леса (запас горючих материалов $\omega = 1,7 \text{ кг/м}^2$, глубина слоя $\delta = 0,12 \text{ м}$, критическое влагосодержание $M_x = 0,4$) при скорости ветра $5,5 \text{ м/с}$ по направлению 30° , коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0,2, \rho_2 = 0,7$.

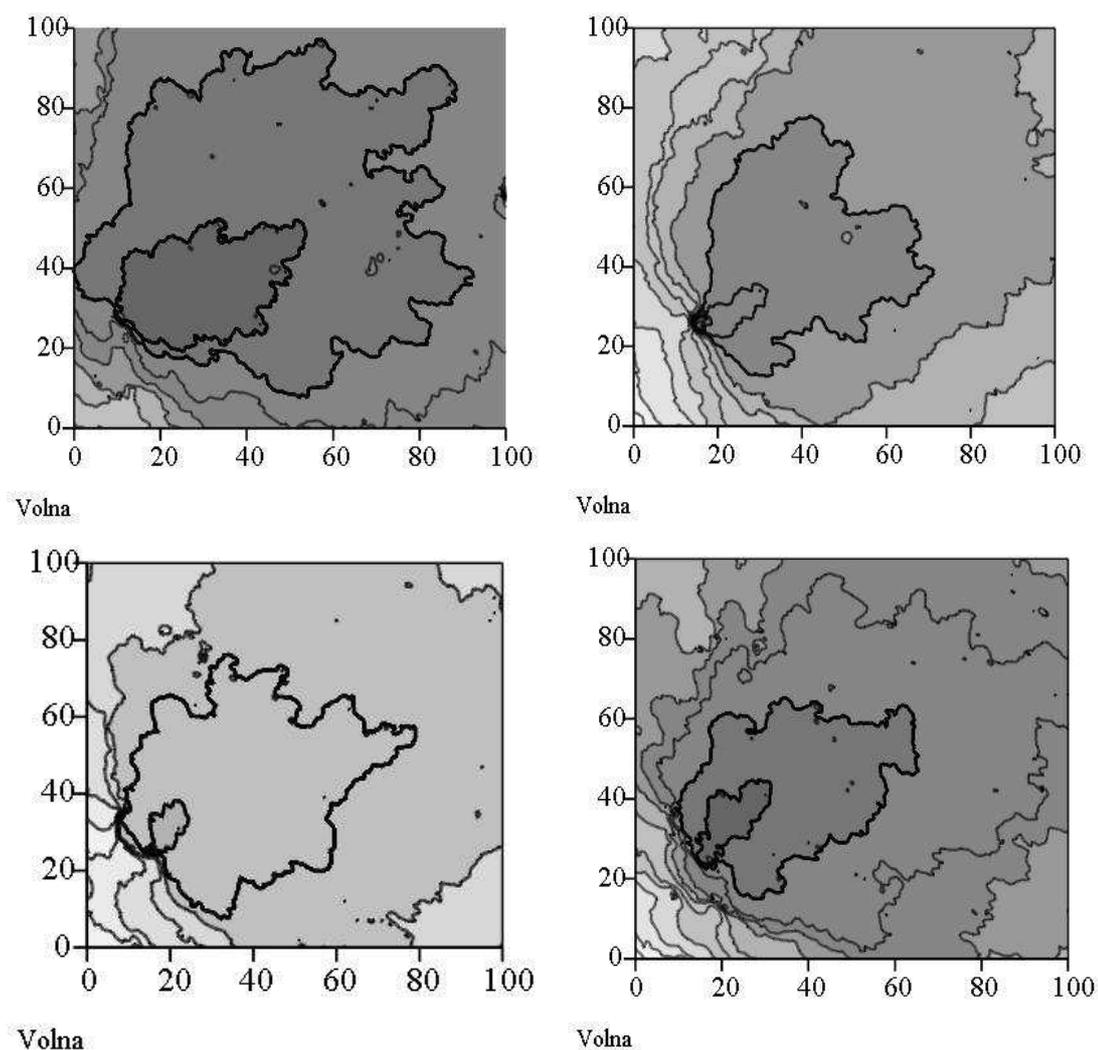


Рис. 1. Реализации процесса распространения ЛП на случайных гауссовских полях скоростей.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что неоднородность слоя ЛГМ оказывает существенное влияние на параметры распространения и конфигурацию горящей кромки. Основной проблемой при моделировании (вычислении) скорости распространения является определение вероятностных характеристик случайных полей входных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доррер Г. А. Динамика лесных пожаров. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. 404 с.
2. Тарасенко А. А. Влияние пространственных флуктуаций пирологических параметров среды на интегральные характеристики низового лесного пожара и условия его тушения. Автореф. дисс. к.т.н.: Харьков. 2004. 20 с.
3. Лепт Н. Э., Ушанов С. В., Фадеенков О. В. Влияние характеристик случайного поля скорости распространения на параметры лесного пожара // Сборник материалов молодых ученых: Труды молодых ученых-участников международной конференции "Современные проблемы математики и механики". Томск: Изд-во ТГУ, 2010. С. 108–111.
4. Доррер Г. А. Оценка статистических характеристик контуров лесных пожаров // Физика горения и взрыва, 1978. № 2. С. 71–76.

5. Kourtz, P. H., O'Regan, W. G. A model for a small forest fire to simulate burned and burning areas for use in a detection model // *Forest Science*, 1971. Vol. 17. № 2. P. 163–169.

6. Гусев В. Г., Корчунова И. Ю. О методе расчета скорости распространения лесного низового пожара // *Лесные пожары и борьба с ними. Сборник научных трудов*. Л.: ЛенНИИЛХ, 1986. С. 31–50.

7. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005. 259 с.

8. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.

PARMONC — универсальная библиотека программ для распределенных вычислений по методу Монте-Карло

Марченко М. А.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; marchenko@sscc.ru*

Библиотека PARMONC предназначена для использования на многопроцессорных кластерах для широкого круга приложений метода Монте-Карло, имеющих большую вычислительную трудоемкость. яДромь библиотеки является тщательно протестированный, быстрый и надежный длиннопериодный генератор псевдослучайных чисел, разработанный в Лаборатории методов Монте-Карло ИВМиМГ СО РАН. Библиотечные подпрограммы могут быть использованы в пользовательских программах, написанных на языках C, C и Fortran, причем от пользователя не требуется знание языка MPI. В процессе счета происходит автоматическое получение выборочных средних и границ погрешностей для статистических оценок, алгоритм моделирования которых задается в пользовательской подпрограмме. Имя такой подпрограммы передается в качестве аргумента в соответствующую библиотечную подпрограмму. В процессе счета результаты вычислений периодически сохраняются на жестком диске в удобном для дальнейшей обработки виде. Библиотечные подпрограммы автоматически распределяют вычислительную нагрузку по процессорам кластера. С помощью библиотеки PARMONC можно легко организовать продолжение ранее проведенных расчетов с автоматическим учетом их результатов. Также с помощью библиотеки можно моделировать коррелированные статистические оценки различных функционалов. Библиотека внедрена на кластере ССКЦ КП СО РАН <http://www2.sscc.ru/SORAN-INTEL/paper/2011/parmonc.htm>

Библиотека PARMONC предназначена для использования на многопроцессорных кластерах для широкого круга приложений метода Монте-Карло, имеющих большую вычислительную трудоемкость. яДромь библиотеки является тщательно протестированный, быстрый и надежный длиннопериодный генератор псевдослучайных чисел, разработанный в Лаборатории методов Монте-Карло ИВМиМГ СО РАН. Библиотечные подпрограммы могут быть использованы в пользовательских программах, написанных на языках C, C++ и Fortran, причем от пользователя не требуется знание языка MPI. В процессе счета происходит автоматическое получение выборочных средних и границ погрешностей для статистических оценок, алгоритм моделирования которых задается в пользовательской подпрограмме. Имя такой подпрограммы передается в качестве аргумента в соответствующую библиотечную подпрограмму. В процессе счета результаты вычислений периодически сохраняются на жестком диске в удобном для дальнейшей обработки виде. Библиотечные подпрограммы автоматически распределяют вычислительную нагрузку по процессорам кластера. С помощью библиотеки PARMONC можно легко организовать продолжение ранее

проведенных расчетов с автоматическим учетом их результатов. Также с помощью библиотеки можно моделировать коррелированные статистические оценки различных функционалов. Библиотека внедрена на кластере ССКЦ КП СО РАН <http://www2.sscs.ru/SORAN-INTEL/paper/2011/parmonc.htm>

Моделирование случайных переменных с распределением Мэйкехама

Махоткин О. А.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; oam@osmf.sscs.ru*

Введение. Существует практически важный класс одномерных распределений, плотность вероятности которых имеет вид

$$p(x) = \mu(x) \exp(-\psi(x)), \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$\mu(x) \geq 0, \quad \psi(x) = \int_0^x \mu(z) dz.$$

К этому классу распределений принадлежат показательное распределение с $\mu(x) = \lambda$ и распределение Вейбулла с $\mu(x) = kx^n$. Обобщенное распределение Мейкехама (Makeham W.M., 1889) было предложено для описания распределения смертности в биологических популяциях. Оно определяется следующими функциями

$$\mu(x) = A + Hx + B \exp(\alpha x), \quad \mu(x) \geq 0, \quad (2)$$

$$\psi(x) = Ax + \frac{H}{2}x^2 + \frac{B}{\alpha}(\exp(\alpha x) - 1).$$

Исторически первым было распределение Гомпертца (Gompertz, 1825) с $\mu(x) = B \exp(\alpha x)$. Мейкехам (1860) предложил использовать $\mu(x) = A + B \exp(\alpha x)$. Затем он же предложил использовать функцию вида (9).

Для моделирования случайных переменных с распределением Мэйкехама предлагались различные алгоритмы моделирования, например, метод двустороннего исключения и метод Метрополиса [1]².

В докладе рассматриваются алгоритмы моделирования случайных переменных с распределением Мэйкехама, использующие разработанные автором методы аппроксимации, и проведено сравнение их быстродействия.

Для упрощения алгоритмов моделирования использовалось преобразование бесконечного интервала в конечный путем замены переменной $x = X_* \cdot t$. Для $x > X_*$ плотность вероятности полагается равной нулю. Это вносит в плотность вероятности погрешность $L_* = 2P_* = 2 \exp(-\psi(X_*))$. Плотность (2) преобразуется к виду $p(t) = \mu(t) \exp(-\psi(t)) / (1 - P_*)$, где $\mu(t) = X_* \cdot \mu(x(t))$, а $\psi(t) = \int_0^t \mu(s) ds$.

Компьютерные эксперименты. Расчеты проводились на компьютере с тактовой частотой 1.68 ГГц, с процессором AMD Athlon и операционной системой Windows XP, язык программирования Turbo Pascal. Данные для тестовой плотности: $A = 6.0e - 2$, $H = -4.0e - 3$, $B = 8.0e - 3$, $\alpha = 0.08$, $X_* = 70$, $L_* = 1.1e - 9$. В описанном ниже Алгоритме 1 (в итерациях по методу Ньютона) бралось значение $\delta_{it} = 1.0e - 6$. В алгоритмах А2–А7 использовались приближения функций на равномерной сетке с m интервалами: $\{t_i = h \cdot i\}_{i=0}^m$, где $h = 1/m$. Во всех алгоритмах U, U_1, U_2, \dots означают независимые реализации случайной переменной с равномерным распределением на интервале $(0, 1)$.

²статья имеется в Интернете

В компьютерных экспериментах сравнивались 7 алгоритмов моделирования случайных переменных с плотностью (2,9).

Алгоритм 1: обращение функции распределения $\hat{F}(t)$.

$$\tilde{F}(t) = (1 - \exp(-\psi(t))); \quad \hat{F}(t) = \tilde{F}(t)/\tilde{F}(1).$$

Для обращения $\hat{F}(t)$ уравнение $\psi(\xi) = S(U)$, где $S(U) = -\ln(1 - \tilde{F}(1) \cdot U)$ решалось методом Ньютона. В качестве начального приближения t^0 выбиралось решение уравнения $B(\exp(\alpha X_* t) - 1) = \alpha \cdot S(U)$.

В Алгоритмах 2,3 обращается функция распределения $\hat{F}(t) = \tilde{F}(t)/\tilde{F}(1)$, где $\tilde{F}(t) = 1 - \exp(-\tilde{\psi}(t))$. Приближенная плотность $\hat{p}(t) = \tilde{\mu}(t) \exp(-\tilde{\psi}(t))/\tilde{F}(1)$.

Алгоритм 2: кусочно-постоянная аппроксимация функции $\mu(t) : c_i = \mu(h(i - 1/2))$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(t) &= c_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \psi_0 &= 0, \quad \psi_i = \psi_{i-1} + hc_i; \quad \tilde{\psi}(t) = \psi_{i-1} + c_i(t - t_i). \end{aligned} \quad (3)$$

Обращение кусочно-линейной функции $\hat{F}(t)$ эквивалентно решению уравнения

$$\psi_{i-1} + c_i(t - t_i) = S(U), \quad \text{для } \psi_{i-1} < S(U) \leq \psi_i. \quad (4)$$

Для этого с помощью алгоритма поиска в упорядоченной по возрастанию таблице чисел $\{\psi_i\}_{i=0}^m$ находится подходящее значение i , а затем решается линейное уравнение.

Алгоритм 3: кусочно-линейная аппроксимация функции $\mu(t) : c_i = \mu(h \cdot i)$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(t) &= c_{i-1}(1 - w) + c_i w, \quad t(w) = t_{i-1} + hw, \\ \tilde{\psi}(t) &= \psi_{i-1} + \frac{h}{2}w(c_{i-1}(2 - w) + c_i w), \quad 0 \leq w \leq 1, \\ \psi_0 &= 0, \quad \psi_i = \psi_{i-1} + \frac{h}{2}(c_{i-1} + c_i), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5)$$

Обращение кусочно-квадратичной функции $\hat{F}(t)$ эквивалентно решению уравнения

$$\psi_{i-1} + \frac{h}{2}w(c_{i-1}(2 - w) + c_i w) = S(U), \quad \text{для } \psi_{i-1} < S(U) \leq \psi_i. \quad (6)$$

Для этого с помощью алгоритма поиска в упорядоченной по возрастанию таблице чисел $\{\psi_i\}_{i=0}^m$ находится подходящее значение i , а затем решается квадратное уравнение. Из двух корней берется положительный.

В Алгоритмах 4,5 обращается функция распределения $\hat{F}(t) = \tilde{F}(t)/\tilde{F}(1)$, где $\tilde{F}(t) = \int_0^t \tilde{p}(r) dr$. Приближенная плотность $\hat{p}(t) = \tilde{p}(t)/\tilde{F}(1)$.

Алгоритм 4: кусочно-постоянная аппроксимация плотности $p(t) : c_i = p(h(i - 1/2))$.

Она определяется формулами(3,4) с заменой символов μ, ψ на p, F . Обращаемая функция распределения $\hat{F}(t)$ – кусочно-линейная.

Алгоритм 5: кусочно-линейная аппроксимация плотности $p(t) : c_i = p(h \cdot i)$.

Она описывается формулами(5, 6) с заменами символов μ, ψ на p, F . Обращаемая функция распределения $\hat{F}(t)$ – кусочно-квадратичная.

Критерием близости приближенных плотностей к точной плотности вероятности служит \mathcal{L} -расстояние

$$L = \int_0^1 dt |\hat{p}(t) - p(t)|.$$

В Таблице 1 представлена зависимость погрешности аппроксимации тестовой плотности вероятности Мэйкехама от числа интервалов сетки m для Алгоритмов 2-5. Эти погрешности были вычислены адаптивным алгоритмом, использующим двухточечную составную квадратуру Гаусса с параметром установления, равным $1.0e-5$. В последней строке таблицы представлены аппроксимации полученных значений по методу наименьших квадратов.

Таблица 1. Зависимость погрешности приближения тестовой плотности от m .

m	A2	A3	A4	A5
8	1.75e-1	4.33e-2	2.03e-1	7.14e-2
16	8.75e-2	1.10e-2	1.03e-1	1.87e-2
32	4.37e-2	2.77e-3	5.15e-2	4.84e-3
64	2.18e-2	6.92e-4	2.57e-2	1.21e-3
128	1.09e-2	1.73e-4	1.29e-2	3.03e-4
$L_{apr}(m)$	$1.41m^{-1.00}$	$2.74m^{-1.99}$	$1.61m^{-0.995}$	$4.38m^{-1.97}$

В алгоритмах A2-A5 для поиска в таблицах использовался индексно-последовательный метод с длиной таблицы индексов $M_g = m \operatorname{div} 4$.

Алгоритм 6: кусочно-постоянная аппроксимация $p(t)$.

Для моделирования использовался метод суперпозиции, в котором приближенная плотность $\hat{p}(t) = \tilde{p}(t)/\tilde{F}(1)$ представлялась в виде $\hat{p}(t) = \sum_{i=1}^m \Pi_i p(t|i)$, где $\{\Pi_i\}$ - распределение вероятности дискретной случайной переменной, а $p(t|i) = 1, h \cdot (i - 1) < t < h \cdot i$ -условные плотности вероятности для кусочно-постоянной аппроксимации.

Дискретная случайная переменная ξ с распределением $\{\Pi_i\}_{i=1}^m$ моделировалась по методу Walker'a [2], а условные – по формуле $\eta(\xi = i) := h * (i - U)$.

Алгоритм 7: кусочно-линейная аппроксимация $p(t)$.

Для моделирования также использовался метод суперпозиции, в котором приближенная плотность представлялась в виде $\hat{p}(t) = \sum_{i=0}^m \Pi_i p(t|i)$. Теперь $p(t|i)$ -условные плотности вероятности, получаемые нормализацией базисных функций кусочно-линейной аппроксимации.

Дискретная случайная переменная ξ с распределением $\{\Pi_i\}_{i=0}^m$ моделировалась по методу Walker'a, а условные – по формулам

$$\begin{aligned} \eta(\xi = 0) &:= h|U_2 - U_3|, \\ \eta(\xi = i) &:= h(i + U_2 - U_3), \quad i = 1, \dots, m - 1, \\ \eta(\xi = m) &:= 1 - h|U_2 - U_3|. \end{aligned}$$

В Таблице 2 представлены средние значения времени получения одного случайного числа для каждого из семи алгоритмов. В алгоритмах A2-A7, использующих аппроксимацию, подбирались такие числа интервалов сетки m , чтобы значение \mathcal{L} -расстояния было бы приблизительно равно $1.0e-2$ или $1.0e-3$. Для этого использовались аппроксимации функций $L(m)$, представленные в Таблице 1, с округленными до целых величин показателями степени. И использованные значения m представлены в Таблице 3.

Таблица 2. Сравнение быстродействия 7 алгоритмов моделирования по плотности Мэйкехама. t_{CPU} – в сек.

Алгоритм	1	2	3	4	5	6	7
$L = 1.0e - 2 : t_{CPU}$	3.02e-5	2.64e-6	2.47e-6	9.90e-7	1.70e-6	6.00e-7	8.80e-7
$L = 1.0e - 3 : t_{CPU}$	3.03e-5	2.80e-6	3.08e-6	1.05e-6	1.70e-6	6.60e-7	8.20e-7

Для более точной аппроксимации плотности вероятности требуется использовать большее число узлов равномерной сетки. В Таблице 3 приведены значения функции $m(L)$ для четырех методов аппроксимации тестовой плотности вероятности распределения Мэйкехама, рассчитанные по данным Таблицы 1.

Таблица 3. Зависимость числа интервалов сетки m от погрешности L для алгоритмов 2 – 5.

L	1.0e-2	1.0e-3	1.0e-4	1.0e-5	1.0e-6
A2 : $m(L) =$	1.41e2	1.41e3	1.41e4	1.41e5	1.41e6
A3 : $m(L) =$	17	53	166	523	1660
A4 : $m(L) =$	1.61e2	1.61e3	1.61e4	1.61e5	1.61e6
A5 : $m(L) =$	21	66	209	662	2090

Заключение. Результаты сравнения алгоритмов, представленные в Таблице 2, показывают, что самым быстрым является алгоритм моделирования А6, использующий кусочно–постоянную аппроксимацию плотности и метод Walker’a. Поскольку для высокой точности, равной 1.0e-6, этот метод требует 2-х массивов данных длиной более 1.6e6 слов, то можно использовать более компактную кусочно–линейную аппроксимацию плотности в сочетании с методом Walker’a для моделирования дискретных случайных величин (алгоритм А7). Этот алгоритм только незначительно уступает оптимальному по быстрдействию алгоритму А6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *David P. M. Scollnik*, Simulation random variates from Makeham’s distribution and from others with exact or nearly log–concave densities, Transactions of Society of Actuaries. Vol. 47 (1995). pp. 409–454.
2. *Walker A. J.* An efficient method for generating discrete random variables with general distributions, ASME Transactions on Math. Software. Vol. 3. No. 3 (1977), pp. 253–256.

Векторные (вероятностно-алгебраические) алгоритмы метода Монте-Карло

Михайлов Г. А., Медведев И. Н., Ухинов С. А.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; gam@osmf.sccc.ru*

Векторные алгоритмы метода Монте-Карло используются для решения систем интегральных уравнений. Их характерной особенностью является матричный вес, который после каждого перехода в моделируемой цепи Маркова домножается на матрицу ядер системы, поделенных на переходную плотность. Такие алгоритмы можно называть вероятностно-алгебраическими. На основе векторно-стохастических физических моделей были построены векторный алгоритм решения системы уравнений переноса излучения с учетом поляризации и векторный алгоритм решения многогрупповых уравнений переноса. В результате обобщения таких алгоритмов на решение систем интегральных уравнений 2-го рода было проведено исследование несмещенности и конечности дисперсий указанных "физических" векторных оценок, а так же построены алгоритм сочетания метода Монте-Карло с методом конечных сумм, и векторный стохастический алгоритм решения метагармонического уравнения. Особенно эффективным является векторное представление и на его основе обоснование стохастических оценок кратных параметрических производных. При этом особую роль играет специально сформулированная теорема о том, что спектральный радиус треугольного матрично-интегрального оператора не превосходит максимума спектральных радиусов интегральных операторов, расположенных на диагонали. На основе недавно сформулированного двойственного представления средних квадратов векторных оценок линейных функционалов осуществлена минимизация мажорантной среднеквадратической погрешности глобальной оценки решения типа гистограммы.

Об одной численной модели распространения примесей

Намсараева Г. В.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ ;
gerel@inbox.ru

Введение. Загрязнение окружающей среды в настоящее время является важной экологической проблемой общества. Выброшенная в атмосферу примесь постепенно осаждается на подстилающую поверхность, оказывая негативное воздействие на здоровье людей, животных, на растительный покров земли.

Распространение примеси в атмосфере происходит за счет движения воздушных масс, турбулентной и молекулярной диффузии. Все примеси в конечном итоге осаждаются на поверхности земли, причем тяжелые осаждаются в основном под действием гравитационного поля, а легкие — в результате турбулентного движения воздушных масс.

Изучению различных задач процесса рассеяния примесей в турбулентной атмосфере посвящены многочисленные исследования как у нас в стране: Марчук Г. И., Берлянд М. Е., Мониин А. С., Бызова Н. Л., Безуглая Э. Ю., Гаргер Е. К., Израэль Ю. А., Кароль И. Л., Обухов А. М., Пененко В. В., Алоян А. Е., Яглом А. М., Гринин А. С., Орехов Н. А., Новиков В. Н., Романов М. Ф., Федоров М. П. и др., так и за рубежом: Вайнерди Р., Гиффорд Ф., Хан С., Махони Ж. Р., Иган Б. А., Фокс О. Г. и др.

Постановка задачи. Известна математическая модель рассеяния примеси в турбулентной атмосфере, представляющая собой полуэмпирическое уравнение, решение которого удовлетворяет заданным начальным и граничным условиям:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - W \frac{\partial q}{\partial z} + \alpha q = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z} + f, t \in [t_0, T], \quad (1)$$

$$q(t_0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (2)$$

$$\left\{ K_z \frac{\partial q}{\partial z} + Wq \right\} |_{z=z_0} = \{V_s q\} |_{z=z_0}, \quad (3)$$

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0, x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, z \geq z_0, \quad (4)$$

где $q(t, x, y, z)$ — средняя концентрация примеси в атмосфере в момент времени t в точке (x, y, z) ; K_x, K_y, K_z — коэффициенты турбулентной диффузии соответственно вдоль осей Ox, Oy, Oz ; U — компонента средней скорости ветра вдоль оси Ox ; W — скорость осаждения частиц примеси вдоль оси Oz ; $\alpha = \alpha(t)$ — коэффициент, характеризующий процессы распада или вступления в реакцию примеси с внешней средой; $\varphi(x, y, z)$ — фоновая концентрация примеси в атмосфере; V_s — скорость сухого осаждения; $z_0 = const > 0$ — параметр шероховатости подстилающей поверхности; $f(t, x, y, z)$ — функция источника.

Упростим уравнение (1): примесь пассивна и консервативна, движение стационарно, ось x ориентирована в направлении ветра, вертикальные движения в атмосфере малы по сравнению с горизонтальными, диффузионный поток примеси вдоль оси x значительно меньше конвективного. Особенности поведения тяжелых примесей определяются наличием у них собственной скорости w_g осаждения, часто превышающей вертикальную скорость движения среды [1].

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$U \frac{\partial q}{\partial x} - (W - w_g) \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (5)$$

где $0 \leq y \leq H_1, 0 \leq z \leq H_2,$

$$K_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (6)$$

$$|q|_{y \rightarrow \pm\infty} \neq \infty, |q|_{z \rightarrow \pm\infty} \neq \infty, |q|_{x=0} = F(y, z). \quad (7)$$

Если предположить, что коэффициенты уравнения (5) постоянные, то упрощая это уравнение и его краевые условия, получим следующую постановку задачи:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + D_2 \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + D_3 \frac{\partial q}{\partial z}, 0 \leq x \leq M, 0 \leq y \leq H_1, 0 \leq z \leq H_2, \quad (8)$$

$$q|_{x=0} = F_1(y, z) = Q\delta(y)\delta(z-H) \quad (9)$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, q|_{y=H_1} = 0, \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, q|_{z=H_2} = 0 \quad (10)$$

$q \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Здесь $D_1 = \frac{K_y}{U}$, $D_2 = \frac{K_z}{U}$, $D_3 = \frac{W-wg}{U}$.

Будем рассматривать параболическое двухмерное по пространственным переменным y и z уравнение, где роль времени играет переменная x , по которой дует постоянный ветер.

Введение сетки. Пусть $h_1 = H_1/N_1$, $h_2 = H_2/N_2$, τ — шаг по переменной x . Введем пространственно-временную сетку, т.е. множество $\bar{\omega}^{h,\tau} = \{(y_i, z_j, \tau_k) : y_i = ih_1, z_j = jh_2, \tau_k = k\tau, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}, k = \overline{0, M}\}$. Точка (y_i, z_j, τ_k) — узел сетки. В сетке $\bar{\omega}^{h,\tau}$ выделим совокупность граничных узлов $\gamma^{h,\tau}$ и совокупность внутренних узлов $\omega^{h,\tau} = \{(y_i, z_j, \tau_k) : i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, k = \overline{1, M}\}$. Назовем k -ым слоем множество узлов сетки, соответствующих фиксированному k .

Схема переменных направлений. Для уравнения (8) построим экономичную, неявную, устойчивую разностную схему, которая называется продольно-поперечной схемой или схемой переменных направлений.

Введем в рассмотрение вспомогательный (полуцелый) слой $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{\tau}{2}$. Рассмотрим уравнение (8) во внутренних узлах сетки $\omega^{h,\tau}$ и в каждом узле (y_i, z_j, τ_k) заменим частные производные разностными аппроксимациями:

$$\frac{q_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - q_{ij}^k}{\tau/2} = \Lambda_1 q_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 q_{ij}^k + D_3 \frac{q_{i,j+1}^k - q_{ij}^k}{h_2}, \quad (11)$$

$$\frac{q_{ij}^{k+1} - q_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \Lambda_1 q_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 q_{ij}^{k+1} + D_3 \frac{q_{i,j+1}^{k+1} - q_{ij}^{k+1}}{h_2}, \quad (12)$$

где

$$\Lambda_1 q_{ij} = \frac{D_1}{h_1^2} (q_{i-1,j} - 2q_{ij} + q_{i+1,j}), \Lambda_2 q_{ij} = \frac{D_2}{h_2^2} (q_{i,j-1} - 2q_{ij} + q_{i,j+1}), \quad (13)$$

Присоединяя к полученным уравнениям аппроксимацию начальных условий

$$q_{ij}^0 = F(y_i, z_j), \quad (14)$$

и краевых условий

$$q_{0j}^{k+\frac{1}{2}} = q_{1j}^{k+\frac{1}{2}}, q_{N_1 j}^{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad (15)$$

$$q_{i0}^{k+\frac{1}{2}} = q_{i1}^{k+\frac{1}{2}}, q_{iN_2}^{k+\frac{1}{2}} = 0 \quad (16)$$

получим разностную схему. Значения q_{ij} на полуцелом слое $x_k + \frac{\tau}{2}$ определяются с помощью уравнений (11), каждое из которых содержит три неизвестных $q_{i+1,j}^{k+1/2}, q_{i,j}^{k+1/2}, q_{i-1,j}^{k+1/2}$.

Итак, уравнения (11) в совокупности с краевыми условиями (15) образуют систему алгебраических уравнений относительно значений q_{ij} на слое $x_{k+1/2}$ при известных значениях на слое x_k . При фиксированном j эта система решается методом прогонки.

Значения q_{ij} x_{k+1} на слое вычисляются затем из уравнений (12) также с помощью метода прогонки. При этом используется аппроксимация краевых условий (16).

Полученная разностная схема (11), (12) с краевыми условиями (15), (16) имеет погрешность аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau)$. Можно показать, что она устойчива. Следовательно, она сходится со вторым порядком точности по h_1, h_2, τ .

Для простоты положим $N_1 = N_2 = N$. Для выполнения прогонки в одном направлении необходимо число арифметических действий пропорционально N . Всего на одном слое осуществляется $2N$ прогонок. Следовательно, число арифметических операций на одном слое пропорционально N^2 . Таким образом, рассмотренная схема является экономичной.

Работа выполняется в рамках целевой программы МОиН РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010г.г.) на 2011 год" (проект № РНП 2.1.1/13828).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аргучинцев В. К., Аргучинцева А. В.* Моделирование мезомасштабных гидротермодинамических процессов и переноса антропогенных примесей в атмосфере и гидросфере региона оз. Байкал. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2007. 255 с.

2. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.

2. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 416 с.

Норма функционала погрешности одной интерполяционной формулы с производными

Нуралиев Ф. А.

Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан;

В настоящей работе вычислен квадрат нормы функционала погрешности одной интерполяционной формулы в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$, снабженной нормой $\|\varphi|L_2^{(m)}(0, 1)\| = \left\{ \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$.

Важной задачей в теории интерполирование является нахождение максимума ошибки интерполяционной формулы $\varphi(x) \cong P_\varphi(x)$ над данным классом функций. Значение этой функции в некоторой фиксированной точке z есть функционал определенный как

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx = \varphi(z) - P_\varphi(z) = \\ &= \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\varphi(x_\beta) - A(z)\varphi'(0) - B(z)\varphi'(1), \end{aligned} \tag{1}$$

где ясно, что $P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\varphi(x_\beta) + A(z)\varphi'(0) + B(z)\varphi'(1)$ - интерполяционная формула и

$$\ell(x) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\delta(x - x_\beta) + A(z)\delta'(0) + B(z)\delta'(x - 1) \tag{2}$$

— функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\beta(z)$ — коэффициенты, а x_β — узлы формулы $P_\varphi(z)$, $x_\beta \in [0, 1]$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(0, 1)$.

Функционал погрешности $\ell(x)$ интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$ является линейным непрерывным функционалом над пространством $L_2^{(m)}(0, 1)$. Погрешность (1) интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$ оценивается при помощи максимума ошибки этой формулы на единичном шаре гильбертова пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$, т. е. при помощи нормы функционала (2):

$$\left\| \ell(x) | L_2^{(m)*}(0, 1) \right\| = \sup_{\|\varphi(x) | L_2^{(m)}(0, 1)\|=1} |(\ell, \varphi)|. \quad (3)$$

Это значит, что для того чтобы оценить погрешность (1) интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$ достаточно решить следующую задачу

Задача 1. Найти норму функционала погрешности $\ell(x)$ рассматриваемой интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$.

Ясно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов $C_\beta(z)$ и узлов x_β .

Если

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} | L_2^{(m)*}(0, 1) \right\| = \inf_{C_\beta(z), x_\beta} \left\| \ell | L_2^{(m)*}(0, 1) \right\| \quad (4)$$

тогда функционал $\overset{\circ}{\ell}(x)$ будем называть *оптимальным функционалом погрешности*, а соответствующую интерполяционную формулу *оптимальной интерполяционной формулой*.

Отсюда естественно появляется следующая задача

Задача 2. Найти значения коэффициентов $C_\beta(z)$ и узлов x_β интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$, которые удовлетворяют равенство (4).

Коэффициенты $C_\beta(z)$ и узлы x_β , удовлетворяющие равенство (4) называются *оптимальными коэффициентами* и *оптимальными узлами* интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$.

В настоящей работе решается задача 1.

Экстремальная функция. Норма функционала погрешности.

Чтобы решить задачу 1, т. е. для нахождения нормы функционала погрешности (2) в пространстве $L_2^{(m)*}(0, 1)$ используется понятие экстремальной функции данного функционала. Функция $\psi_\ell(x)$ называется *экстремальной функцией* функционала $\ell(x)$ (см. [1]), если выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\| \ell | L_2^{(m)*}(0, 1) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell | L_2^{(m)}(0, 1) \right\|. \quad (5)$$

В пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$, с помощью теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовых пространствах, экстремальная функция выражается через заданный функционал и

$$\left\| \ell | L_2^{(m)*}(0, 1) \right\| = \left\| \psi_\ell | L_2^{(m)}(0, 1) \right\|. \quad (6)$$

Поэтому из (5) и (6) заключаем, что

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\| \ell | L_2^{(m)*}(0, 1) \right\|^2. \quad (7)$$

С другой стороны по той же теореме для любого элемента $\varphi(x)$ пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$ получаем

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle, \quad (8)$$

где

$$\langle \psi_\ell, \varphi \rangle = \int_0^1 \psi_\ell^{(m)}(x) \varphi^{(m)}(x) dx$$

— скалярное произведение в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$.

Экстремальная функция $\psi_\ell(x)$ является решением уравнения (8). Экстремальная функция $\psi_\ell(x)$ для любого функционала $\ell(x)$ из пространстве $L_2^{(m)*}$ найдена С.Л.Соболевым (см., например, [1]) и имеет вид

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G(x) + P_{m-1}(x)$$

где

$$G(x) = \frac{x^{2m-1} \operatorname{sign} x}{2(2m-1)!}$$

является решением уравнения

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) = \delta(x),$$

$$\text{и } \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad P_{m-1}(x) \text{ — некоторый многочлен степени } m-1.$$

Функционал погрешности $\ell(x)$ удовлетворяет условия

$$(\ell(x), x^\alpha) = 0, \quad \alpha = \overline{0, m-1}. \quad (9)$$

Равенства (9) означают, что полученная нами интерполяционная формула $P_\varphi(z)$ будет точна для многочленов до $m-1$ -й степени, т. е.

$$(\ell(x), x^\alpha) = 0, \quad \alpha = \overline{0, m-1} \quad (10)$$

Теперь, учитывая равенство (7) и используя вид экстремальной функции $\psi_\ell(x)$ мы вычислим норму функционала погрешности. Для квадрата нормы функционала погрешности $\ell(x)$, с учетом (9), из равенства (7) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \ell | L_2^{(m)}(0, 1) \right\|^2 &= (\ell, \psi_\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \psi_\ell(x) dx = \\ &= (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-z) - \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) \delta(x-x_\gamma) + A(z) \delta'(x) + B(z) \delta'(x-1) \right) \times \\ &\quad \times \left(G(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) G(x-x_\beta) + A(z) G'(x) + B(z) G'(x-1) \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду четность функции $G(x)$, получим

$$\begin{aligned} \left\| \ell(x) | L_2^{(m)*}(0, 1) \right\|^2 &= (\ell, \psi_\ell) = \\ &= (-1)^{m+1} \left[\frac{A(z) \cdot B(z)}{(2m-2)!} - 2 \left(A(z) \frac{z^{2m-2}}{2(2m-2)!} - B(z) \frac{(z-1)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z) \left(A(z) \frac{x_{\beta}^{2m-2}}{2(2m-2)!} - B(z) \frac{(x_{\beta}-1)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right) + \\
& +2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(z) \frac{|z-x_{\beta}|^{2m-1}}{2(2m-1)!} - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta}(z) C_{\gamma}(z) \frac{|z-x_{\beta}|^{2m-1}}{2(2m-1)!} \Big].
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974, 808 с.

Некоторые свойства неоднородных марковских последовательностей с периодическими матрицами переходных вероятностей

Огородников В. А., Савельев Л. Я., Каргаполова Н. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

Новосибирск;

Новосибирский государственный университет, Новосибирск;

ova@osmf.ssc.ru

Введение. При исследовании реальных временных рядов, например, метеорологических (балл облачности, количество осадков температура и т.д.) возникает необходимость моделирования случайных рядов с конечным числом состояний. Такие модели могут быть использованы для моделирования любых метеорологических рядов, но при условии, что рассматриваются не все допустимые значения исследуемой величины, а только некоторые их градации. Возможны несколько подходов к моделированию дискретных рядов с заданными вероятностными свойствами. Достаточно часто применяется метод, основанный на использовании марковских моделей различной степени связности [2,3]. Другой распространенный метод моделирования основан на пороговом преобразовании специально подобранного гауссовского процесса [3]. При исследовании реальных процессов важную роль играют процессы с периодическими свойствами. В работе [1] исследованы различные классы периодических случайных процессов, а также рассмотрены области их применения.

В данной работе рассматриваются марковские неоднородные последовательности с двумя состояниями, у которых периодически изменяются матрицы переходных вероятностей, и исследуются их свойства. Последовательности такого типа могут быть использованы, например, для моделирования индикаторов осадков, выходов температуры воздуха за заданный уровень и т.д. с учетом суточного хода. Для иллюстрации использованы данные многолетних наблюдений на станции Астрахань.

1. Неоднородная марковская цепь с периодически изменяющимися матрицами переходных вероятностей

a1. Определение процесса $\xi(k)$. Рассмотрим двоичную неоднородную марковскую последовательность ξ случайных переменных $\xi(k)$, $k \geq 0$ с множеством значений $C = \{1, 0\}$, начальным вектором A и переходными вероятностями Q, R

$$\begin{aligned}
& A = (a_1, a_0) = (a, 1-a), \\
Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{10} \\ q_{01} & q_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{10} \\ p_{01} & p_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1-r \\ 1-s & s \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr[\xi[0] = \alpha] &= a_\alpha, \\ \Pr[\xi[2i+1] = \beta | \xi[2i] = \alpha] &= q_{\alpha\beta}, \quad \Pr[\xi[2i+2] = \beta | \xi[2i+1] = \alpha] = r_{\alpha\beta}, \\ (i \geq 0, \alpha = 0, 1, \beta = 0, 1). \end{aligned}$$

Переходные матрицы Q, R применяются последовательно, начиная с Q . Благодаря стохастичности они определяются четырьмя независимыми параметрами $p, q, r, s \in [0, 1]$.

Общая матрица вероятностей перехода $p_{\alpha\beta}[k] = \Pr[\xi[k+1] = \beta | \xi[k] = \alpha]$ имеет вид

$$P[k] = (1 - \theta[k])Q + \theta[k]R = \begin{pmatrix} p_{11}[k] & p_{10}[k] \\ p_{01}[k] & p_{00}[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p[k] & 1 - p[k] \\ 1 - q[k] & q[k] \end{pmatrix},$$

где $\theta[2i-1] = 0, \theta[2i] = 1, i \geq 1$ и $p_{\alpha\beta}[k] = (1 - \theta[k])q_{\alpha\beta} + \theta[k]r_{\alpha\beta}$.

a2. Распределение $\xi(k)$. Верны следующие равенства для произведений матриц $P[k]$:

$$\prod_{k=1}^{2m} P[k] = (QR)^m, \quad \prod_{k=1}^{2m+1} P[k] = (QR)^m Q, \quad m \geq 1.$$

Положим $S = QR$. Тогда

$$S = QR = \begin{pmatrix} 1 - s + pt & s - pt \\ r - qt & 1 - r + qt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - s & s \\ r & 1 - r \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix},$$

где $t = r + s - 1$. Будут использоваться также обозначения

$$\begin{aligned} d = \text{Det}[s] &= \text{Det}[Q]\text{Det}[R] = (p + q - 1)(r + s - 1), \\ b &= (r - qt)/(1 - d), \quad d \neq 1. \end{aligned}$$

По индукции легко показать, что верно следующее выражение для m -той степени матрицы S

$$S^m = \begin{pmatrix} b + (1 - b)d^m & 1 - b - (1 - b)d^m \\ b - bd^m & 1 - b + bd^m \end{pmatrix}.$$

Распределение

$$(\Pr[\xi(2m) = 1], \Pr[\xi(2m) = 0]) = AS^m = (p_{2m}, 1 - p_{2m})$$

в четный момент $r = 2m, m \geq 1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} p_{2m} &= \Pr[\xi(2m) = 1] = b + (a - b)d^m, \\ 1 - p_{2m} &= \Pr[\xi(2m) = 0] = 1 - b - (a - b)d^m, \end{aligned}$$

а распределение

$$(\Pr[\xi(2m+1) = 1], \Pr[\xi(2m+1) = 0]) = AS^m Q = (p_{2m+1}, 1 - p_{2m+1})$$

в нечетный момент $r = 2m + 1, m \geq 1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} p_{2m+1} &= \Pr[\xi[2m+1] = 1] = 1 - q + bu + (a - b)ud^m, \\ 1 - p_{2m+1} &= \Pr[\xi[2m+1] = 0] = q - bu - (a - b)ud^m, \end{aligned}$$

где $u = p + q - 1$.

a3. Пределы $\Pr[\xi(2m) = 1]$, $\Pr[\xi(2m) = 1]$. Если $|d| < 1$, то четное и нечетное предельные распределения имеют вид

$$f_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \Pr[\xi[2m] = 1] = b, \quad g_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \Pr[\xi[2m + 1] = 1] = 1 - q + bu$$

a4. Распределение длительностей 1-серий. Будем рассматривать стационарную последовательность. Распределение длительностей 1-серий, начинающихся в четные моменты времени, равно

$$P(L_1 = k) = \frac{P(\xi[2t - 1] = 0, \xi[2t] = 1, \dots, \xi[2t + k - 1] = 1, \xi[2t + k] = 0)}{P(\xi[2t - 1] = 0, \xi[2t] = 1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(L_1 = 2m) &= p^m r^{m-1} (1 - r), \quad k = 2m, \quad m = 1, 2, \dots, \\ P(L_1 = 2m - 1) &= p^{m-1} r^{m-1} (1 - p), \quad k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Если серии начинаются с нечетного момента времени, то

$$\begin{aligned} P(L_1 = 2m) &= p^{m-1} r^m (1 - p), \quad k = 2m, \quad m = 1, 2, \dots, \\ P(L_1 = 2m - 1) &= p^{m-1} r^{m-1} (1 - r), \quad k = 2m - 1, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Среднее значение и дисперсия длительности серии, в случае, когда серия начинается с элемента с четным номером, имеют вид

$$\begin{aligned} ML_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} (2m) p^m r^{m-1} (1 - r) + \sum_{m=1}^{\infty} (2m - 1) p^{m-1} r^{m-1} (1 - p) = \frac{1+p}{(1-pr)}, \\ DL_1 &= ML_1^2 - (ML_1)^2 = \frac{-p^2 + 2p + 4pr - 1}{(1-pr)^2} + \frac{(1-p)}{(1-pr)}. \end{aligned}$$

Если серия начинается с нечетного места, то

$$ML_1 = \frac{1+r}{(1-pr)}, \quad DL_1 = \frac{-r^2 + 2r + 4pr - 1}{(1-pr)^2} + \frac{(1-r)}{(1-pr)}.$$

a5. Корреляционная функция. Корреляционная функция в стационарном случае выражается соотношением

$$\text{corr}(\xi_t, \xi_{t+h}) = \frac{P(\xi_t = 1, \xi_{t+h} = 1) - P(\xi_t = 1)P(\xi_{t+h} = 1)}{\sqrt{P(\xi_t = 1) - P^2(\xi_t = 1)} \sqrt{P(\xi_{t+h} = 1) - P^2(\xi_{t+h} = 1)}}.$$

При $m \geq 0$, $k \geq 1$ необходимо рассмотреть 4 случая.

$$\begin{aligned} t = 2m, \quad h = 2k - 1: \quad \text{corr}(\xi_{2m}, \xi_{2m+2k-1}) &= \frac{\sqrt{b(1-b)u}}{\sqrt{(1-q+bu)(q-bu)}} d^{k-1}, \\ t = 2m, \quad h = 2k: \quad \text{corr}(\xi_{2m}, \xi_{2m+2k}) &= \frac{b(1-b)d^k}{b(1-b)} = d^k, \\ t = 2m + 1, \quad h = 2k - 1: \quad \text{corr}(\xi_{2m+1}, \xi_{2m+1+(2k-1)}) &= \frac{\sqrt{(1-q+bu)(r-b)}}{\sqrt{(q-bu)} \sqrt{b(1-b)}} d^{k-1}, \\ t = 2m + 1, \quad h = 2k: \quad \text{corr}(\xi_{2m+1}, \xi_{2m+1+2k}) &= \frac{(r-b)u}{(q-bu)} d^{k-1}. \end{aligned}$$

2. Распределения длительностей выхода температуры воздуха за заданный уровень.

С помощью рассмотренных марковских последовательностей построена численная стохастическая модель индикаторов выхода температуры воздуха за заданный уровень s . По построенной модели были получены соответствующие распределения длительностей для

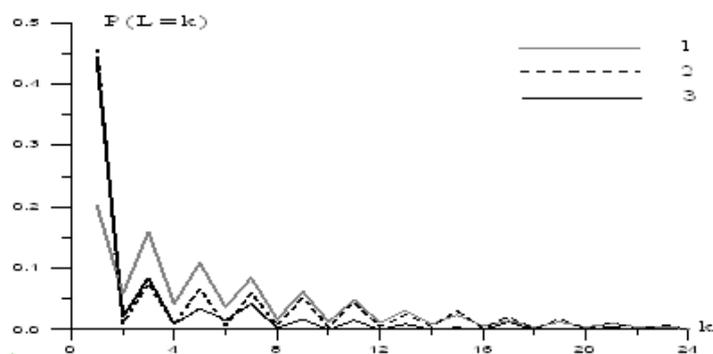


Рис. 1: Распределение длительности $P(L_1 = k)$. 1 — односвязная, 2 — двусвязная марковские модели, 3 — реальные данные. Март, $c = -2$ °C.

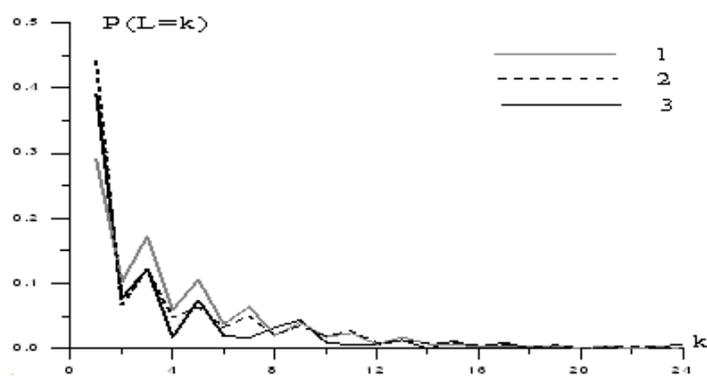


Рис. 2: Распределение длительности $P(L_1 = k)$. 1 — односвязная, 2 — двусвязная марковские модели, 3 — реальные данные. Декабрь, $c = -1$ °C.

различных месяцев и уровней. На рис. 1, 2 приведены графики распределений $P(L_1 = k)$ для марта и декабря, полученные по модели и реальным данным (кривые 1, 3).

Из рисунков видно, что рассмотренная выше марковская модель хорошо описывает затухающий колебательный характер распределений с периодом колебаний равным одним суткам. Однако, по величине эти вероятности значительно различаются, поэтому наряду с односвязной моделью была рассмотрена также численная двусвязная марковская модель с периодическими матрицами переходных вероятностей. Расчеты показали, что двусвязная модель также хорошо описывает колебательный характер распределений и существенно точнее воспроизводит значения реальных вероятностей (кривая 2 на рис. 1, 2).

Следует отметить, что рассмотренные модели дают приемлемые результаты не для всех возможных уровней s . Это можно объяснить тем, что реальные процессы не всегда обладают марковскими свойствами, особенно в условиях учета суточного хода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No 11-01-00641-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1987.
2. Савельев Л. Я., Балакин С. В. Совместные распределения чисел значений серий в троичных марковских последовательностях. Дискретная математика. Т. 16. № 3. 2004. С. 43–62.
3. Ogorodnikov V. A. and Prigarin S. M. Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1996.

Оценка одной теоретико-числовой суммы

Осипов Н. Н.

Институт космических и информационных технологий Сибирского федерального университета, Красноярск; nnosipov@rambler.ru

Пусть s_1, \dots, s_n — положительные числа, для которых

$$s := \min \{s_1, \dots, s_n\} > 1.$$

Рассматривается сумма вида

$$S(h, M, s_1, \dots, s_n) := \sum_{0 \neq x \in M} \frac{1}{(1 + |h^{-1}x_1|^{s_1}) \dots (1 + |h^{-1}x_n|^{s_n})}, \quad (*)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, M — n -мерная решетка в \mathbb{R}^n и h — малый параметр. Пусть ν — число индексов j , для которых $s_j = s$. Справедлива следующая

Теорема. Если решетка M изображает в \mathbb{R}^n кольцо целых чисел \mathfrak{D} некоторого вполне вещественного поля алгебраических чисел \mathfrak{K} степени n , то

$$S(h, M, s_1, \dots, s_n) \asymp h^{ns} (\ln h^{-1})^{\nu-1}, \quad h \rightarrow 0.$$

При $\nu = n$ (т. е. когда $s_1 = \dots = s_n = s$) эта оценка допускает уточнение [1]:

$$S(h, M, s) = \frac{2n^{n-1}}{(n-1)!R} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{Q(c)}{c^s} h^{ns} [(\ln h^{-1})^{n-1} + O((\ln h^{-1})^{n-2})],$$

где R — регулятор \mathfrak{D} , а $Q(c)$ обозначает число попарно неассоциированных решений $\mu \in \mathfrak{D}$ нормального уравнения $|N_{\mathfrak{K}}(\mu)| = c$.

Доказательство теоремы можно получить, следуя схеме оценки подобных теоретико-числовых сумм, предложенной автором в работе [2]. В докладе предполагается остановиться на наиболее нетривиальных моментах реализации этой схемы в случае суммы (*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осипов Н. Н.* Асимптотика нормы функционала погрешности решетчатых кубатурных формул на пространствах $\widetilde{W}_2^{(s,p,q)}(\Lambda)$ // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. Специальный выпуск: Избранные доклады VII международного семинара-совещания «Кубатурные формулы и их приложения». Красноярск, август 2003 г. С. 95–101.
2. *Осипов Н. Н.* Схема оценки некоторых теоретико-числовых сумм // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. Специальный выпуск: Избранные доклады VIII международного семинара-совещания «Кубатурные формулы и их приложения» (Улан-Удэ, август 2005 г.). С. 81–89.

Оценка точности моделирования субгауссовских полей в различных функциональных пространствах

Пашко А. А.

Европейский университет, Киев, Украина; pashkoua@mail.ru

В работе изучаются методы моделирования субгауссовских случайных полей с заданной точностью и надежностью в различных функциональных пространствах. В качестве функциональных пространств рассматриваются пространства L_p , $p \geq 1$, пространства Орлича. в качестве случайных полей изучаются случайные поля на компакте, сфере. Полученные оценки имеют место для гауссовских случайных полей.

Две инвариантные кубатурные формулы с лапласианом ³

Пономаренко А. К.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург;
akpspb@yandex.ru*

Для интеграла

$$I(f) = \int_{\mathbf{R}_n} p(r) f(x) dx,$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $r = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}$, $p(r)$ — неотрицательная весовая функция такая, что существуют моменты $\nu_k = \int_0^\infty r^k p(r) dr$, $k = 0, 1, \dots$, $\nu_0 > 0$, рассматриваются кубатурные формулы, инвариантные относительно группы $O_n G$ всех ортогональных преобразований гипероктаэдра O_n (выпуклой оболочки $2n$ точек $(\pm 1, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm 1, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, \dots, \pm 1)$) в себя и точные для любого алгебраического многочлена относительно x_1, \dots, x_n не выше девятой и седьмой степени соответственно. Кубатурные суммы этих формул содержат оператор Лапласа функции f в начале координат.

Формула с 9-свойством имеет вид :

$$I(f) \cong A \Delta f(O) + \sum_{j=1}^2 A_j \sum_1^{2n} f(a_j g^{(0)}) + D \sum_1^{2n(n-1)} f(dg^{(1)}) + H \sum_1^{24C_n^3} f(Rh(\beta)) + E \sum_1^{2^n} f(eg^{(n-1)}), \quad 4 \leq n. \quad (1)$$

³Работа поддержана РФФИ, грант № 11-01-00637.

Здесь использованы обозначения:

$$g^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots,$$

$$h(\beta) = (\beta, \beta, \sqrt{1-2\beta^2}, 0, \dots, 0),$$

$a_j (j = 1, 2)$, d , R , e — радиусы сфер с центрами в точке $O(0, \dots, 0)$, A , $A_j (j = 1, 2)$, F , H , E — коэффициенты β — параметр, $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа.

В формуле (1) суммирование распространяется на все элементы $O_n G$ -орбит точек, указанных в круглых скобках после знака функции f .

Для нахождения радиусов орбит, коэффициентов формулы и параметра $t_0 = \beta^2$ применяется модификация теоремы С. Л. Соболева об инвариантных кубатурных формулах ([1], [2, теорема 1.7]), согласно которой формула (1) должна быть точна для многочленов $\sigma_2^k (k = 0, 1, \dots, 4)$, $\sigma_4 \sigma_2^k (k = 0, 1, 2)$, σ_4^2 , $\sigma_6 \sigma_2^k (k = 0, 1)$, σ_8 , где $\sigma_2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, $\sigma_4 = \sum_{j < k} x_j^2 x_k^2, \dots, \sigma_{2n} = x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2$ — базисные инвариантные формы группы $O_n G$.

Это требование для формулы (1) приводит к системе 12 нелинейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^2 A_{1j} + D_1 + H_1 + E_1 &= m_0, \\ A_1 + \sum_{j=1}^2 A_{1j} a_j^2 + D_1 d^2 + H_1 R^2 + E_1 e^2 &= m_1, \\ \sum_{j=1}^2 A_{1j} a_j^{2k} + D_1 d^{2k} + H_1 R^{2k} + E_1 e^{2k} &= m_k, \\ \frac{1}{4} D_1 d^{2k} + z H_1 R^{2k} + \frac{n-1}{2n} E_1 e^{2k} &= m_{k+3}, \quad k = 2, 3, 4, \\ \frac{1}{16} D_1 d^8 + z^2 H_1 R^8 + \frac{(n-1)^2}{4n^2} E_1 e^8 &= m_8, \\ y H_1 R^{2k} + \frac{C_{n-1}^2}{3n^2} E_1 e^{2k} &= m_{k+6}, \quad k = 2, 3, 4, \\ \frac{C_{n-1}^3}{4n^3} E_1 e^8 &= m_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

с 12 неизвестными $A_1 = 2nA$, $A_{j1} = 2nA_j$, $a_j (j = 1, 2)$, $D_1 = 2n(n-1)D$, $H_1 = 24C_n^3 H$, $E_1 = 2^n E$, d , R , e , t_0 .

Здесь обозначено: $z = t_0(2 - 3t_0)$, $y = t_0^2(1 - 2t_0)$,

$$m_s = \int_{\mathbf{R}_n} p(r) \sigma_2^s(x) dx, \quad s = 0, 1, \dots, 4,$$

$$m_{s+5} = \int_{\mathbf{R}_n} p(r) \sigma_4(x) \sigma_2^s(x) dx, \quad s = 0, 1, 2, \quad m_8 = \int_{\mathbf{R}_n} p(r) \sigma_4^2(x) dx,$$

$$m_{s+9} = \int_{\mathbf{R}_n} p(r) \sigma_6(x) \sigma_2^s(x) dx, \quad s = 0, 1, \quad m_{11} = \int_{\mathbf{R}_n} p(r) \sigma_8(x) dx$$

— соответствующие моменты для интеграла $I(f)$.

Решение этой системы находится с частичным использованием методики работ [2, 3].

Оно имеет вид

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_2^2(z_5 a_2^2 - \alpha_2)/(q\Delta), \quad A_{12} = -a_1^2(z_5 a_1^2 - \alpha_2)/(q\Delta), \\ \Delta &= p^2 - 4q, \quad a_1^2, a_2^2 - \text{корни уравнения } x^2 + px + q = 0, \\ p &= (\alpha_4 z_5 - \alpha_2 \alpha_3)/(\alpha_2^2 - \alpha_3 z_5), \quad q = (\alpha_3^2 - \alpha_2 \alpha_4)/(\alpha_2^2 - \alpha_3 z_5), \quad z_5 = (\alpha_2 \alpha_3 - \sqrt{z_4})/\alpha_4, \\ z_4 &= \alpha_2^2 \alpha_3^2 - \alpha_4(\alpha_2^2 + \alpha_0 \alpha_3^2 - \alpha_0 \alpha_2 \alpha_4), \end{aligned}$$

В заключение приведем пример приближенных значений радиусов орбит и коэффициентов формулы (3) для весовой функции $p(r) = e^r r^{-1}$ и $n = 7$:

$$\begin{aligned} A &= -4.866111361324e + 02, \\ B &= 1.983352903057e + 02, & b &= 4.932858766986e + 00, \\ D &= 2.564754477913e - 01, & d &= 1.721157097637e + 01, \\ E &= 2.612869225859e + 00, & e &= 9.222163612166e + 00. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. мат. журн., 1962. Т. 3. № 5. С. 769–791.
2. *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
3. *Лебедев В. И.* О квадратурах на сфере. // ЖВМ и МФ, 1976. Т. 16. № 2. С. 293–306.

Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений тетраэдра

Попов А. С.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; popov@labchem.sccc.ru*

Дается определение наилучшей кубатурной формулы для сферы, инвариантной относительно группы вращений тетраэдра. Описывается алгоритм поиска наилучших кубатурных формул данного типа симметрии. Приводится таблица, содержащая основные характеристики всех наилучших на сегодняшний день кубатурных формул группы вращений тетраэдра до 29-го порядка точности. Даются с 16 значащими цифрами параметры новых кубатурных формул 10-го и 13-го порядков точности.

1. Введение. Пусть S — единичная сфера, т. е. множество точек $(x, y, z) \in \mathbf{R}_3$, для которых $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Рассмотрим на S интеграл

$$U(f) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(s) ds, \quad (1)$$

где $s \in S$, ds — элемент поверхности сферы, $U(1) = 1$.

Для численного нахождения интеграла (1) построим кубатурную формулу

$$V(f) = \sum_{i=1}^N w_i f(s_i), \quad (2)$$

где N — число узлов, w_i — веса, s_i — узлы.

Будем говорить, что данная кубатурная формула имеет алгебраический порядок точности n (или просто порядок n), если она точна на всех многочленах степени не выше n и не точна хотя бы на одном многочлене степени $n + 1$.

В работах [1, 2] был описан алгоритм построения кубатур на сфере, инвариантных относительно группы вращений тетраэдра T и имеющих минимальное для данного порядка n число узлов N . В работе [3] предложен новый критерий оптимальности кубатурной формулы на сфере, инвариантной относительно любой заданной группы симметрии.

В п. 2 настоящей работы дается краткое описание алгоритма поиска наилучших (в некотором смысле) кубатур на сфере, инвариантных относительно группы T , а в п. 3 этот

алгоритм применяется для поиска всех наилучших кубатур группы T до 29-го порядка точности.

2. Алгоритм построения наилучших кубатур группы T . Будем строить эти кубатуры в виде

$$V(f) = A_0 \sum_{j=1}^4 f(a_{0j}) + B_0 \sum_{j=1}^4 f(b_{0j}) + C_0 \sum_{j=1}^6 f(c_{0j}) + \sum_{i=1}^M A_i \sum_{j=1}^{12} f(a_{ij}), \quad (3)$$

где 4 точки a_{0j} лежат в вершинах вписанного в сферу правильного тетраэдра и имеют координаты (p, p, p) , $(p, -p, -p)$, $(-p, p, -p)$, $(-p, -p, p)$ при $p = 1/\sqrt{3}$. Координаты 4 точек b_{0j} , 6 точек c_{0j} и 12 точек a_{ij} , отвечающих, соответственно, центрам граней, серединам ребер и точкам общего положения на гранях тетраэдра, приведены в [1].

В работах [1, 2] показано, что для того чтобы кубатура (3) имела порядок n , необходимо и достаточно, чтобы она была точна на всех многочленах вида $u^i v^j w^k$, где $3i + 4j + 6k \leq n$; $i, j = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1$; а u, v и w представляют собой базисные инвариантные многочлены группы T третьей, четвертой и шестой степени соответственно.

Параметрами кубатуры (3) являются веса A_0, B_0, C_0, A_i и координаты (a_i, b_i, c_i) узлов a_{ij} . С учетом уравнений связи $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$ легко видеть, что узлы a_{0j}, b_{0j} и c_{0j} имеют по одному свободному параметру, а узлы a_{ij} — по три свободных параметра. В итоге на один свободный параметр приходится: 4 узла a_{0j}, b_{0j} или a_{ij} , 6 узлов c_{0j} .

Обозначим общее число базисных многочленов степени не выше n через m . Поскольку общее число свободных параметров в кубатуре порядка n должно быть равно m , то для получения формулы с минимальным для данного n числом узлов N выгоднее всего использовать в первую очередь узлы a_{0j}, b_{0j}, a_{ij} и лишь в последнюю очередь — узлы c_{0j} .

Возможны три случая: 1) $m = 3M$, полагаем в (3) $A_0 = B_0 = C_0 = 0$; 2) $m = 3M + 1$, полагаем $B_0 = C_0 = 0$; 3) $m = 3M + 2$, полагаем $C_0 = 0$.

При рассмотрении этих случаев мы исходили из гипотезы о том, что такие параметризации приводят к разрешимым системам нелинейных уравнений и дают в итоге кубатуры с положительными весами и с узлами, лежащими на сфере. Накопленный нами опыт конкретных расчетов говорит о том, что действительно эта гипотеза всегда верна, кроме случая $n = 6, m = 5$, когда кубатура с $N = 20$ имеет отрицательные веса (см. [4]).

При построении конкретных кубатур вида (3) мы будем стремиться получить наилучшие в некотором смысле кубатуры для каждого n . В соответствии с определением из [3], наилучшая среди всех кубатурных формул вида (3) порядка n должна последовательно удовлетворять четырем условиям: 1) узлы лежат на сфере; 2) веса положительны; 3) число узлов минимально; 4) главный член погрешности минимален.

3. Поиск наилучших кубатур группы T . Поиск наилучших кубатур проводился в соответствии с алгоритмом из п. 2. Расчет параметров новых кубатур выполнялся численным методом, аналогичным работе [3]. Приведем теперь сводную таблицу, содержащую основные характеристики всех наилучших на сегодняшний день кубатур группы T для сферы до 29-го порядка точности.

n	N	E	G	L	n	N	E	G	L	n	N	E	G	L
2	4	1.9720	T_d	[5]	12	60	1.1835	T	[1]	21	162	1.6219	T_h	—
3	6	2.2913	O_h	[5]	13	68	1.6080	T	—	22	180	0.6933	T	—
5	12	2.3917	Y_h	[5]	14	72	1.7836	Y	[6]	23	192	0.3349	Y	[9]
6	22	0.5454	T_d	[4]	15	84	2.0117	T_h	[1]	24	212	0.5485	Y	[9]
7	24	1.4662	O	[6]	16	100	0.8130	T	—	25	228	0.6104	T	—
8	28	1.8137	T	[1]	17	108	1.4797	T	—	26	244	0.8682	T	—
9	32	2.2441	Y_h	[7]	18	124	1.1990	T	—	27	260	1.5409	T_h	—
10	44	1.4291	T_d	—	19	132	1.0089	Y	[9]	28	284	0.3722	T	—
11	48	1.6928	O	[8]	20	148	0.8569	T	—	29	296	1.7440	T_h	—

Здесь $E = E_{n+1}$ — главный член погрешности [3], G — группа симметрии данной кубатуры (обозначения групп взяты из [10]), L — ссылка на первоисточник.

Приведем в заключение параметры новых наилучших кубатур 10-го и 13-го порядков точности.

$$n = 10, N = 44, M = 3, A_0 = 27/2240 = 0.1205357142857143E - 1, \\ B_0 = 27/1120 = 0.2410714285714286E - 1, C_0 = 0$$

i	A_i	a_i
1	0.2297654193618004E - 1	0.3582552239079283E + 0
2	0.2329028505394338E - 1	0.7056713815166245E + 0
3	0.2501293491463849E - 1	0.2076116168580279E + 0
i	b_i	c_i
1	0.3582552239079283E + 0	0.8621521844114067E + 0
2	0.7056713815166245E + 0	-0.6368518365237941E - 1
3	0.2076116168580279E + 0	-0.9559261650834707E + 0

$$n = 13, N = 68, M = 5, A_0 = 0.1352485457725067E - 1, \\ B_0 = 0.1517251300680149E - 1, C_0 = 0$$

i	A_i	a_i
1	0.1363347665056839E - 1	0.7859194339703887E + 0
2	0.1485580566128947E - 1	0.7646854720239241E + 0
3	0.1499281604183833E - 1	0.8840280162756681E + 0
4	0.1500767347471316E - 1	0.9777182068662691E + 0
5	0.1527777231023993E - 1	0.8708280759039422E + 0
i	b_i	c_i
1	0.5730053540474418E + 0	0.2323693343378805E + 0
2	0.6207214909924342E + 0	-0.1730923438389977E + 0
3	0.2408287218543596E + 0	-0.4006195117186663E + 0
4	0.2086707415825803E + 0	0.2288295369010155E - 1
5	0.1824962549309805E + 0	0.4564576422337614E + 0

Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00427-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов А. С. Кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно группы тетраэдра // Журн. вычисл. матем. и мат. физ., 1995. Т. 35, № 3. С. 459–466.
2. Попов А. С. Кубатурные формулы высоких порядков точности для сферы, инвариантные относительно группы тетраэдра // Журн. вычисл. матем. и мат. физ., 1996. Т. 36, № 4. С. 5–9.
3. Попов А. С. Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра // Сиб. журн. вычисл. матем., 2002, Т. 5, № 4.

С. 367–372.

4. *Konyayev S. I.* On invariant quadrature formulae for a sphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1995. Vol. 10, № 1. P. 41–47.

5. *Диткин В. А.* О некоторых приближенных формулах для вычисления трехкратных интегралов // Докл. АН СССР, 1948. Т. 62, № 4. С. 445–447.

6. *McLaren A. D.* Optimal numerical integration on a sphere // Math. Comput., 1963, Vol. 17, № 83. P. 361–383.

7. *Диткин В. А., Люстерник Л. А.* Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере // Вычисл. математика и вычисл. техника. М.: Машгиз, 1953. № 1. С. 3–13.

8. *Попов А. С.* Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений октаэдра // Журн. вычисл. матем. и мат. физ., 1998. Т. 38, № 1. С. 34–41.

9. *Попов А. С.* Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений икосаэдра // Сиб. журн. вычисл. матем., 2008. Т. 11, № 4. С. 433–440.

10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория), М.: Наука, 1989. Гл. 12.

Ненасыщаемый алгоритм решетчатых кубатурных формул

Рамазанов М. Д.

Учреждение Российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН; ramazanovmd@yandex.ru

Решетчатые кубатурные формулы дают приближенные значения интегралов $\int_{\Omega} dx f(x)$ по многомерным областям $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в виде линейных комбинаций значений подинтегральной функции в узлах выбранной решетки.

$$K_N f \equiv \det H_N \cdot \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n, \\ H_N k \in \Omega}} c_k(N) f(H_N k), \quad H_N - \text{матрица } n \times n, \det H_N = |\Omega|/N.$$

В конце 60–х годов прошлого века С. Л. Соболев [1], [2] предложил алгоритм формул высокой точности, объединяющий подходы функционального анализа и алгебраический. Именно, гладкость интегрантов задавалась принадлежностью их конкретному банаховому функциональному пространству $B(\Omega) \subset C$, качество формулы определялось нормой функционала погрешности

$$l_N^{\Omega} : f \rightarrow \int_{\Omega} dx f(x) - K_N f, \text{ с оптимизацией по коэффициентам } \{c_k\}.$$

$$l_N^{\Omega, opt} = \arg \min_{l_N^{\Omega, \{c_k\}}} \|l_N^{\Omega}\|_{[B(\Omega)]^*}. \quad (1)$$

А сам алгоритм строился как сумма локальных формул для интегрирования по элементарным ячейкам решетки $Q_{N,k} = \{x \mid H_N^{-1}x - k \in [0, 1)^n\}$ с помощью алгебраических формул с теми же узлами, точно интегрирующих многочлены до некоторой степени M , связанной с гладкостью интегрантов. С. Л. Соболев установил, что при $N \rightarrow \infty$ последовательность функционалов погрешностей таких формул обладает свойством асимптотической оптимальности:

$$\|l_N^{\Omega, as}\|_{[B(\Omega)]^*} = \|l_N^{\Omega, opt}\|_{[B(\Omega)]^*} \cdot (1 + o(1)) \quad (2)$$

на пространствах интегрантов $B(\Omega) = L_2^{(m)}(\Omega)$.

Свойство асимптотической оптимальности было установлено и для многих других банаховых пространств, обычно употребляемых в вычислительной математике [3]. Важнейшей особенностью соболевского алгоритма является свойство пограничного слоя: узлам, удаленным от границы области на расстояние больше $O(N^{-1/n})$ соответствуют одинаковые коэффициенты:

$$\exists L, \forall k, N \quad \text{dist}(H_N k, \partial\Omega) > LN^{-1/n} \Rightarrow c_k \equiv 1. \quad (3)$$

Это на порядок уменьшает объем вычислительной работы и позволяет установить для таких формул фактическую эквивалентность асимптотической и порядковой оптимальности на соболевских пространствах W_p^m .

Заложенная в алгоритме алгебраическая точность локальных формул на всех многочленах до некоторой степени M проявилась в условной «асимптотической ненасыщаемости» алгоритма. Именно, построенная последовательность кубатурных формул остается асимптотически (при $N \rightarrow \infty$) оптимальной на каждом пространстве W_p^m с $m \in (n/p, M)$, то есть в ослабленной форме удовлетворяет введенному К. И. Бабенко определению ненасыщаемости. (У К. И. Бабенко [4],[5] универсальна порядковая оптимальность без ограничения сверху на гладкость интегрантов). Ненасыщаемость — важное свойство вычислительных алгоритмов, позволяющее созданным по ним программам автоматически настраиваться на проявляющиеся характеристики гладкостей параметров задач, обеспечивая наилучшие скорости сходимостей аппроксимаций.

Мы ограничиваемся кубической решеткой узлов $H = hI_n$, $N = h^{-n}$, и предлагаем новый алгоритм решетчатых кубатурных формул $K_h f = h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k f(hk)$, обладающих свойством ограниченного пограничного слоя и являющихся асимптотически ненасыщаемыми на всех пространствах $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ с $m > \frac{n}{2}$.

Сначала выводим формулу коэффициентов оптимальных кубатурных формул для интегралов более общего вида $\mathcal{I}^\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} dx \varphi(x) f(x)$ и на более общих пространствах $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$.

Затем упрощаем выражения оптимальных коэффициентов, отсекая слагаемые, порядки которых пренебрежимо малы по сравнению с главным членом.

Таким образом, мы приходим к формуле коэффициентов асимптотически оптимальной кубатурной формулы с ограниченным пограничным слоем.

Окончательно, упрощая формулу коэффициентов в пограничном слое, получаем коэффициенты асимптотически ненасыщаемой формулы. Для изотропного случая $\mu(2\pi i\xi) = (1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2}$.

Оптимальная формула для пространств $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ задается формулами

$$C^{opt}(x, h) = \int_Q d\zeta e^{2\pi i \zeta x/h} \cdot h^{-n} \frac{\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}((t + \zeta)/h) / |\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} 1 / |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^2}, \quad (4)$$

и

$$c_k^{opt}(h) = C^{opt}(x, h) \Big|_{x=hk}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n. \quad (5)$$

Получаем следующую теорему.

Асимптотически оптимальную решетчатую кубатурную формулу, приближающую $\int_\Omega dx f(x)$ на интегрантах из пространства $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ с гипотетическим символом гладкости $\mu(2\pi i\xi)$ с показателем $\rho \in (0, 1]$, подчиненным условию $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} < \infty$, можно задать

функцией коэффициентов

$$C^{as}(x, h) = \begin{cases} 0 & \text{для } \text{dist}(x, \Omega) \geq h^\gamma, \\ 1 & \text{для } \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq h^\gamma, \\ \int_{\max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j| \leq h^{-\delta}} d\xi \tilde{\varkappa}(\xi) e^{2\pi i x \xi} & \text{для } \text{dist}(x, \Gamma) \leq h^\gamma. \end{cases}$$

с любым $\gamma \in (0, \delta)$, где $\delta \in (0, 1)$ и выбирается из условия

$$\int_{\max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j| \leq h^{-\delta}} d\xi |\mu(2\pi i \xi)|^2 \cdot \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2} \right)^{1/2} = o(1).$$

Здесь $\tilde{\varkappa}(\xi)$ это преобразование Фурье функции $\varkappa(\xi)$, вырезающей некоторую малую окрестность границы области.

Например, для $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ пространств можно взять любое $\delta < \frac{1}{2}$ и $\gamma < \delta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. М.: Наука, 1974. — 808 с.
2. *Sobolev S. L.* The Theory of Cubature Formulas (Mathematics and Its Applications) / S. L. Sobolev, V. L. Vaskevich. — 1st edition. — Springer, 1997. — ISBN 0792346319.
3. *Рамазанов М. Д.* Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем / М. Д. Рамазанов; ИМБИЦ УНЦ РАН. — Уфа: ДизайнПолиграфСервис, 2009. — 178 с. — ISBN 978-5-94423-172-7.
4. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа / К. И. Бабенко. — 2-е изд. — М. ; Ижевск: РХД, 2002. — 848 с. — ISBN 5-93972-162-1.
5. *Belykh V. N.* On the best approximation properties of C^{infy} -smooth functions on an interval of the real axis (to the phenomenon of unsaturated numerical methods) / V. N. Belykh // Siberian Mathematical Journal. — 2005. — Vol. 46, No. 3. — P. 373-385. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11202-005-0040-z>.

Ненасыщаемый алгоритм решетчатых кубатурных формул для наилучших решеток

Рахматуллин Д. Я.

Учреждение Российской академии наук Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН; rahmdy@gmail.com

Известен алгоритм формул высокой точности С. Л. Соболева ([1], [2]), объединяющий подход функционального анализа и алгебраический подход. Гладкость интегрантов задавалась принадлежностью их конкретному банаховому функциональному пространству $B(\Omega)$, качество формулы определялось нормой функционала погрешности с оптимизацией по коэффициентам. Алгоритм строился как сумма локальных формул для интегрирования по элементарным ячейкам решетки с помощью алгебраических формул с теми же узлами, точно интегрирующих многочлены до некоторой степени, связанной с гладкостью интегрантов. С.Л. Соболев установил, что при N , устремленном к бесконечности, последовательность функционалов погрешностей таких формул обладает свойством асимптотической оптимальности на пространствах интегрантов $B(\Omega) = L_2^m(\Omega)$

Свойство асимптотической оптимальности было установлено и для многих других банаховых пространств, обычно употребляемых в вычислительной математике. Важнейшей особенностью соболевского алгоритма является свойство пограничного слоя: узлам, удаленным от границы области на расстояние больше $O(N^{-1/n})$ соответствуют одинаковые коэффициенты. Это на порядок уменьшает объем вычислительной работы и позволяет установить для таких формул фактическую эквивалентность асимптотической и порядковой оптимальности на соболевских пространствах W_p^m .

Заложенная в алгоритме алгебраическая точность локальных формул на всех многочленах до некоторой степени M проявилась в условной “асимптотической ненасыщаемости” алгоритма. Именно, построенная последовательность кубатурных формул остается асимптотически (при N , стремящемся к бесконечности) оптимальной на каждом пространстве W_p^m с m из $(n/p, M)$, то есть в ослабленной форме удовлетворяет введенному К. И. Бабенко определению ненасыщаемости. (У К. И. Бабенко ([3], [4]) универсальна порядковая оптимальность без ограничения сверху на гладкость интегрантов). Ненасыщаемость — важное свойство вычислительных алгоритмов, позволяющее созданным по ним программам автоматически настраиваться на проявляющиеся характеристики гладкостей параметров задач, обеспечивая наилучшие скорости сходимостей аппроксимаций.

В 2010 году М.Д. Рамазановым был предложен ([5]) новый алгоритм решетчатых кубатурных формул, обладающих свойством ограниченного пограничного слоя и являющихся асимптотически ненасыщаемыми на всех пространствах $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ с $m > n/2$. Этот алгоритм ограничен кубической решеткой узлов.

В данной работе снимается это ограничение алгоритма — рассматриваются произвольные решетки узлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. М.: Наука, 1974. — 808 с.
2. *Sobolev S. L.* The Theory of Cubature Formulas (Mathematics and Its Applications) / S. L. Sobolev, V. L. Vaskevich. — 1st edition. — Springer, 1997. — ISBN 0792346319.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа / К. И. Бабенко. — 2-е изд. — М. ; Ижевск: РХД, 2002. — 848 с. — ISBN 5-93972-162-1.
4. *Belykh V. N.* On the best approximation properties of C^{infty} -smooth functions on an interval of the real axis (to the phenomenon of unsaturated numerical methods) / V. N. Belykh// Siberian Mathematical Journal. — 2005. — Vol. 46, No. 3. — P. 373-385. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11202-005-0040-z>.
5. *Рамазанов М. Д.* Новый алгоритм асимптотически оптимальных решетчатых кубатурных формул / М. Д. Рамазанов// Уфимский математический журнал. — 2010. — С. 61-80.

Численная реализация модели Стритера–Фелпса и ее модификаций с учетом неопределенности данных

Рогалев А. Н., Рогалев А. А.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Сибирский Федеральный университет, Красноярск;
ran@akadem.ru

Представляет существенный экологический интерес прогноз эволюции загрязнения водоемов — изменения концентрации в увеличивающемся объеме загрязнения воды в процессе ее движения вниз по течению [1],[2]. Со времен классических исследований Стритера

и Фелпса [3](Streeter–Phelps) моделированию и анализу содержания растворенного кислорода (РК) было посвящено значительное внимание в моделях качества воды. Основное препятствие в использовании математических моделей для оценки величины загрязнения потоков состоит в трудности определения точных значений параметров. В докладе численно реализуются модели Стритера–Фелпса, устанавливающие связь между концентрацией растворенного кислорода и скоростью окисления органического вещества, а также модели Стритера–Фелпса, в которых применяются биофильтры и добавлены конвективные и диффузионные члены. При реализации программ применяются методы [4], использующие MPI, для распараллеливания численного алгоритма.

Один из более известных критериев загрязнения отходами (БПК), является основной причиной уменьшения содержания РК в воде и, следовательно, ухудшения качества воды. В классической модели Стритера–Фелпса рассматривается система, состоящая из воды и растворенного в ней кислорода и органического вещества. Согласно Стритеру и Фелпсу содержание растворенного кислорода РК в водотоке определяется двумя процессами — биохимическим потреблением кислорода в результате бактериального окисления органических веществ (ОВ) и поступлением кислорода в воду из атмосферы (атмосферная аэрация). При этом используется предположение, что скорость окисления ОВ (т. е. скорость убывания его концентрации) прямо пропорциональна текущей концентрации вещества и не зависит от концентрации РК, скорость изменения концентрации РК предполагается линейной функцией двух аргументов, а именно: концентрации органики и концентрации кислорода. Классическая система уравнений Стритера–Фелпса имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = -k_1 L, \quad (1)$$

$$\frac{dD}{dt} = k_1 L - k_2 D. \quad (2)$$

Здесь t — время, L — концентрация растворенного ОВ, выраженная в кислородных единицах (масса РК, которая потребовалась бы для полной нейтрализации содержащегося в единице объема растворенной органики); D — дефицит кислорода, определяемый как $D = C_S - C$, где C_S — концентрация РК при 100 процентном насыщении, C — текущая концентрация РК; k_1, k_2 — константы, характеризующие скорость окисления и скорость реаэрации соответственно. В классическом исследовании Стритера и Фелпса используется независимая переменная, именуемая "время потока". В большинстве практических приложений предполагается, что скорость течения реки постоянная по времени и, следовательно, независимая переменная "время потока" эквивалентна независимой переменной, означающей расстояние вдоль течения, т. е. z . Законность использования стационарной модели Стритера–Фелпса для описания взаимодействий РК и БПК в основном зависит от того, насколько справедливо предположение о независимости от времени концентраций РК и БПК. Фундаментальной особенностью этой системы является отсутствие обратной связи между концентрацией растворенного кислорода и скоростью окисления органического вещества. Это может приводить к физически не обоснованным решениям, в которых концентрация растворенного кислорода становится отрицательной величиной.

На все модели, предложенные для описания взаимодействия РК и БПК, оказывает влияние факт неточности задания всех параметров этой модели, полученных из эксперимента (величина ошибки может достигать 40 %).

Главное свойство исходной системы Стритера–Фелпса состоит в том, что баланс между концентрациями РК и БПК зависит только от двух процессов: реаэрации потока и потреблении РК при окислении (или распаде) БПК; отсутствии обратной связи между концентрацией РК и концентрацией ОВ. Решение системы сводится к последовательному интегрированию двух линейных дифференциальных уравнений. В то же время, отсутствие

обратной связи между скоростью окисления ОВ и концентрацией РК может привести к физически не обоснованным решениям, в которых дефицит РК превышает концентрацию насыщения и становится отрицательной величиной.

Одним из способов улучшения адекватности модели кислородного баланса водотока является включение [5] в классическую систему уравнений Стритера–Фелпса дополнительного уравнения, описывающего зависимость параметра k_1 от концентрации C растворенного кислорода

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= -k_1L, \\ \frac{dD}{dt} &= k_1L - k_2D \\ k_1 &= k_0\left(1 - \frac{D}{C_s}\right).\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь k_0 – предельная скорость окисления органики, наблюдаемая при $C = C_s$, что эквивалентно условию $D = 0$. Система (3) отличается от классической системы Стритера–Фелпса (1) тем, что скорость окисления k_1 считается не константой, а функцией, для вычисления которой в систему включено третье уравнение. Это уравнение позволяет учесть тот факт, что скорость разложения ОВ зависит от концентрации РК.

В отличие от классической, замкнутая система Стритера–Фелпса — нелинейная систем. Она позволяет исключить физически некорректные решения, а именно — решения, допускающие отрицательные значения концентрации РК, которые возможны в классической модели при некоторых сочетаниях начальных условий.

В процесс самоочищения, описываемый с помощью уравнений (3), включается очистка с помощью биофильтра [6] путем добавления слагаемого $-kL$:

$$\frac{dL}{dt} = -k_1L - kL, \quad (4)$$

где k – константа скорости изъятия органических загрязнений, $\frac{1}{\text{д}}$, вычисляемая по формуле $k = k_{20} \cdot 1,047^{T-20}$. Здесь k_{20} – константа скорости биохимических процессов в сточной воде при температуре 20°C . Таким образом, модификация процесса самоочищения Стритера–Фелпса с добавлением биофильтра, описывается системой

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= -k_1L - kL, \\ \frac{dD}{dt} &= k_1L - k_2D \\ L(0) &= L_0, D(0) = D^0.\end{aligned}\quad (5)$$

Модификация построенной модели на двумерный случай заключается в добавлении в систему (5) оператора диффузии $\Delta = \lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

Для оценки областей решений модифицированной системы Стритера–Фелпса (4) с неточно заданными данными в докладе применяется подход основанный на построении символьных формул приближенных решений на основе оператора сдвига вдоль траектории и нахождении областей значений получившихся формул.

Схема алгоритма может быть записан так:

1. Применяется разностный метод (линейный многошаговый метод, либо один из явных методов Рунге–Кутты) для того, чтобы найти значение решения в точке t как функцию от начальных значений y_0, t_0 , считая их символами. item Находится область значений полученной символьной формулы, после подстановки вместо y_0 содержащих ее границ.

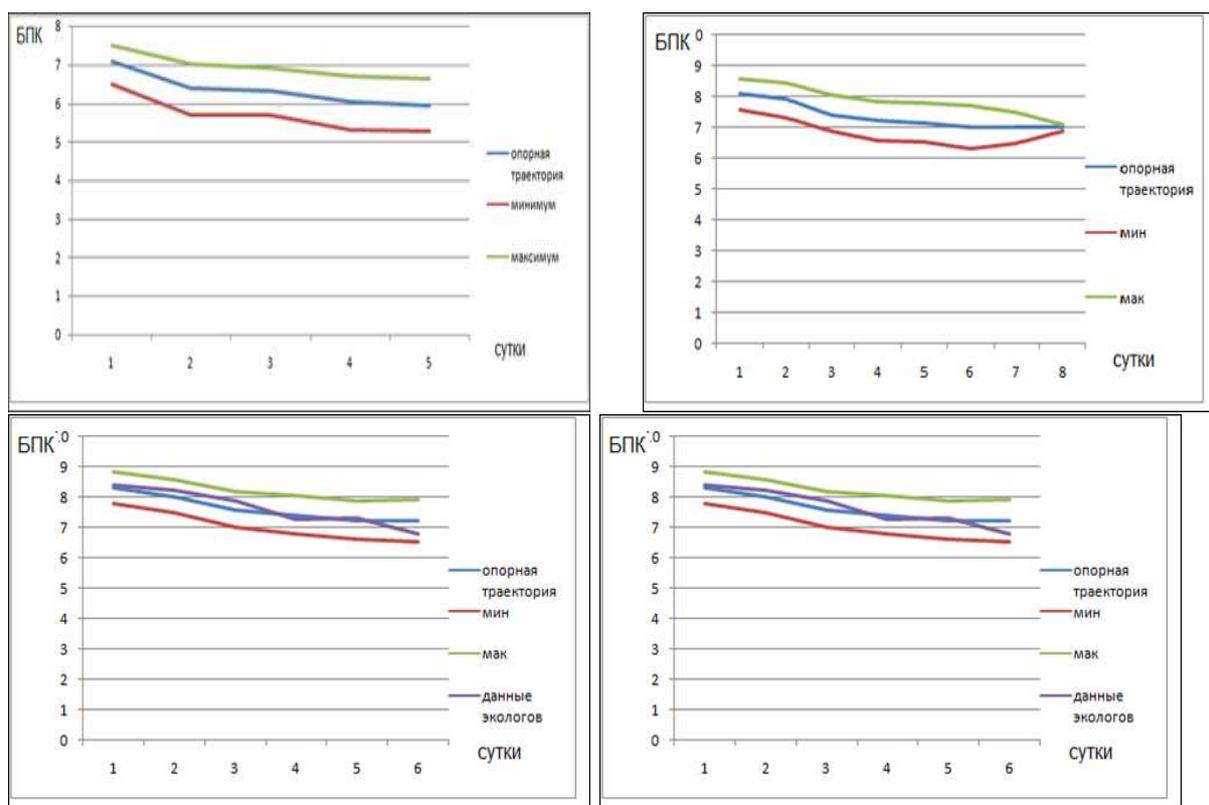


Рис. 3: Границы содержания БПК в Красноярском водохранилище вблизи Приморска с учетом ошибок измерений

- Для завершения процесса включения решений, к найденным границам добавляется оценка глобальной ошибки и ошибки, полученной при линеаризации формул.

Тогда формулу, по которой вычисляется оценка решения, можно представить так:

$$Y_k = P^m(Y_0) + h^k R(t_k),$$

здесь $Y_k = (y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{n,k})$ — вектор решений, $P^m(Y_0)$ — полином степени m относительно вектора начальных значений, получаемый при линеаризации получаемых формул решений относительно компонент вектора начальных значений, $R(t)$ — величина глобальной ошибки.

Обозначим совокупность точных решений задачи как

$$Y^*(t) = \left\{ y(t) \mid y(t_0) \in Y_0 \right\}. \quad (6)$$

Пусть на интервале $[t_0, t_k]$, где рассматривается эта задача введена сетка узлов

$$t_0 < t_1 < \dots, t_n = t_k, \tau = \max_i \{t_{i+1} - t_i\}.$$

Для оценки множеств решений систем ОДУ (4) в докладе используются формулы, задающие сдвиг вдоль траектории решения задачи Коши. При этом считается, что вектор начальных значений — это вектор символьных значений $y_1^0, y_2^0, y_3^0, \dots, y_n^0$.

ЛИТЕРАТУРА

- Дружинин Н. И., Шижкин А. И. Математическое моделирование и прогнозирование загрязнения поверхностных вод суши. Л.: Гидрометеоздат, 1989.

2. *Кондратьев В. Г.* Кислородный баланс и реэрация водотоков // Водные ресурсы. 1977. №2. С. 27-40.

3. *Streeter H., Phelps E.* A study of the pollution and a natural purification of the Ohio River // U.S. Publ. Health Service Bull. 1925. №146. p.1-75.

4. *Роголев А. Н., Роголев А. А.* Распараллеливание некоторых явных и неявных методов численного решения уравнений параболического типа // Тезисы докладов седьмой межрегиональной школы-семинара "Распределенные и кластерные вычисления Институт вычислительного моделирования СО РАН. Красноярск, СФУ, Институт вычислительных технологий СО РАН. Новосибирск, 2010 . с.44-46.

5. *Пряжсинская В. Г., Ярошевский Д. М., Левит-Гуревич Л. К.* Компьютерное моделирование в управлении водными ресурсами. М.: Физматлит, 2002.

6. *Вавилин В. А.* Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука. 1981.

Об одном методе обращения преобразования Лапласа⁴

Рябов В. М.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург;
riabov@vr1871.spb.edu*

1. Введение. Интегральное преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$,

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

представляет собой мощный инструмент для решения широкого класса прикладных задач математической физики. Одним из его главных достоинств является алгебраизация процедур математического анализа, с помощью которой удается свести интегральные и дифференциальные уравнения к более простым. Кроме того, изображение Лапласа является аналитической функцией в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \lambda$, что позволяет привлечь к исследованию решаемой задачи результаты теории функций комплексного переменного.

Как правило, при решении задач операционными методами наиболее трудным этапом является процесс обращения, т. е. определение оригинала по его изображению. Существуют таблицы соответствия функций-оригиналов и их изображений, теоремы разложения, формула обращения Римана–Меллина, позволяющие теоретически точно находить оригинал [1]. Но решение практических задач часто приводит к изображениям, к которым не могут быть применены эти классические приемы обращения. Следовательно, возникает необходимость разработки и применения приближенных методов.

Наиболее полно возможные подходы к задаче обращения и их реализация описаны в книге [2]. Обзор других способов обращения, не вошедших в [2], приведен в статье [3]. Теоретические основы операционного исчисления содержатся в классических работах [2, 4, 5, 6]. Вопросам приложения операционного исчисления к решению прикладных задач, среди прочих, посвящены фундаментальные труды [7, 8].

Не существует универсального метода обращения, дающего удовлетворительные результаты для произвольного изображения $F(p)$. Любой конкретный метод обращения должен учитывать специфику поведения изображения (или функции-оригинала), что прежде всего находит отражение в выборе подходящих систем функций в пространствах оригиналов и изображений, с которыми легко работать и с помощью которых могут быть хорошо

⁴ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00637.

приближены заданные образы и оригиналы. Выбор метода обращения существенно зависит от способа задания информации об изображении искомого оригинала. Перечислим типичные ситуации:

- 1) известны значения изображения $F(p)$ и его производных в некоторой фиксированной точке, отличной от бесконечности;
- 2) известны значения изображения $F(p)$ и его производных в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки;
- 3) известны значения изображения $F(p)$ на вещественной полуоси $p \geq 0$;
- 4) известны значения изображения $F(p)$ во всей полуплоскости $\operatorname{Re} p > \lambda$.

2. Обращение преобразования Лапласа по значениям изображения на вещественной оси.

Известна следующая

Теорема ([4], с. 385). Пусть $f(t) \in L(0, \infty)$ и ее преобразование Лапласа равно

$$F(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt.$$

Тогда для почти всех положительных значений t имеет место формула обращения

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n t^{n-1}}{n!(n-2)!} \int_0^{\infty} e^{-pt} p^{2n-1} F^{(n)}(p) dp. \quad (1)$$

Вхождение в эту формулу производной изображения ограничивает возможности ее применения. Однако интегрированием по частям она может быть представлена иначе:

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-pt} P_{2n-1}(pt) F(p) dp,$$

где

$$P_{2n-1}(p) = \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)!}{n!(n-2)!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-p)^{2n-j-1}}{(2n-j-1)!}.$$

Нетрудно проверить, что этот многочлен выражается через многочлены Лагерра общего вида

$$L_n(x; \alpha) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!} \quad (2)$$

простой формулой:

$$P_{2n-1}(p) = \frac{p^{n-1}}{(n-2)!} L_n(p; n-1).$$

В результате этих преобразований утверждение (1) теоремы запишется в виде

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad f_n(t) = \frac{1}{t(n-2)!} \int_0^{\infty} e^{-p} p^{n-1} L_n(p; n-1) F(p/t) dp.$$

Для приближенного вычисления последнего интеграла применим квадратурную формулу типа Гаусса с весом e^{-p} вида

$$\int_0^{\infty} e^{-p} \psi(p) dp \approx \sum_{k=1}^N A_k \psi(p_k), \quad (3)$$

точную для всех многочленов степени не выше $2N-1$.

Такой метод обращения преобразования Лапласа, пригодный и для определения величин скачков оригинала в точках разрыва первого рода, был предложен и исследован в работе [9]. Скорость его сходимости невелика: в общем случае $f_n(t)$ стремится к значению $(f(t+0) + f(t-0))/2$ со скоростью $1/\sqrt{n}$. Если же оригинал непрерывен в точке t , то $f_n(t) \rightarrow f(t)$ со скоростью не более, чем $1/n$ (в предположении бесконечной дифференцируемости оригинала разность $f_n(t) - f(t)$ представима рядом по степеням $1/n$). Эта априорная информация о характере убывания ошибки позволяет строить эффективные методы ускорения сходимости: пусть $f(t)$ достаточно гладкая функция, тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо разложение

$$f(t) - f_n(t) = C_1/n + C_2/n^2 + \dots,$$

и пусть известны значения $f_{n_1}(t), \dots, f_{n_m}(t)$. Положим

$$d_j = n_j/n_1, \quad c_{jm} = \prod_{i \neq j} d_j/(d_j - d_i), \quad j = \overline{1, m},$$

и вычислим значение

$$\sum_{j=1}^m c_{jm} f_{n_j}(t).$$

Оно будет отличаться от $f(t)$ на величину порядка n_1^{-m} . Заметим, что с ростом m могут потребоваться формулы (3) с большим числом узлов N (например, несколько сотен). Покажем, как их можно эффективно построить.

Узлы формулы (3) совпадают с корнями многочленов Лагерра (2) при $\alpha = 0$, т. е.

$$L_N(p_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Будем находить корни уравнения (4) методом Ньютона:

$$p_k^{j+1} = p_k^j - L_N(p_k^j)/L'_N(p_k^j), \quad j = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Начальные приближения ко всем корням многочленов (2), для которых метод (5) сходится, берем из приближенных равенств, приведенных в книге [10] (нам нужен лишь случай $\alpha = 0$, поскольку $L_N(p) = L_N(p; 0)$):

$$\begin{aligned} p_1 &\approx \frac{(1+\alpha)(3+0.92\alpha)}{1+2.4m+1.8\alpha}, \\ p_2 - p_1 &\approx \frac{15+6.25\alpha}{1+0.9\alpha+2.5m}, \\ \frac{p_{k+2} - p_{k+1}}{p_{k+1} - p_k} &\approx \frac{1}{1+0.3\alpha} \left(\frac{1+2.55k}{1.9k} + \frac{1.26k\alpha}{1+3.5k} \right), \quad k = \overline{1, N-2}. \end{aligned}$$

После нахождения с требуемой точностью всех узлов вычисляем коэффициенты формулы (3):

$$A_k = \frac{p_k}{(L'_N(p_k))^2}, \quad k = \overline{1, N}.$$

При вычислениях многочленов Лагерра следует использовать рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} (n+1)L_{n+1}(x; \alpha) &= (\alpha + 2n + 1 - x)L_n(x; \alpha) - (\alpha + n)L_{n-1}(x; \alpha), \quad n = 1, 2, \dots, \\ L_0(x; \alpha) &= 1, \quad L_1(x; \alpha) = 1 + \alpha - x, \end{aligned}$$

а значения их производных исключать с помощью соотношения

$$xL'_n(x; \alpha) = nL_n(x; \alpha) - (\alpha + n)L_{n-1}(x; \alpha).$$

Пример. Описанный метод применялся для обращения преобразований Лапласа, возникающих при решении задач линейной вязкоупругости, описываемых интегральными уравнениями Больцмана–Вольтерра со слабо сингулярными ядрами и содержащих в себе выражения вида

$$F(p) = \frac{1}{p^a + b}, \quad 0 < a < 1, \quad b > 0.$$

При проведении расчетов по программе на языке программирования C++ со стандартной точностью вычислений следует использовать квадратурную формулу вида (3) при $N \leq 30$, $m \leq 4$ и $n_1 \approx 20$. В среде Maple, позволяющей выбирать число значащих цифр при проведении вычислений с помощью параметра Digits, для достижения требуемой точности можно использовать, например, $n_1, N \approx 200$, $m \approx 10$, но при этом значение параметра Digits резко возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: “Высшая школа”, 1961.
2. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: “Наука”, 1974.
3. Порошина Н. И., Рябов В. М. Об обращении преобразования Лапласа некоторых специальных функций // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 3. С. 50–60.
4. Widder D. V. The Laplace transform. Princeton, 1946.
5. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: “Наука”, 1971.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: “Лань”, 2002.
7. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. М.-Л.: “ГИИТЛ”, 1951.
8. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: “Судостроение”, 1980.
9. Рябов В. М. Формула обращения преобразования Лапласа, основанная на теореме Виддера // Вестн. Ленингр. ун-та. 1989. № 22. С. 35–39.
10. Stroud A. H., Secrest D. Gaussian quadrature formulas. N.-Y., 1966.
11. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: “Наука”, 1977.

Квадратурные формулы общего вида для классов периодических функций

Санеева Л. И. Данзанова В. С.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ;

В данной работе рассматриваются квадратурные формулы, содержащие значения функции и ее производных. Дается общий вид периодического функционала с учетом коэффициентов суммы производных, определены нормы периодического функционала погрешности и экстремальной функции.

Рассмотрим квадратурную формулу общего вида:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \approx \sum_{\gamma=0}^N \sum_{k=0}^{\rho_\gamma} C_{\gamma,k} \varphi^{(k)}(h\gamma) / \tag{1}$$

Для построения периодического функционала используем простейшую формулу

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \approx \sum_{\gamma=0}^N \sum_{k=0}^{\rho_\gamma} C_{\gamma,k} \varphi^{(k)}(\gamma) \quad (2)$$

с функционалом погрешности

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi_{(0,1)}(x) - \sum_{\gamma=0}^N \sum_{k=0}^{\rho_\gamma} (-1)^k \delta^{(k)}(x - \gamma) \right] \varphi(x) dx. \quad (3)$$

Пусть m — гладкость пространства и функционал погрешности $l(x)$ ортогонален многочленам степени m , т.е.

$$\langle l, x^\alpha \rangle = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m. \quad (4)$$

Коэффициенты $C_{\gamma,k}$ формулы (2) определяются из следующей линейной системы уравнений

$$\sum_{\gamma=0}^N \sum_{k=0}^{\rho_\gamma} C_{\gamma,k} \frac{\alpha!}{k!} \gamma^{[\alpha-k]} = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad (5)$$

где $\gamma^{[\alpha-k]} = \begin{cases} \gamma^{[\alpha-k]}, & \text{если } \alpha \geq k \\ 0, & \text{если } \alpha < k \end{cases}$ и $\alpha = 0, 1, \dots, m = \rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_s + s$.

Будем считать, что числа $s, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_s$ выбраны так, чтобы система (5) имела решение при условии $m = \rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_s + s$.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \approx \sum_{\gamma=0}^s \sum_{k=0}^{s-\gamma} C_{\gamma,k} \varphi^{(k)}(\gamma). \quad (6)$$

Продолжим функционал погрешности

$$l(x) = \xi_{(0,1)}(x) - \sum_{\gamma=0}^s \sum_{k=0}^{s-\gamma} (-1)^k C_{\gamma,k} \delta^{(k)}(x - \gamma)$$

на всю числовую ось путем суммирования по β .

Следовательно, периодический функционал погрешности общего вида записывается в виде

$$\tilde{l}(x) = 1 - \sum_{k=0}^s D_k (-1)^k \varphi_0^{(k)}(x), \quad (7)$$

где $D_k = \sum_{\gamma=0}^{s-\gamma} C_{\gamma,k}$.

Пусть $\varphi \in \tilde{L}_p^m(\Delta)$ и $\tilde{l} \in \tilde{L}_p^{m*}(\Delta)$.

Из условия рефлексивности пространства $\tilde{L}_p^m(\Delta)$ при $1 < p < \infty$ имеем

$$\langle \tilde{l}, \varphi_0 \rangle = \|\tilde{l}\|_{\tilde{L}_p^{m*}(\Delta)}, \quad \|\varphi_0\|_{\tilde{L}_p^m(\Delta)} = 1. \quad (8)$$

Решая вариационную задачу (8) по методу Эйлера, находим

$$\langle \tilde{l}, \varphi_0 \rangle = \|\tilde{l}\|_{\tilde{L}_p^{m*}(\Delta)} \int_{\Delta} |\varphi_0^{(m)}(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} \varphi_0^{(m)}(x) \varphi_0^{(m)}(x) dx, \quad \forall \varphi \in \tilde{L}_p^m(\Delta) \quad (9)$$

В результате получаем

$$\psi_0^{(m)}(x) = \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum_{k=0}^s D_k(-2\pi i\beta)^k e^{-2\pi i\beta x}}{(-2\pi i\beta)^m} \right|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum_{k=0}^s D_k(-2\pi i\beta)^k e^{-2\pi i\beta x}}{(-2\pi i\beta)^m}. \quad (10)$$

Правую часть равенства (10) разложим в ряд Фурье

$$\psi_0^{(m)}(x) = \sum_{\gamma \neq 0} c_\gamma e^{-2\pi i\gamma x},$$

где

$$c_\gamma = \int_{\Delta} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum_{k=0}^s D_k(-2\pi i\beta)^k e^{-2\pi i\beta y}}{(-2\pi i\beta)^m} \right|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn} \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum_{k=0}^s D_k(-2\pi i\beta)^k e^{-2\pi i\beta y}}{(-2\pi i\beta)^m} e^{2\pi i\gamma y} dy \quad (11)$$

Решение уравнения (10) определяется равенством

$$\psi_0(x) = \sum_{\gamma \neq 0} \frac{c_\gamma e^{-2\pi i\gamma x}}{(-2\pi i\gamma)^m}, \quad (12)$$

где c_γ выражается формулой (11).

Итак, $\psi_0(x)$ — экстремальная функция функционала погрешности $\tilde{l}(x)$.

Вернемся к решению вариационной задачи. В силу $\langle \tilde{l}, 1 \rangle = 0$ находим

$$\int_{\Delta} \left((-1)^{m+1} \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum_{k=0}^s D_k(-2\pi i\beta)^k e^{-2\pi i\beta x}}{(2\pi i\beta)^m} + c \right) \varphi^{(m)}(x) dx = \langle \tilde{l}, \varphi \rangle. \quad (13)$$

Равенство (13) определяет общее представление периодического функционала в общем виде.

Введем обозначение $B_m^s(x) = \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum_{k=0}^s D_k(-2\pi i\beta)^k e^{-2\pi i\beta x}}{(2\pi i\beta)^m}$.

Теорема. Если $1 < p < \infty$, $\forall \varphi \in \tilde{L}_p^m(\Delta)$, $\tilde{l} \in \tilde{L}_p^{m*}(\Delta)$ и $\psi_0(x)$ — экстремальная задача для периодического функционала $\tilde{l}_0(x)$, то общее представление оптимального периодического функционала $\tilde{l}_0(x)$ имеет вид

$$\langle \tilde{l}_0, \varphi \rangle = \int_0^1 [B_m^s(x) + c_0] \varphi^{(m)} dx, \quad \forall \varphi \in \tilde{L}_p^m(\Delta), \quad (14)$$

экстремальная функция $\psi_0(x)$ для периодического функционала $\tilde{l}_0(x)$ в явном виде выражается формулой

$$\psi_0(x) = \int_0^1 \left(|B_m^s(x) + c_0|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn}(B_m^s(x) + c_0) \frac{e^{-2\pi i\gamma x + 2\pi i\gamma y}}{(2\pi i\gamma)^m} + c_0 \right) dx, \quad (15)$$

нормы периодического функционала $\tilde{l}_0(x)$ и экстремальной функции $\psi_0(x)$ соответственно определяются равенствами

$$\|\tilde{l}_0\|_{\tilde{L}_p^m(\Delta)} = \left[\int_0^1 |B_m^s(x) + c|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \quad (16)$$

и

$$\|\psi_0(x)\|_{\tilde{L}_p^m(\Delta)} = \left[\int_0^1 |B_m^s(x) + c|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (17)$$

Пусть $\Delta = [0, 1)$ — фундаментальный полуинтервал, $\Delta_{h\beta} \leq x < h\beta + h$.

Замена $x = h\gamma$ в интеграле $\int_0^h \varphi(x) dx = h \int_0^1 \varphi(h\gamma) d\gamma$ и квадратурная формула (2) дают формулу

$$\int_0^h \varphi(x) dx = \sum_{\gamma=0}^s \sum_{k=0}^{\rho_\gamma} c_{\gamma,k} h^{k+1} \varphi(h\gamma) \quad (18)$$

с функционалом погрешности

$$\langle l\left(\frac{x}{h}\right), \varphi(x) \rangle = \int_{\Delta} \left[\xi_{(0,1)}\left(\frac{x}{h}\right) - \sum_{\gamma=0}^s \sum_{k=0}^{\rho_\gamma} c_{\gamma,k} (-1)^k h^{k+1} \delta^{(k)}(x - h\gamma) \right] \varphi(x) dx. \quad (19)$$

Суммируя локальные функционалы $l\left(\frac{x}{h} - \beta\right)$ по всем β проводя преобразования для $l\left(\frac{x}{h}\right)$, аналогичные предыдущему, получим оптимальный периодический функционал погрешности

$$\tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) = 1 - \sum_{k=0}^s (-1)^k D_{\gamma,k} \Phi_0^{(k)}\left(\frac{x}{h}\right) h^k, \quad (20)$$

Воспользовавшись заменой β на $h^{-1}\beta$ в формуле (15) получим экстремальную функцию оптимального периодического функционала $\tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right)$

$$\psi_0\left(\frac{x}{h}\right) = h^{mp'} \int_0^1 |B_m^s(y) + c_0|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn}(B_m^s(y) + c_0) \left[\sum_{\gamma \neq 0} \frac{2\pi i \gamma (h^{-1}x - \gamma)}{(2\pi i \gamma)^m} + c_0 \right] dx, \quad (21)$$

Согласно равенству (9) получаем

$$\langle \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right), \psi_0\left(\frac{x}{h}\right) \rangle_{\Delta} = h^{mp'} \int_0^1 |B_m^s(x) + c_0|^{p'} dx = \|\psi_0\|_{\tilde{L}_p^m(\Delta)}^p \quad (22)$$

Экстремальная функция функционала $\tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right)$ удовлетворяет

$$\|l\|_{\tilde{L}_p^{m*}(\Delta)} = \|\psi\|_{\tilde{L}_p^m(\Delta)}^{p-1}. \quad (23)$$

или

$$\|\psi\|_{\tilde{L}_p^m(\Delta)^p} = \|l\|_{\tilde{L}_p^{m*}(\Delta)}^{p'}. \quad (24)$$

На основании равенств (22), (23) и (24) находим

$$\left\langle \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right), \psi_0\left(\frac{x}{h}\right) \right\rangle_{\Delta} = h^{mp'} \int_0^1 |B_m^s(x) + c_0|^{p'} dx = \left\| \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) \right\|_{\tilde{L}_p^{m*}(\Delta)}. \quad (25)$$

Отсюда получаем

$$\left\| \tilde{l}_0\left(\frac{x}{h}\right) \right\|_{\tilde{L}_p^{m*}(\Delta)} = h^m \left[\int_0^1 |B_m^s(x) + c|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \quad (26)$$

и

$$\left\| \psi_0\left(\frac{x}{h}\right) \right\|_{\tilde{L}_p^m(\Delta)} = h^{\frac{m}{p-1}} \left[\int_0^1 |B_m^s(x) + c|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (27)$$

Работа выполняется в рамках целевой программы МОиН РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 г.г.) на 2011 год" (проект № РНП 2.1.1/13828).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шойнжуров Ц. Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах // Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. 247 с.
2. Санеева Л. И., Булгатова Е. Н. Экстремальная функция и норма оптимального периодического функционала // Вычислительные технологии, Т. 11, Спец. выпуск, ИВТ СО РАН, 2006. С. 113–117.

Определение второй компоненты матрицы аэрозольного рассеяния по наземным измерениям поляризованного излучения в альмукантарате Солнца методом Монте-Карло

Ухинов С. А., Чимаева А. С.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
Новосибирский государственный университет; sau@ssc.ru

Введение. Рассматривается процесс переноса поляризованного излучения в рассеивающей и поглощающей среде. Существуют разные способы описания поляризационных свойств света. Наиболее распространенным и удобным является способ, предложенный Дж. Г. Стоксом в 1852 г., которым мы и воспользуемся. Он ввел четыре параметра: I, Q, U, V , имеющие размерность интенсивности, которые определяют в совокупности интенсивность, степень поляризации, плоскость поляризации и степень эллиптичности излучения. Мы будем рассматривать их как компоненты вектор-параметра Стокса $\Phi = (I, Q, U, V)^T$ в четырехмерном функциональном пространстве. При этом для параметров Стокса справедливы следующие соотношения: $I \geq 0, I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$. Отметим, что для естественного света $Q = U = V = 0$. Для эллиптически поляризованного света $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$.

Для стационарных задач компоненты стоксовских вектор-функций зависят от пяти переменных: $\Phi = \Phi(x), x \in X$, где $X = R \times \Omega, R \subseteq \mathbf{R}^3$ – пространство координат, $\Omega = \{\omega \in \mathbf{R}^3 : |\omega| = 1\}$ – пространство единичных векторов направлений. Математическая модель переноса поляризованного излучения строится на основе феноменологического предположения о том, что в результате рассеяния ассоциируемый с “фотоном” вектор Стокса преобразуется заданной матрицей рассеяния (см., например, [3]).

Рассмотрим стационарное интегро-дифференциальное векторное уравнение переноса поляризованного излучения:

$$\omega \nabla \Phi + \sigma \Phi = \int_{\Omega} \sigma_s P(\omega', \omega, r) \Phi(r, \omega') d\omega' + \mathbf{f}_0(r, \omega),$$

или $\mathbf{L}\Phi + \sigma\Phi = \mathbf{S}\Phi + \mathbf{f}_0$, где σ_s – сечение (коэффициент) рассеяния, $\sigma = \sigma_s + \sigma_c$, σ_c – сечение поглощения; \mathbf{f}_0 – вектор-функция источника излучения, $P(\omega', \omega, r)$ – матричная функция рассеяния, которая определяется соотношением $P(\omega', \omega, r) = L(\pi - i_2)R(\omega', \omega, r)L(-i_1)$, где L – специальная матрица поворота, $R = \{r_{ij}\}$ – матрица рассеяния [3]; i_1 – угол между плоскостью ω', s и плоскостью рассеяния ω, ω' ; i_2 – угол между плоскостью рассеяния ω, ω' и плоскостью ω, s ; s – вектор локальной сферической системы координат. В случае

изотропной среды матрица рассеяния имеет вид: $R(\mu, r) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & -r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}$, где

$\mu = (\omega', \omega)$ – косинус угла рассеяния. Если рассеивающие частицы являются однородными сферами, то $r_{11} = r_{22}, r_{12} = r_{21}, r_{33} = r_{44}, r_{34} = r_{43}$ и, таким образом, матрица рассеяния определяется четырьмя компонентами. При наличии в среде молекулярного и аэрозольного типов рассеяния матрица рассеяния R представляется как средневзвешенное от соответствующих матриц R_m и R_a : $R(\mu, r) = (R_a(\mu, r)\sigma_a(r) + R_m(\mu)\sigma_m(r))/(\sigma_a(r) + \sigma_m(r))$, где σ_a, σ_m – сечения соответственно аэрозольного и молекулярного рассеяния, $\sigma_s = \sigma_a + \sigma_m$.

1. Постановка задачи и условные обозначения. В атмосферной оптике рассматривается задача восстановления индикатрисы рассеяния атмосферы $r_{11}(\mu)$ по наземным наблюдениям яркости неба в альмукантарате Солнца, то есть в различных направлениях ω_i , составляющих с зенитом тот же угол θ_s , что и направление на Солнце [1, 4, 5].

В настоящей работе ставится задача восстановления второй компоненты $r_{12}(\mu)$ матрицы рассеяния по наблюдениям вектора Стокса в альмукантарате Солнца. Разработаны алгоритмы восстановления $r_{12}(\mu)$, алгоритм вычисления матриц Якоби операторов перехода построенных методов и проведены вычисления для различных параметров среды и численное исследование сходимости методов.

Заметим, что для решения конкретной задачи нужно иметь, наряду с наблюдениями вектора Стокса, соответствующие оптические параметры (толщи поглощения, аэрозольного и молекулярного рассеяния, альbedo подстилающей поверхности) на момент проведения эксперимента. В дальнейшем изложении будем предполагать эти параметры известными.

Наблюдение ведется с поверхности Земли в K направлениях ω_i^* , каждое из которых задается зенитным углом θ_s и азимутальным углом φ_i : $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K) = (0, \varphi_2, \dots, 180)$. Таким образом, первое из этих направлений обращено к Солнцу $\omega_1^* = -\omega_s$. Обозначим $\theta_1, \dots, \theta_K$ – углы однократного рассеяния, т.е. θ_i – это угол между i -тым и первым направлением: $0^\circ = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_K = 2\theta_s < 180^\circ$.

Пусть g – вектор узловых значений второй компоненты матрицы рассеяния: $r_{12}(\mu) = \frac{\sigma_a}{\sigma_s} r_{12,a}(\mu) + \frac{\sigma_m}{\sigma_s} r_{12,m}(\mu)$; $r_{12,m}(\mu) = -\frac{3}{8}(1 - \mu^2)$ – вторая компонента известной молекулярной (рэлеевской) матрицы рассеяния, $r_{12,a}(\mu)$ – искомая вторая компонента аэрозольной матрицы рассеяния, построенная по вектору значений $\{g_i\}_{i=1}^K$; $F_i(g) = (F_{1,i}, F_{2,i}, F_{3,i}, F_{4,i})$ – вектор Стокса в направлении наблюдения ω_i : $F_i(g) = F_i^{(1)}(g) + F_i^{(2)}(g) + F_i^{(A)}(g)$; $F_i^{(1)}(g)$ – вектор Стокса однократно рассеянного излучения; $F_i^{(A)}(g)$ – вектор Стокса “подсветки” подстилающей поверхностью; $F_i^{(2)}(g)$ – вектор Стокса многократно рассеянного излучения при нулевом альbedo А; F_i^* – измеренный вектор Стокса.

Однократно рассеянное излучение вычисляется аналитически, т.к. во всех направлениях наблюдения атмосферная толща одинакова: $F_{1,i}^{(1)} = Cr_{11}(\mu_i)$, $F_{2,i}^{(1)} = C \cos 2i_2(\mu_i)g(\mu_i)$, $F_{3,i}^{(1)} = C \sin 2i_2(\mu_i)g(\mu_i)$. Здесь i_2 – угол между плоскостью рассеяния $-\omega_i, -\omega_s$ и плоскостью ω_i, s ; $s = (0, 0, 1)$, $\mu = (\omega_s, \omega_i)$. $\cos i_2(\mu_i) = -\frac{\cos \theta_s}{\sin \theta_s} \sqrt{\frac{1-\mu_i}{1+\mu_i}}$; $C = \mu_0^{-1} \tau_s \exp(-\frac{\tau}{\mu_0})$, где $\mu_0 = \cos \theta_s$ – параметр альмукуантарата, τ – полная оптическая толща атмосферы, то есть $\tau = \int_0^H \sigma(z)dz$, τ_s – оптическая толща атмосферы по-рассеянию, H – высота атмосферы.

Методы решения Следующие алгоритмы были построены на основе методов восстановления индикатрисы рассеяния, предложенных в работах [1, 4, 5].

Аддитивный метод:

$$g_i^{(k)} = \frac{F_i^* - F_i(g^{(k-1)}) + g_i^{(k-1)} C \cos 2i_2(\mu_i)}{C \cos 2i_2(\mu_i)} = G_{ad}(g^{(k-1)}).$$

Модифицированный аддитивный метод:

$$g_i^{(k)} = \frac{F_i^* - F_i(g^{(k-1)}) + q_i \sqrt{(F_{2,i}^{(1)}(g^{(k-1)}))^2 + (F_{3,i}^{(1)}(g^{(k-1)}))^2}}{C} = G_{ad1}(g^{(k-1)}),$$

где $q = \text{sign}(F_{2,i}^{(1)}(g^{(k-1)}) \cos 2i_2(\mu_i))$.

Комбинированный метод по второй/третьей компоненте вектора Стокса ($m=2$ или $m=3$):

$$g_i^{(k)} = g_i^{(k-1)} \cdot \frac{F_{m,i}^* - F_{m,i}^{(A)}(g^{(k-1)})}{F_{m,i}(g^{(k-1)}) - F_{m,i}^{(A)}(g^{(k-1)})} = G_m(g_i^{(k-1)}).$$

Алгоритм решения:

П. 0. По заданному вектору F^* находим начальное приближение $g_a^{(0)}$ - вектора узловых значений второй компоненты матрицы аэрозольного рассеяния:

$$g_{a,i}^{(0)} = \frac{\sigma_s}{\sigma_a C \cos 2i_2(\mu_i)} F_i^* - \frac{\sigma_m}{\sigma_a} r_{12,m}(\mu_i).$$

П. 1. Строим приближенную матрицу рассеяния и вычисляем F, F_A, F_1, F_2 . Для решения прямой задачи применяется локальная векторная оценка “по направлению” метода Монте-Карло.

П. 2. По формуле, соответствующей выбранному методу, находим следующее приближение g и полагаем $g_{a,i} = (\sigma_s g_i - \sigma_m r_{12,m}(\mu_i))/\sigma_a$. Далее идем на П.1 и продолжаем итерации до сходимости или расходимости алгоритма.

Тестовые расчеты показали сходимость методов при определенных параметрах среды, см. Рис. 1.

Известно что, для существования неподвижной точки оператора G и обоснования сходимости к ней итераций $g^{(k)}$ достаточно установить, что спектральный радиус матрицы Якоби $G'(g^*)$ меньше единицы [2, 4]. Для численной проверки сходимости были получены формулы для расчета матриц Якоби оператора перехода итерационных методов. В Таблице 1 приведены результаты расчетов спектрального радиуса и нормы матриц Якоби при $\tau_m = 0.05$, $A = 0.5$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00035).

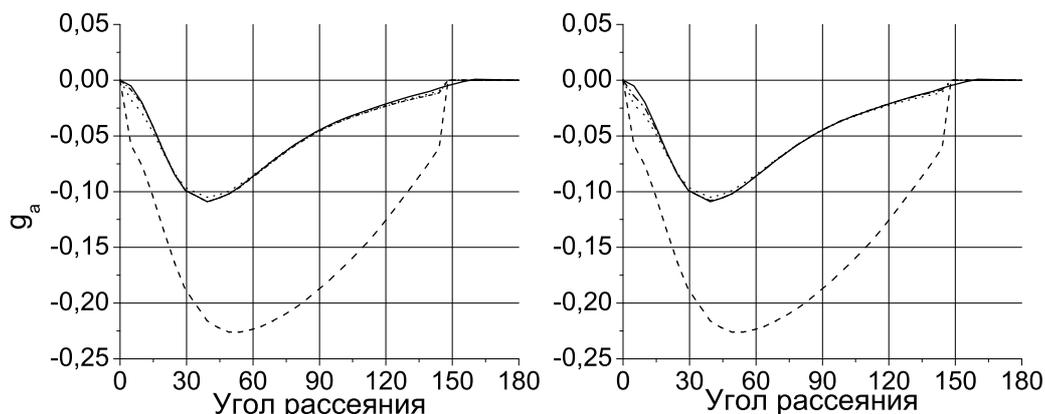


Рис. 4: Результаты расчетов комбинированным методом: по 2-ой компоненте (слева), по 3-ей компоненте (справа); — точное значение; - - - начальное приближение; ··· первая итерация; - · - третья итерация; $A=0.5$, $\tau_a = 0.15$, $\tau_m = 0.05$

Таблица 5: Спектральный радиус и норма для матриц Якоби операторов перехода итерационных методов. $\tau_m = 0.05$, $A = 0.5$

τ_a	Метод восстановления					
	Комб. $m=2$		Комб. $m=3$		Аддитивный	
	Сп.рад.	Норма	Сп.рад.	Норма	Сп.рад.	Норма
0,5	0,957	1,503	0,875	1,524	3,856	4,266
0,3	0,953	1,235	0,653	1,799	1,821	2,002
0,15	0,868	0,967	0,701	1,630	0,907	0,983
0,05	0,856	0,898	0,762	0,786	0,414	0,460

ЛИТЕРАТУРА

1. Антюфеев В. С., Михайлов Г. А., Лифшиц Г. Ш., Иванов А. И. Определение аэрозольных индикатрис рассеяния безоблачной атмосферы в спектральных областях $0.55 \div 2.4$ мкм. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1980. Т. 16. N 2. С. 146-155. СО АН СССР, 1988.
2. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутццкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
3. Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. [Engl.transl.: Springer - Verlag, 1980]
4. Ухинов С. А., Чимаева А. С. Обоснование сходимости для алгоритмов метода Монте-Карло восстановления индикатрисы рассеяния с учетом поляризации // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2011. Т. 14. N 1. С. 101–114.
5. Chimaeva A.S., Mikhailov G.A., Ukhiniyov S. A. Monte Carlo algorithms for reconstructing a scattering phase function with polarization taken into account // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009. Vol. 24. № 5. P. 455–465.

Об одной оптимальной квадратурной формуле в смысле Сарда

Хаётов А. Р.

Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент,
Узбекистан; abdullo_hayotov@mail.ru

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\nu=0}^N C_\nu \varphi(x_\nu), \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \sum_{\nu=0}^N C_\nu \delta(x - x_\nu), \quad (2)$$

где C_ν и x_ν ($\in [0, 1]$) являются коэффициентами и узлами формулы (1), $\chi_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция интервала $[0, 1]$, и $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Полагаем, что функции $\varphi(x)$ принадлежат в гильбертово пространство

$$K_2(P_2) = \left\{ \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi' \text{ — абсолютно непрерывно и } \varphi'' \in L_2(0, 1) \right\},$$

снабженной нормой

$$\|\varphi\|_{K_2(P_2)} = \left\{ \int_0^1 \left(P_2 \left(\frac{d}{dx} \right) \varphi(x) \right)^2 dx \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

где

$$P_2 \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d^2}{dx^2} + 1 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \left(P_2 \left(\frac{d}{dx} \right) \varphi(x) \right)^2 dx < \infty.$$

Равенство (3) является полунормой и $\|\varphi\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Следует отметить, что для линейного дифференциального оператора порядка n , $L \equiv P_n(d/dx)$ Алберг, Нильсон и Уолш в книге [1] исследовали гильбертовы пространства в контексте обобщенных функций.

Соответствующая погрешность квадратурной формулы (1) может быть выражена в виде

$$R_N(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\nu=0}^N C_\nu \varphi(x_\nu) = (\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx \quad (4)$$

и является линейным функционалом в сопряженном пространстве $K_2^*(P_2)$ к пространству $K_2(P_2)$.

По неравенству Коши Шварца

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{K_2(P_2)} \cdot \|\ell\|_{K_2^*(P_2)}$$

и погрешность (4) может быть оценена нормой функционала погрешности (2), т. е.

$$\|\ell\|_{K_2^*(P_2)} = \sup_{\|\varphi\|_{K_2(P_2)}=1} |(\ell, \varphi)|.$$

Таким образом, оценка погрешности квадратурной формулы (1) на пространстве $K_2(P_2)$ может быть приведена к нахождению нормы функционала погрешности $\ell(x)$ в сопряженном пространстве $K_2^*(P_2)$.

Очевидно, норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов C_ν и узлов x_ν , $\nu = 0, 1, \dots, N$. Задача нахождения минимума нормы функционала погрешности $\ell(x)$ по коэффициентам C_ν и узлам x_ν называется *задачей Никольского*, и полученная

формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Никольского*. Эта задача впервые рассмотрена С. М. Никольским [2], и продолжены многими математиками (см., например, [3] и литературу в нем). Минимизация нормы функционала функционала погрешности по коэффициентам C_ν когда узлы фиксированы, называется *Задачей Сарда*. Полученная формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда*. Эта задача впервые исследована А. Сардом [4].

Существуют несколько методов построения оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда. В пространстве Соболева $L_2^{(m)}(a, b)$, основываясь на эти методы, задача Сарда исследована многими авторами (см., например, [5] и литературу в нем). Здесь, $L_2^{(m)}(a, b)$ есть пространство С.Л. Соболева функций, которые имеют m -е обобщенные производные интегрируемые с квадратом.

В настоящей работе нами получено решение задачи Сарда в пространстве $K_2(P_2)$. Именно, нами найдены коэффициенты \hat{C}_ν (и функционал погрешности $\hat{\ell}$), такой что

$$\|\hat{\ell}|K_2^*(P_2)\| = \inf_{C_\nu} \|\ell|K_2^*(P_2)\|.$$

Справедливы следующие

Теорема 1. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда вида (1) в пространстве $K_2(P_2)$ имеют вид

$$C_\nu = \begin{cases} \frac{2 \sin h - (h + \sin h) \cos h}{(h + \sin h) \sin h} + \frac{h - \sin h}{(h + \sin h) \sin h (1 + \lambda_1^N)} (\lambda_1 + \lambda_1^{N-1}), & \nu = 0, N, \\ \frac{4(1 - \cos h)}{h + \sin h} + \frac{2h(h - \sin h) \sin h}{(h + \sin h)(h \cos h - \sin h)(1 + \lambda_1^N)} (\lambda_1^\nu + \lambda_1^{N-\nu}), & \nu = 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{2h - \sin 2h - 2 \sin h \sqrt{h^2 - \sin^2 h}}{2(h \cos h - \sin h)}$$

и $|\lambda_1| < 1$ $h = 1/N$, $N = 2, 3, \dots$.

Теорема 2. Квадрат нормы функционала погрешности (2) оптимальной квадратурной формулы вида (1) на пространстве $K_2(P_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \|\hat{\ell}\|^2 &= \frac{h(h - \sin h)[\sin h (\sin 1 - 1) + h \sin(h - 1) + 4 \cos h] + [3h^2 + h \sin h + 8(\cos h - 1)] \sin h}{2h(h + \sin h) \sin h} \\ &+ \frac{h(h - \sin h)}{2(h + \sin h)(1 + \lambda_1^N) \sin h} \left(\frac{(h \sin 1 - 4)(\lambda_1 + \lambda_1^N)(1 - \lambda_1) - 4(1 - \lambda_1^{N-1})(\lambda_1^2 + 1 - 2\lambda_1 \cos h)}{h(1 - \lambda_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\lambda_1^2 - 1) [(2 - \cos 1)(\lambda_1^N - 1) - (\lambda_1 - \lambda_1^{N-1}) \cos(h - 1)] \sin h}{\lambda_1^2 + 1 - 2\lambda_1 \cos h} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\lambda_1^2 \cos h - 2\lambda_1 + \cos h)(\lambda_1 + \lambda_1^{N-1}) \sin(h - 1)}{\lambda_1^2 + 1 - 2\lambda_1 \cos h} \right), \end{aligned}$$

где λ_1 дается в теореме 1 и $|\lambda_1| < 1$.

Теорема 3. Для нормы функционала погрешности (2) оптимальной квадратурной формулы вида (1) имеем

$$\|\hat{\ell}|K_2^*(P_2)\|^2 = \frac{1}{720} h^4 + O(h^5) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Следующая теорема об асимптотической оптимальности нашей квадратурной формулы.

Теорема 4. *Оптимальная квадратурная формула вида (1) с функционалом погрешности (2) в пространстве $K_2(P_2)$ является асимптотически оптимальной в пространстве С.Л. Соболева $L_2^{(2)}(0, 1)$, т.е.*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\|\overset{\circ}{\ell} |K_2^*(P_2)\|^2}{\|\overset{\circ}{\ell} |L_2^{(2)*}(0, 1)\|^2} = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York – London (1967).
2. Никольский С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи математических наук. 1950. Т. 5, № 3. С. 165–177.
3. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988. 256 с.
4. Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas. Amer. J. Math. **71**. P. 80–91 (1949).
5. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0, 1)$ space. J. Comput. Appl. Math. **235**. P. 1114–1128 (2011).

Схема переменных направлений для численного решения гипербола-параболического уравнения

Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ;
hanhvladnick@mail.ru

В работах одного из авторов, посвященных математическому моделированию процесса отключения электрической дуги в спутном потоке газа, численно и аналитически решались различные краевые задачи для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье.

Продолжая это исследование, модифицируем математическую модель [1], заменяя гиперболическое уравнение теплопроводности гипербола-параболическим уравнением в частных производных 2-го порядка

$$Lu = k(x, t)u_{tt} + a(x, t)u_t - \sum_{i=1}^2 u_{x_i x_i} + c(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

в цилиндрической области $G = \Omega \times [T_1, T_2]$, $\Omega = [0, m] \times [0, n]$, $T_1 < 0$, $T_2 > 0$, $m > 0$, $n > 0$; $\Gamma = \gamma \times [T_1, T_2]$, $\gamma = \partial\Omega$. При этом $k(x, t) = 0$, $t \leq 0$; $k(x, t) > 0$, $t > 0$; $a(x, t) > 0$, $\forall (x, t) \in G$, т. е. при $t \leq 0$ уравнение (1) параболическое, а при $t > 0$ гиперболическое.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области G такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0; u|_{t=T_1} = 0. \quad (2)$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) — достаточно гладкие функции и $c(x) < 0$ достаточно большой по модулю. Определим некоторые формулы:

$$(u, v)_1 = \int_G (u_x v_x + u_t v_t + uv) dG; u_x v_x = \sum_{i=1}^2 u_{x_i} v_{x_i}; \|u\|_1^2 = (u, u)_1; u, v \in W_2^1(G).$$

Пусть C_L — класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), $\widetilde{W}_2^1(G)$ — замыкание C_L по норме пространства $W_2^1(G)$. Через $\widehat{W}_2^1(G)$ обозначим класс функций $\eta(t)$ из $W_2^1(G)$, удовлетворяющих условиям

$$\eta|_{\Gamma} = 0; \eta|_{t=T_2} = 0.$$

Определение. Функция $u(x, t) \in \widehat{W}_2^1(G)$ называется обобщенным решением краевой задачи (1), (2), если выполнено тождество

$$(Lu, \eta)_0 \equiv \int_G -(ku_t \eta_t + k_t u_t \eta + u_x \eta_x - au_t \eta - cu \eta) dG = \int_G f \eta dG,$$

$$\forall \eta \in \widehat{W}_2^1(G).$$

В работе [2] для более общего уравнения доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $c(x) < 0$ достаточно большой по модулю,

$$2a - |k_t| \geq \delta > 0.$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^1(G)$ существует единственное решение $u(x, t)$ краевой задачи (1), (2) из пространства $W_2^2(G)$.

В ходе численного решения по явной разностной схеме значения u_{ij}^{k+1} вычисляются непосредственно по значениям предыдущего слоя u_{ij}^k . Поэтому общее число арифметических действий, необходимое при переходе со слоя на слой пропорционально числу $(N-1)^2$ узлов сетки на одном слое. Напомним, условие устойчивости явной схемы для данного случая $\tau \approx h^2$. Это значит, что для расчета до момента T времени число шагов будет иметь порядок N^2 . Таким образом, общее число арифметических действий будет пропорционально N^4 .

Если вести расчеты по неявной безусловно (устойчивой) схеме, то можно брать шаги τ и h одного порядка, т.е. $\tau \approx h$. Но в этом случае на каждом слое необходимо решать систему $(N-1)^2$ линейных уравнений. Даже с учетом разреженности матрицы системы для ее решения методом Гаусса потребуется число арифметических действий пропорциональное N^3 . Поскольку при расчете до момента T надо сделать N шагов по времени, то для решения всей задачи потребуется около N^4 действий.

Таким образом, для двумерной пространственной задачи как явная, так и неявная схемы приводят к одинаковому объему вычислений. На каждую вычисленную точку при $t = T$ потребуется около N^4 операций.

Для нашего двумерного уравнения (1) построим неявную разностную схему, по методу переменных направлений, которая к тому же является более экономичной, по сравнению с реализованными ранее [3, 4].

Введем в рассмотрение вспомогательный (полуцелый) слой $t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + \frac{\tau}{2}$ и запишем следующие разностные уравнения: ($t \leq 0$)

$$a \frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - u_{ij}^k}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^k + f_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - cu_{ij}^k, \quad (3)$$

$$a \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1} + f_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - cu_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

где $\Lambda_1 u_{ij} = \frac{1}{h_1^2}(u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j})$, $\Lambda_2 u_{ij} = \frac{1}{h_2^2}(u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1})$;

(t > 0)

$$k \frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^k + u_{ij}^{k-\frac{1}{2}}}{(\frac{\tau}{2})^2} + a \frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - u_{ij}^k}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^k + f_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - cu_{ij}^k, \quad (5)$$

$$k \frac{u_{ij}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + u_{ij}^k}{(\frac{\tau}{2})^2} + a \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1} + f_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - cu_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

Присоединяя к полученным уравнениям аппроксимацию начальных и краевых условий:

$$u_{ij}^0 = 0, u_{i0}^k = 0, u_{iN}^k = 0, u_{0j}^{k+\frac{1}{2}} = 0, u_{Nj}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \quad (7)$$

получим устойчивую разностную схему, которая сходится со вторым порядком точности по h_1, h_2, τ . Здесь $f_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{f_{ij}^k + f_{ij}^{k+1}}{2}$.

Вычисление решения разностной схемы (3), (7) осуществляется в два этапа. На первом вычисление значений u_{ij} на полуцелом слое $t_{k+\frac{1}{2}}$ ведется прогонкой в направлении оси $0x_1$. Второй этап - прогонка на слое t_k по оси $0x_2$. Поэтому эту схему называют продольно-поперечной или схемой переменных направлений.

Всего на одном слое осуществляется $2N$ прогонок, т.е. число арифметических операций на одном слое пропорционально N^2 . В используемой неявной схеме можем положить $\tau = h$ и тогда для расчета до момента T по времени надо сделать N шагов. Таким образом, трудоемкость решения всей задачи оценивается числом, имеющим порядок N^3 , что более чем на порядок лучше по сравнению с вышеописанными схемами.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 разностная схема (1), (2) устойчива и интерполляции $u_h^\tau(x, t)$ решений этой разностной задачи сходятся слабо в $W_2^1(G)$ при $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ к решению $u(x, t)$ краевой задачи (1), (2) из пространства $W_2^2(G)$.

Работа выполняется в рамках целевой программы МОиН РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 г.г.) на 2011 год" (проект № РНП 2.1.1/13828).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ханхасаев В. Н., Буянтуев С. Л. Численный расчет одной математической модели электрической дуги в потоке газа // Сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. "Энергосберегающие и природоохранные технологии на Байкале" ВСГТУ, БГУ. Улан-Удэ, 2001. С. 168–172.
2. Терехов А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Сб. мет. функ. анализа к задачам мат. физ. и выч. матем. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979. С. 128–136.
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики // М.: Наука, 1973. 409 с.
4. Романова Н. А. О сходимости разностных схем краевых задач для уравнений смешанного типа: Дис: канд. физ.-мат. наук (01.01.02). Якутский гос.универс. Якутск, 1994. 109 с.

Об одном погрешности весовых кубатурных формул в пространстве $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$

Хаятов Х. У., Очилова Н. Т.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;

Настоящая работа посвящена функциям n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принадлежащих пространствам $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$, т.е. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \tilde{C}^{(m)}(T_n)$, где T_n — n -мерный тор.

Определение 1. Пространство $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$ определяется как замыкание множества конечных рядов Фурье

$$\sum_{\gamma} \hat{f}[\gamma] e^{-2\pi i(\gamma, x)} = f(x)$$

с полунормой

$$\|f(x)|\tilde{C}^{(m)}(T_n)\| = \max_{x \in T_n} \left| \sum_{\gamma \neq 0} |\gamma|^m \hat{f}[\gamma] e^{-2\pi i(\gamma, x)} \right|, \quad (1)$$

где $(\gamma, x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k x_k$ и $\hat{f}[\gamma] = \langle f(x), e^{2\pi i(\gamma, x)} \rangle = \int_{T_n} f(x) e^{2\pi i(\gamma, x)} dx$, т.е. коэффициенты Фурье.

Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_{T_n} P(x) f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}), \quad (2)$$

где $P(x)$ — весовая функция, C_{λ} — коэффициенты и $x^{(\lambda)}$ — узлы кубатурной формулы (2).

Кубатурной формуле (2) сопоставим обобщенную функцию

$$\ell(x) = P(x) \varepsilon_{T_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \delta(x - x^{(\lambda)}) \quad (3)$$

и назовем ее функционалом погрешности.

Здесь $\delta(x)$ — функция Дирака и $\varepsilon_{T_n}(x)$ — характеристическая функция тора T_n .

Справедлива следующая

Теорема. Для нормы функционала погрешности (3) кубатурной формулы (2) в пространстве $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$ имеет место следующее равенство

$$\|\ell(x)|\tilde{C}^{(m)*}(T_n)\| = \inf_{\chi} \int_{T_n} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\hat{P}[\gamma] - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} e^{-2\pi i(\gamma, x^{(\lambda)})}}{|\gamma|^m} \cdot e^{2\pi i(\gamma, x)} + \chi \right| dx,$$

где χ — произвольное действительное число.

Доказательство. Известно, что пространство $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$ является факторпространством по пространству действительных чисел, тогда

$$\langle \ell(x), 1 \rangle = 0. \quad (4)$$

Так как

$$f(x) = \sum_{\gamma} \hat{f}[\gamma] e^{-2\pi i(\gamma, x)},$$

где $\hat{f}[\gamma] = \langle f(x), e^{2\pi i(\gamma, x)} \rangle$, то имеем

$$\langle \ell(x), f(x) \rangle = \langle \ell(x), \sum_{\gamma} \hat{f}[\gamma] e^{-2\pi i(\gamma, x)} \rangle = \sum_{\gamma} \hat{f}[\gamma] \langle \ell(x), e^{-2\pi i(\gamma, x)} \rangle. \quad (5)$$

Для вычисления правой части (5) сначала вычислим

$$\langle \ell_N(x), e^{2\pi i(\gamma, x)} \rangle .$$

Пусть $\gamma = 0$, то имея ввиду (4) из (5), получим

$$\langle \ell(x), 1 \rangle = \hat{P}[0] - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda = 0 \quad (6)$$

В случае $\gamma \neq 0$ получим

$$\langle \ell(x), e^{-2\pi i(\gamma, x)} \rangle = \hat{P}[-\gamma] - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda e^{-2\pi i(\gamma, x^{(\lambda)})}. \quad (7)$$

Таким образом, из (5) и (7), с учетом (6), имеем

$$\langle \ell(x), f(x) \rangle = \int_{T_n} [\psi_m(x) + \chi] f(x) dx, \quad (8)$$

где

$$\psi_m(x) = \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\left[\hat{P}[\gamma] - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda e^{-2\pi i(\gamma, x^{(\lambda)})} \right]}{|\gamma|^m} \cdot e^{2\pi i(\gamma, x)},$$

$$f(x) = \sum_{\gamma \neq 0} |\gamma|^m \hat{f}[\gamma] \cdot e^{2\pi i(\gamma, x)}$$

Правую часть (3) обозначим через $L(f(x))$. Множество всех функций $f(x)$ образует подпространство пространства $C(T_n)$, которое обозначим $\overset{0}{C}(T_n)$.

Очевидно, чтобы вычислить норму функционала $\langle \ell(x), f(x) \rangle$ над пространством $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$, имея в виду равенство (8), вычислим норму функционала $L(f(x))$ над пространством $\overset{0}{C}(T_n)$.

Применяя к (8) неравенство Гельдера, получим следующую оценку:

$$|\langle \ell(x), f(x) \rangle| = \left| L(f(x)) \right| = \left| \int_{T_n} [\psi_m(x) + \chi] f(x) dx \right| \leq \max_{x \in T_n} |f(x)| \int_{T_n} |\psi_m(x) + \chi| dx. \quad (9)$$

Так как неравенство (9) выполняется для всех χ , то справедливо неравенство

$$|\langle \ell(x), f(x) \rangle| \leq \max_{x \in T_n} |f(x)| \inf_{\chi} \int_{T_n} |\psi_m(x) + \chi| dx = K \left\| f(x) | \tilde{C}^{(m)}(T_n) \right\|, \quad (10)$$

где

$$K = \inf_{\chi} \int_{T_n} |\psi_m(x) + \chi| dx \quad (11)$$

поэтому $|\langle \ell(x), f(x) \rangle| \leq K \left\| f(x) | \tilde{C}^{(m)}(T_n) \right\|$.

Из этого следует, что

$$\left\| \ell(x) | \tilde{C}^{(m)*}(T_n) \right\| \leq K. \quad (12)$$

Докажем, что в неравенстве (10) фактически имеет место равенство, т.е.

$$\left\| \ell(x) | \tilde{C}^{(m)*}(T_n) \right\| = K. \quad (13)$$

Для этого построим максимизирующую последовательность функции $g_\varepsilon(x)$ такую, что

$$\int_{T_n} g_\varepsilon(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \left\| g_\varepsilon(x) | \tilde{C}(T_n) \right\| = 1.$$

Такая последовательностью является последовательность функций

$$g_\varepsilon(x) = g(x) * \eta_\varepsilon(x) = \int_{T_n} g(y) \eta_\varepsilon(x-y) dy = \int_{T_n} \eta_\varepsilon(y) g(x-y) dy,$$

где

$$g(x) = \text{sign}[\psi_{m-S}(x) + \overset{0}{\chi}],$$

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} A_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Свертка $g(x) * \eta_\varepsilon(x)$ называется средней функцией, функция $\eta_\varepsilon(x)$ - ядро усреднения. Постоянную A_ε будем считать такой, что $\int_{T_n} \eta_\varepsilon(x) dx = 1$, т.е. $A_\varepsilon \cdot \varepsilon^n \int_{|\xi|} e^{-\frac{1}{1-|\xi|^2}} d\xi = 1$

Пусть

$$T_0 = \{x : g_\varepsilon(x) = g(x)\} \quad \text{и} \quad \psi_m(x) = \psi_m(x) + \overset{0}{\chi}$$

тогда

$$|L[g_\varepsilon(x)]| = \left| \int_{T_n} \overset{0}{\psi}_m(x) g_\varepsilon(x) dx \right| \geq \int_{T_n} \left| \overset{0}{\psi}_m(x) \right| dx - \left| \int_{T_n \setminus T_0} \left| \overset{0}{\psi}_m(x) \right| dx - \int_{T_n \setminus T_0} \overset{0}{\psi}_m(x) \cdot g_\varepsilon(x) dx \right|. \quad (14)$$

Так как $g_\varepsilon(x)$ слабо $g(x)$

$$\left| \int_{T_n \setminus T_0} \left| \overset{0}{\psi}_m(x) \right| dx - \int_{T_n \setminus T_0} \overset{0}{\psi}_m(x) \cdot g_\varepsilon(x) dx \right| = \left| \int_{T_n \setminus T_0} \overset{0}{\psi}_m(x) [g(x) - g_\varepsilon(x)] dx \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

(см. [1]).

Значит правая часть (14) при $\varepsilon \rightarrow 0$ равна $\int_{T_n} \left| \overset{0}{\psi}_m(x) \right| dx$. Таким образом,

$$\sup_{\|f\| = 1} \left| \int_{T_n} \overset{0}{\psi}_m(x) f(x) dx \right| \geq \int_{T_n} \left| \overset{0}{\psi}_m(x) \right| dx. \quad (15)$$

Из (12) и (15) следует равенство (13), т.е.

$$\left\| \ell(x) | \tilde{C}^{(m)*}(T_n) \right\| = \int_{T_n} \left| \overset{0}{\psi}_m(x) \right| dx = \int_{T_n} \left| \psi_m(x) + \overset{0}{\chi} \right| dx = \inf_{\chi} \int_{T_n} |\psi_m(x) + \chi| dx.$$

Что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.

Алгоритм численного решения одномерных прямых задач распространения SH волн в пористых средах

Холмуродов А. Э.

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан;

1. Постановка прямой задачи

Одномерное уравнение распространения сейсмических волн в пористой среде с учетом поглощения энергии, обусловленного коэффициентом межкомпонентного трения $\chi(z)$, имеет вид [1, 2]

$$\rho_s(z)U_{tt} = (\mu(z)U_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t) \quad (1)$$

$$\rho_l(z)V_{tt} = \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \quad (2)$$

где U и V — компоненты вектора смещения частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальными плотностями $\rho_s(z)$ и $\rho_l(z)$ соответственно, $\mu(z)$ — коэффициент Ламе.

Пусть пористая среда занимает полупространство $z > 0$, т. е. система уравнений (1), (2) справедлива при $z > 0$. Предположим, что среда покоится при $t \leq 0$:

$$U|_{t=0} = 0, \quad U_t|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad V_t|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Пусть на границе $z = 0$ приложена сила с импульсом:

$$\mu U_z|_{z=0} = F(t), \quad (5)$$

где

$$F(t) = \delta(t) + f(0)\varepsilon(t) + \dots,$$

$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $\varepsilon(t)$ — функция Хевисайда. Требуется по этой информации и заданным дважды непрерывно дифференцируемым функциям $\rho_s(z)$, $\mu(z)$ определить волновые поля $U = U(z, t)$, $V = V(z, t)$ из (1)-(4). Такую задачу будем называть прямой динамической задачей распространения сейсмических волн в пористой среде.

2. Вычислительный алгоритм решения прямой задачи

Проведем преобразования сначала для уравнения (1). Будем использовать систему координат времени пробега (x, t) с новой переменной $x(z) = \int_0^z \frac{1}{c(z)} ds$, (6) где $c(z) = \sqrt{\mu(z)/\rho_s(z)}$ — скорость волны. В системе координат (x, t) волновое уравнение преобразуется к виду

$$U_{tt} = \frac{[\sigma(x)U_x]_x}{\sigma(x)} - \tilde{q}(x)(U_t - V_t) \quad (7)$$

где $\tilde{q}(x) = \chi(x)\frac{\rho_l^2(x)}{\rho_s(x)}$ — известная функция, $\sigma(x) = \rho_s(x)c(x) = \sqrt{\mu(x)\rho_s(x)} = \frac{\mu(x)}{c(x)}$ полное сопротивление среды.

Так как уравнение (7) не меняется при умножении $\sigma(x)$ на константу, нормируем $\sigma(x)$ так, чтобы $\sigma(0) = 1$. Заметим, что при введенной таким образом функции $\sigma(x)$ вычисление коэффициента Ламе $\mu(x)$ становится эквивалентным вычислению $\sigma(x)$.

Положим $w = U_t$, $p = -\sigma(x)U_x$ и $r = V_t$. С новыми независимыми переменными волновое уравнение второго порядка (8) становится гиперболической системой уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix}_t + A(x) \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix}_x = - \begin{bmatrix} 0 \\ q(x)(w - r) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma(x) \\ \sigma^{-1}(x) & 0 \end{bmatrix}$$

Граничные условия преобразуются к виду

$$p(0, t) = -\sigma(0) U_x(0, t) = f(t). \quad (9)$$

Система (8) является строго гиперболической [3]. Она имеет два семейства характеристик, которые являются прямыми линиями с наклонами $+1$ и -1 , характеристическими корнями матрицы $A(x)$. Определяя

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & \sigma(x) \\ 1 & -\sigma(x) \end{bmatrix}$$

имеем

$$T(x) A(x) T^{-1}(x) = \Lambda.$$

Умножая систему (8) слева на $T(x)$ и полагая, что $\sigma(x)$ дифференцируемая функция, получаем каноническую форму системы (8):

$$(T\nu)_t + \Lambda (T\nu)_x = \Lambda T_x \nu - T \begin{bmatrix} 0 \\ q(x)(w-r) \end{bmatrix}$$

где $v = (p \ w)^T$. В покомпонентной записи система выглядит так

$$(p + \sigma w)_x + (p + \sigma w)_t = \sigma' w - \sigma(x) q(x) (w - r) \quad (10)$$

$$(p - \sigma w)_x - (p - \sigma w)_t = -\sigma' w - \sigma(x) q(x) (w - r) \quad (11)$$

где $\sigma'(x)$ производная $\sigma(x)$. Уравнения (10), (11) можно также записать в интегральной форме. Для произвольной фиксированной точки (x, t) из области $t > x$ и любого $\tilde{x} < x$ можно проинтегрировать уравнение (10) вдоль характеристики $dt/dx = 1$ от $(\tilde{x}, t - x + \tilde{x})$ до (x, t) . При этом считаем, что $h = x - \tilde{x} > 0$ достаточно мало. В полученном соотношении $\sigma'(s)$ под интегралом заменим на $\frac{\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})}{h}$ и применяя формулу трапеций получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & p(x, t) + \sigma(x) w(x, t) - [p(\tilde{x}, t - x + \tilde{x}) + \sigma(\tilde{x}) w(\tilde{x}, t - x + \tilde{x})] = \\ & = \frac{1}{2} [\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})] [w(x, t) + w(\tilde{x}, t - x + \tilde{x})] - \\ & - \frac{h}{2} [\sigma(x) q(x)(w(x, t) - r(x, t)) + \sigma(\tilde{x}) q(\tilde{x})(w(\tilde{x}, t - x + \tilde{x}) - r(\tilde{x}, t - x + \tilde{x}))], \quad (12) \end{aligned}$$

Проинтегрировав уравнение (11) вдоль характеристики $dt/dx = -1$ от $(\tilde{x}, t + x - \tilde{x})$ до (x, t) и поступая аналогично, получаем второе соотношение:

$$\begin{aligned} & p(x, t) - \sigma(x) w(x, t) - [p(\tilde{x}, t + x - \tilde{x}) - \sigma(\tilde{x}) w(\tilde{x}, t + x - \tilde{x})] = \\ & = \frac{1}{2} [\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})] [w(x, t) + w(\tilde{x}, t + x - \tilde{x})] + \\ & + \frac{h}{2} [\sigma(x) q(x)(w(x, t) - r(x, t)) + \sigma(\tilde{x}) q(\tilde{x})(w(\tilde{x}, t + x - \tilde{x}) - r(\tilde{x}, t + x - \tilde{x}))], \quad (13) \end{aligned}$$

Полученные уравнения (12) и (13) уже подходят для численного моделирования. Спроецируем величины p, w, r и σ на сетку, где точки сетки определяются пересечениями характеристических линий. Сеточные функции для σ, q, p, w и r определяются следующими соотношениями: $\sigma_i = \sigma[(i-1)h]$, $q_i = q[(i-1)h]$, $i = 1, 2, 3, \dots$, где σ нормирована так, что $\sigma_1 = 1$, $p_{ij} = p[(i-1)h, (2j-i-1)h]$, $w_{ij} = w[(i-1)h, (2j-i-1)h]$ и $r_{ij} = r[(i-1)h, (2j-i-1)h]$, для $i = 1, 2, 3, \dots$, и $j \geq i$.

Из начальных условий получаем, что

$$p_{ii} = w_{ii} = r_{ii} = 0 \text{ для } i = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

и, из граничных условий, имеем $p_{1j} = f_j = f[t = (j-1)h]$, $w_{1j} = g'_j = g'[t = (j-1)h]$. Предположим, что σ_i известны для $i = 1, 2, \dots, I$, а p_{ij} и w_{ij} вычислены для всех $i < I$ и $j > i$. Тогда мы можем выразить $p_{I,j}$ и $w_{I,j}$ из следующих соотношений, полученных с помощью проецирования уравнений (12) и (13) на сетку:

$$p_{I,j} + \sigma_I w_{I,j} = p_{I-1,j-1} + \sigma_{I-1} w_{I-1,j-1} + \frac{1}{2} [\sigma_I - \sigma_{I-1}] [w_{I,j} + w_{I-1,j-1}] - \frac{h}{2} [\sigma_I q_I (w_{I,j} - r_{I,j}) + \sigma_{I-1} q_{I-1} (w_{I-1,j-1} - r_{I-1,j-1})] \quad (15)$$

$$p_{I,j} - \sigma_I w_{I,j} = p_{I-1,j} - \sigma_{I-1} w_{I-1,j} - \frac{1}{2} [\sigma_I - \sigma_{I-1}] [w_{I,j} + w_{I-1,j}] - \frac{h}{2} [\sigma_I q_I (w_{I,j} - r_{I,j}) + \sigma_{I-1} q_{I-1} (w_{I-1,j} - r_{I-1,j-1})] \quad (16)$$

для $j = I+1, I+2, \dots$. Разрешим эти уравнения относительно $p_{I,j}$ и $w_{I,j}$. Так как $\sigma(x) > 0$, то $\sigma_{I-1} + \sigma_I > 0$. Получим:

$$p_{I,j} = \frac{1}{2} (p_{I-1,j-1} + p_{I-1,j}) + \frac{1}{4} (\sigma_{I-1} + \sigma_I) (w_{I-1,j-1} - w_{I-1,j}) - \frac{h}{2} \sigma_I q_I (w_{I,j} - r_{I,j}) - \frac{h}{4} \sigma_{I-1} q_{I-1} [(w_{I-1,j-1} - r_{I-1,j-1}) + (w_{I-1,j} - r_{I-1,j})] \quad (17)$$

$$w_{I,j} = \frac{(p_{I-1,j-1} - p_{I-1,j})}{\sigma_{I-1} + \sigma_I} + \frac{1}{2} (w_{I-1,j-1} + w_{I-1,j}) - \frac{h}{2} \frac{\sigma_{I-1} q_{I-1} [(w_{I-1,j-1} - r_{I-1,j-1}) - (w_{I-1,j} - r_{I-1,j})]}{\sigma_{I-1} + \sigma_I} \quad (18)$$

В частности вычислены $p_{I,I+1}$ и $w_{I,I+1}$. Вернемся теперь к уравнению (2). Поделив его правую и левую части на $\rho_l(z)$, заметим, что его можно проинтегрировать по времени t . Учитывая начальные условия (3) и (4), получим:

$$V_t = \chi(x) \rho_l(x) (U - V). \quad (19)$$

Проецируя это уравнение на ту же сетку и приближая первую производную по времени V_t первой разностью $V_t(t, x) \approx \frac{V(t+2h, x) - V(t, x)}{2h}$, получим:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= (\chi \rho_l)_i (U_{ij} - V_{ij}), \\ r_{i,j+1} &= (\chi \rho_l)_i (U_{i,j+1} - V_{i,j+1}) \end{aligned} \quad (20)$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем:

$$r_{i,j+1} - r_{ij} = (\chi \rho_l)_i ((U_{i,j+1} - U_{ij}) - (V_{i,j+1} - V_{ij})).$$

Теперь, аналогично приближая U_t с помощью первой разности $w_{ij} = (U_t)_{ij} = \frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{2h}$, имеем:

$$r_{i,j+1} = r_{ij} + 2h (\chi \rho_l)_i (w_{ij} - r_{ij}) \quad (21)$$

Подставляя $i+1$ вместо I в уравнение (16) и i вместо I в уравнение (15), разрешая полученные соотношения относительно p_{ij} и w_{ij} , получаем следующие соотношения:

$$w_{ij} = \frac{1}{\Delta} \{ 2(p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j}) + (\sigma_i + \sigma_{i-1}) w_{i-1,j-1} + (\sigma_{i+1} + \sigma_i) w_{i+1,j} \} -$$

$$-\frac{1}{\Delta} \{ h [\sigma_{i+1}q_{i+1}(w_{i+1,j} - r_{i+1,j}) - 2\sigma_iq_i r_{i,j} + \sigma_{i-1}q_{i-1}(w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1})] \} \quad (22)$$

$$p_{i,j} = p_{i-1,j-1} - \frac{1}{2} [\sigma_i + \sigma_{i-1}] w_{i,j} + \frac{1}{2} [\sigma_i + \sigma_{i-1}] w_{i-1,j-1} - \frac{h}{2} [\sigma_i q_i (w_{i,j} - r_{i,j}) + \sigma_{i-1} q_{i-1} (w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1})] \quad (23)$$

где $\Delta = \sigma_{i+1} + 2\sigma_i + \sigma_{i-1} + 2h\sigma_i q_i$. Подставляя в (17) и (18) $I = 2$ и исключая оттуда $p_{1,j-1}$, $w_{1,j-1}$ и $r_{1,j-1}$, а также учитывая, что $\sigma_1 = 1$, получаем соотношение

$$w_{1,j} = w_{2,j} \frac{1 + \sigma_2 - h\sigma_2 q_2}{1 + \sigma_2 + hq_1} + \frac{2(p_{1,j} - p_{2,j}) + hq_1 r_{1,j} + h\sigma_2 q_2 r_{2,j}}{1 + \sigma_2 + hq_1} \quad (24)$$

с помощью которого, вместе с соотношением (20), получаем схему решения прямой задачи (1)-(5).

По определению полагаем $p_{0,j} = w_{0,j} = r_{0,j} = 0$. Из формулы (18) находим $w_{1,2} = 0$, а из формул (14) и (21) следует, что $r_{1,2} = 0$. Аналогично вычисляются $w_{1,j} = 0$ и $r_{1,j} = 0$ при $j = 3, 4, \dots$. Далее вычисляются значения сеточных функций $p_{i,j}$, $w_{i,j}$, $r_{i,j}$ при $i = 2, 3, 4, \dots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // ФГВ. 1993. № 1. С. 100–111.
2. *Imomnazarov Kh. Kh.* Combined One Dimensional Inverse Problems for Maxwell's equations and an Equations of the Continual Filtration Theory // Appl. Math. Lett, 1999. V. 12, № 2, pp. 45–49.
3. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

Оптимальные квадратурные формулы для вычисления коэффициентов Фурье

Шадиметов Х. М., Абдукаюмов Б. Н.

Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан;

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i p x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta] \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N(x) = e^{2\pi i p x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \delta(x - h\beta) \quad (2)$$

Здесь $\varphi(x) \in L_2^{(2)}(0, 1)$ — пространство Соболева, $C[\beta]$ — коэффициенты квадратурной формулы, $h = 1/N$, $N = 2, 3, \dots$, $p \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_{[0,1]} = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin [0, 1], \\ 1, & \text{при } x \in [0, 1], \end{cases}$ $\delta(x)$ — дельта функция Дирака, $[\beta] = h\beta$.

Квадратурные формулы вида (1) широко используются при решении следующих важных классов прикладных задач: расчет спектрограмм, вычисление оценок сверки и корреляции, анализ сейсмограмм землетрясений, обработка изображений, моделирование оптических систем и синтезированных голограмм, анализ и синтез речевых сигналов, решение краевых задач для уравнений в частных производных, решение задач цифровой фильтрации и др. Поэтому построение оптимальных квадратурных формул вида (1) являются актуальными задачами вычислительной и прикладной математики.

Одной из первых работ, посвященных построению квадратурных формул вида (1) является работа Файлона [1]. Кроме того, различными методами построены квадратурные формулы вида (1) (см. [2]).

В настоящей работе построены оптимальные квадратурные формулы вида (1) в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0, 1)$.

Справедливы следующие

Теорема 1. В пространстве $L_2^{(2)}(0, 1)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула вида (1) коэффициенты которой определяются равенствами

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C} [0] &= \frac{A_2 e^{2\pi p h}}{e^{2\pi i p h} - 1} - \frac{1}{2\pi i p} + d(1 - q)(1 - q^{N-1}), \\ \overset{\circ}{C} [\beta] &= A_2 e^{2\pi i p h \beta} + 6d(q^\beta + q^{N-\beta}), \quad \beta = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \overset{\circ}{C} [N] &= \frac{A_2}{1 - e^{2\pi i p h}} + \frac{1}{2\pi i p} + d(1 - q)(1 - q^{N-1}), \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{2h}{\cos(2\pi p h) + 2} \cdot \left(\frac{\sin(\pi p h)}{\pi p h} \right)^4, \\ d &= \frac{1}{4h^3(\pi p)^4} \cdot \frac{3((\pi p h)^2 - \sin^2(\pi p h)) - 2(\pi p h)^2 \sin^2(\pi p h)}{(1 + q^N)(3 - 2 \sin^2(\pi p h))}, \\ q &= \sqrt{3} - 2. \end{aligned}$$

Теорема 2. В пространстве $L_2^{(2)}(0, 1)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула вида

$$\int_0^1 \cos(2\pi p x) \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N \overset{\circ}{C} [\beta] \varphi[\beta]$$

коэффициенты которой определяются равенствами

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C} [0] &= \frac{A_2}{2} + d(1 - q)(1 - q^{N-1}), \\ \overset{\circ}{C} [\beta] &= A_2 \cos(2\pi p h \beta) + 6d(q^\beta + q^{N-\beta}), \quad \beta = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \overset{\circ}{C} [N] &= \frac{A_2}{2} + d(1 - q)(1 - q^{N-1}). \end{aligned}$$

Теорема 3. В пространстве $L_2^{(2)}(0, 1)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула вида

$$\int_0^1 \sin(2\pi p x) \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N \overset{\circ}{C} [\beta] \varphi[\beta]$$

коэффициенты которой определяются равенствами

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{C}[0] &= \frac{-A_2 \operatorname{ctg}(\pi p h)}{2} + \frac{1}{2\pi p}, \\ \overset{\circ}{C}[\beta] &= A_2 \sin(2\pi p h \beta), \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ \overset{\circ}{C}[N] &= \frac{A_2 \operatorname{ctg}(\pi p h)}{2} - \frac{1}{2\pi p}.\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что в теоремах все оптимальные коэффициенты при фиксированных p и $h \rightarrow 0$ стремятся к нулю, т.е. $\lim_{h \rightarrow 0} \overset{\circ}{C}[\beta] = 0$, $\beta = \overline{0, N}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Filon L. N. G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals. Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1928. 49. P. 38–47.
2. *Задирака В. К.* Теория вычисления преобразований Фурье. Киев: Наук. дум., 1983. 236 с.

Оптимальные интерполяционные формулы в пространствах $L_2^{(1)}(0, 1)$ и $L_2^{(2)}(0, 1)$

Шадиметов Х. М., Эшниеъзов Ж. Ж.

*Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент,
Узбекистан;*

Впервые термин "сплайн-функция" был использован И. Шенбергом [4] для обозначения полиномиальной функции, непрерывной в точках стыковки вместе с некоторыми своими производными. В частности, функции такого рода получаются в случае минимизации функционала $\int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx$ на множестве функций, удовлетворяющих интерполяционным условиям вида $f^{(j)}(x_i) = y_{ij}$.

В исследованиях по сплайн-функциям схематически можно выделить два периода. До 1964 г. в основном изучались свойства кусочно полиномиальных функций. После 1964 г. многие авторы направили свои усилия на обобщение этих понятий, применяя методы функционального анализа.

Решающим этапом было открытие И. Шенбергом связей между сплайн-функциями и наилучшим приближением в смысле Сарда. Этот результат был непосредственно обобщен Аттиа на случай абстрактных гильбертовых пространств (см. [2]). После этого теорией и приложениями сплайн-функций заинтересовались многие математики.

Далее рассмотрим интерполяционные сплайн-функции.

Обозначим через $L_2^{(m)}(0, 1)$ пространство вещественных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ абсолютно непрерывной $(m-1)$ -й производной и суммируемой в квадрате m -й производной ($\int_0^1 (f^{(m)}(x))^2 dx < \infty$). Это пространство является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_m = \int_0^1 f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx$$

и соответствующей нормой

$$\|f\|_m = \left(\int_0^1 (f^{(m)}(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

В этом пространстве рассматривается следующая задача.

Задача. Пусть заданы $n + 1$ фиксированных различных точек отрезка $[0, 1]$

$$0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1,$$

где $n \geq m$ и $n + 1$ вещественных чисел r_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Требуется среди всех функций $f \in L_2^{(m)}(0, 1)$, для которых

$$f(x_i) = r_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

найти такую, для которой функционал

$$l_m(f) = \int_0^1 (f^{(m)}(x))^2 dx \quad (2)$$

принимает наименьшее значение.

Эта задача интересно с точки зрения аппроксимации данных. Речь идет о получении возможно более гладкой в некотором смысле кривой, проходящей через заданные точки. Для $m = 2$ величина $l_2(f)$ приближенно равна потенциальной энергии тонкой рейки. Если потребовать, чтобы такая рейка проходила через точки (x_i, r_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ (производная не фиксируется), то положение равновесия, в котором потенциальная энергия достигает минимума, приближенно соответствуют решению предыдущей задачи. Такую рейку иногда применяют чертежники для построения гладкой кривой, проходящей через заданные точки. Этот инструмент называется по-английски spline.

Определение [2]. Обозначим через S пространство определенных на отрезке $[0, 1]$ вещественных функций s , удовлетворяющих условиям

1. s -полином степени $2m - 1$ на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) , $i = \overline{0, n - 1}$
2. s -полином степени $m - 1$ на $[0, x_0]$ и $(x_n, 1]$
3. s^{2m-2} -непрерывная функция.

Пространство S называется пространством сплайн-функций.

Интерполяционный сплайн удовлетворяющий условию (1) и дающий минимум функционалу (2) в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$ называется оптимальным сплайном в смысле Сарда. В работе [1,2] для коэффициентов оптимальных сплайнов вида

$$s_{2m-1}(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \frac{|x - h\gamma|^{2m-1}}{2 \cdot (2m - 1)!} + P_{m-1}(x)$$

в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$ получена следующая система

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-1}}{2 \cdot (2m - 1)!} + P_{m-1}(h\beta) = f(h\beta), \quad \beta = \overline{0, N}, \quad (3)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma (h\gamma)^\alpha = 0, \quad \alpha = 0, \dots, m - 1, \quad (4)$$

где $P_{m-1}(x)$ – многочлен степени $m-1$, $f(x)$ – интерполируемая функция из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$, $h = 1/N$, $N \geq m$, $m = 1, 2, \dots$. В системе (3)-(4) неизвестными являются C_γ ($\gamma = \overline{0, N}$) и многочлен $P_{m-1}(x)$.

Исследованием системы (3)-(4) занимались многие математики (см., например, [1,2] и библиографию в них). Следует отметить, что в [1] приведена теория, алгоритмы и программы для численного решения подобных систем.

Основной целью настоящей работы является нахождения аналитического решения системы (3)-(4).

Для коэффициентов оптимальных сплайнов в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ при $m = 1, 2$ справедливы следующие.

Теорема 1. *Оптимальный интерполяционный сплайн в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(1)}(0,1)$ имеет вид:*

$$s_1(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \frac{|x - h\gamma|}{2} + \frac{f(0) + f(1)}{2},$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{f(h) - f(0)}{h}, \\ C_\gamma &= \frac{f(h\gamma+h) - 2f(h\gamma) + f(h\gamma-h)}{h^2}, \quad \gamma = \overline{1, N-1}, \\ C_N &= \frac{f(1-h) - f(1)}{h}. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Оптимальный интерполяционный сплайн в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ имеет вид:*

$$s_3(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \frac{|x - h\gamma|^3}{12} + a_1x + a_0$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{\gamma=1}^{N-1} C_\gamma (h\gamma - 1), \\ C_\beta &= h \sum_{\gamma=0}^N D_2(h\beta - h\gamma) f(h\gamma) + d_1q^\beta + d_2q^{N-\beta}, \quad 1 \leq \beta \leq N-1, \\ C_N &= - \sum_{\gamma=1}^{N-1} C_\gamma (h\gamma). \end{aligned}$$

Здесь $D_2(h\beta)$ определен в [3]

$$D_2(h\beta) = 3!h^{-4} \begin{cases} 3!\sqrt{3}q^{|\beta|}, & \text{при } |\beta| \geq 2, \\ (19 - 12\sqrt{3}), & \text{при } |\beta| = 1, \\ 6\sqrt{3} - 8, & \text{при } \beta = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -\frac{36\sqrt{3}(q^{-2}-1)}{(q^{2N}-1)h^3} \sum_{\gamma=1}^{N-1} q^\gamma f(h\gamma) + A_1 f(0) + A_2 f(1), \\
 d_2 &= \frac{36\sqrt{3}(q^{-(N+2)}-q^N)}{(q^{2N}-1)h^3} \sum_{\gamma=1}^{N-1} q^\gamma f(h\gamma) + A_2 f(0) + A_1 f(1), \\
 A_1 &= -\frac{36((q+2)q^{2N+1}+3q+1)}{q(q^{2N}-1)h^3}, \\
 A_2 &= \frac{36q^N}{(q^{2N}-1)h^3}, \\
 a_1 &= \frac{a_1^- + a_1^+}{2}, \\
 a_0 &= \frac{f(0)+f(1)-a_1^+}{2}, \\
 a_1^- &= -\frac{6(q^{-2}-1)}{h(q^{2N}-1)} \sum_{\gamma=1}^{N-1} q^\gamma f(h\gamma) - \\
 &\quad - \frac{3}{h(2q+1)(q^{2N}-1)} [(3q+1 - q^{2N}(q+1))f(0) - 2q^{N+1}f(1)], \\
 a_1^+ &= -\frac{6(q^{-(N+2)}-q^N)}{h(q^{2N}-1)} \sum_{\gamma=1}^{N-1} q^\gamma f(h\gamma) + \\
 &\quad + \frac{1}{h(2q+1)(q^{2N}-1)} [2q^N(3q+1)f(0) + 3((q+1)q^{2N} - 3q-1)f(1)], \\
 q &= \sqrt{3} - 2.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Василенко В. И.* Сплайн функции: Теория, алгоритмы, программы. Наука, Новосибирск, 1983. 216 с.
2. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. Москва, Мир, 1975, 496 с.
3. *Шадиметов Х. М.* Дискретный аналог оператора d^{2m}/dx^{2m} и его построение. *Вопр. вычислительной и прикладной математики.* Ташкент. 1985, С. 22–35.
4. *Schoenberg I. J.* Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic function, *Quart. Appl. Math.*, 4 (1946).

Упругое полупространство со свободной границей под случайной нормальной нагрузкой: точные решения и алгоритмы моделирования упругих смещений и напряжений

Шалимова И. А., Сабельфельд К. К.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск; ias@osmf.sccc.ru*

Введение. Работа посвящена исследованию структуры решения задачи о реакции упругого полупространства в ответ на случайные нормальные нагрузки на границе. При этом граница остается свободной от горизонтальных напряжений. Математически, эта проблема формулируется как задача статической теории упругости для изотропного упругого полупространства в стохастической постановке, когда краевые условия задаются в виде случайных полей, в данном случае - случайного поля нормальных напряжений. Для некоррелированных напряжений - гауссовского белого шума - получены аналитические представления корреляционного тензора напряжений и среднего значения энергии деформаций. Это позволило построить простые моделирующие формулы для поля смещений в виде спектральных разложений. Разработанные моделирующие формулы позволяют вычислять произвольные статистические характеристики поля решений, в частности, структурные функции в виде экспоненциальных моментов, которые используются при рентгеновском анализе различных дефектов в кристаллах, например, краевых и винтовых дислокаций [2].

Следует отметить, что решения краевых задач с граничными условиями, содержащими белый шум, представляют собой обобщенные случайные поля, и поэтому вызывают значительные трудности при численном решении. Более подробный анализ можно прочитать в работе [3], где нами была решена подобная задача, но на границе были предписаны случайные возмущения смещений.

1. Постановка задачи. Пусть имеется изотропное упругое полупространство, с границей $\Gamma = \{(x, y, z) : z = 0\}$. Рассматривается вторая краевая задача для системы уравнений Ламе [1]:

$$\mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D^+, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\sigma_{13} \Big|_{z=0} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{23} \Big|_{z=0} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}') \Big|_{z=0} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} \Big|_{z=0} = g_3(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in \Gamma = \partial D^+, \quad (3)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(x, y, z), \dots, u_3(x, y, z))^T$ – вектор-столбец смещений и σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Заметим, что в данной постановке ненулевой является только третья компонента $g_3(\mathbf{x}') = g_3(x', y')$. Коэффициенты λ и μ – упругие константы среды.

Известно [1], что решение системы уравнений Ламе (1) в произвольной точке \mathbf{x} внутри полупространства связывается со значениями напряжений $g_3(\mathbf{x}')$ на границе интегральной формулой Пуассона

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - x', y - y', z) g_3(x', y') dx' dy', \quad (4)$$

где ядро K – вектор-столбец с элементами K_i , $i = 1, 2, 3$

$$K(x - x', y - y', z) = \frac{1}{4\pi\mu} \begin{pmatrix} -\frac{(x-x')z}{r^3} + \frac{(x-x')}{\alpha r(r+z)} \\ -\frac{(y-y')z}{r^3} + \frac{(y-y')}{\alpha r(r+z)} \\ -\frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \end{pmatrix},$$

и $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$, $\alpha = (\lambda + \mu)/\mu$. Для напряжений аналогичное соотношение имеет вид [1]

$$\mathbf{Tu}(x, y, z) = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})^T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_T(x - x', y - y', z) g_3(x', y') dx' dy', \quad (5)$$

с ядром K_T , $K_T(x - x', y - y', z) = \frac{3}{2\pi r^5} \left((x-x')z^2, (y-y')z^2, z^3 \right)^T$.

2. Корреляционный тензор поля напряжений. В работе рассмотрен случай, когда граничная функция g_3 является однородным гауссовским случайным процессом, а именно – белым шумом. Без ограничения общности будем считать, что $\langle \mathbf{g} \rangle = 0$. Тогда $\mathbf{u}(x, y, z)$, $\mathbf{Tu}(x, y, z)$ также являются гауссовскими случайными полями с $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{Tu} \rangle = 0$, и, следовательно, определяются единственным образом своими корреляционными тензорами. Обозначим корреляционный тензор граничных напряжений через B_g . Для белого шума

$$B_g(\mathbf{x}'_1; \mathbf{x}'_2) = \langle g_3(x'_1, y'_1) g_3(x'_2, y'_2) \rangle = \delta(x'_1 - x'_2) \delta(y'_1 - y'_2),$$

где $\delta(\cdot)$ – δ -функция Дирака. Корреляционный тензор $B_T(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2)$ случайного поля напряжений \mathbf{Tu} внутри полупространства можно вычислить, воспользовавшись интегральной формулой Пуассона (5)

$$B_T(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) = \langle \mathbf{Tu}(x_1, y_1, z_1) \otimes \mathbf{Tu}(x_2, y_2, z_2) \rangle = \int_{R^4} K_T(x_1 - x'_1, y_1 - y'_1, z_1) \otimes K_T(x_2 - x'_2, y_2 - y'_2, z_2) B_g(\mathbf{x}'_1; \mathbf{x}'_2) d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2. \quad (6)$$

Здесь \otimes обозначает прямое произведение векторов. В следующей теореме получено аналитическое представление для тензора $B_T(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2)$.

Теорема 1. Корреляционный тензор случайного поля напряжений $\mathbf{Tu}(x, y, z)$ в случае белого шума на границе имеет вид

$$B_T = \frac{3z_1 z_2}{2\pi r^7} \begin{pmatrix} \bar{z}(r^2 - 5\tau_x^2) & -5\bar{z}\tau_x\tau_y & \tau_x(4\bar{z}^2 - R_\tau^2) \\ -5\bar{z}\tau_x\tau_y & \bar{z}(r^2 - 5\tau_y^2) & \tau_y(4\bar{z}^2 - R_\tau^2) \\ \tau_x(R_\tau^2 - 4\bar{z}^2) & \tau_y(R_\tau^2 - 4\bar{z}^2) & \bar{z}(2\bar{z}^2 - 3R_\tau^2) \end{pmatrix} + \frac{3\bar{z}}{2\pi r^5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_x z_1 \\ 0 & 0 & \tau_y z_1 \\ -\tau_x z_2 & -\tau_y z_2 & \bar{z}^2 \end{pmatrix},$$

где $\bar{z} = z_1 + z_2$, $r = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2 + \bar{z}^2}$, $\tau_x = x_1 - x_2$, $\tau_y = y_1 - y_2$, $R_\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$.

В ходе доказательства теоремы 1 было получено также представление для спектрального тензора напряжений. По определению, спектральный тензор есть

$$S_T(\xi_x, \xi_y, z_1, z_2) = F^{-1}[B_T(\tau_x, \tau_y, z_1, z_2)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_x \tau_x + \xi_y \tau_y)} B_T(\tau_x, \tau_y, z_1, z_2) d\tau_x d\tau_y,$$

и в данном случае

$$S_T(\xi_x, \xi_y, z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}(z_1 + z_2)} S'_T, \quad S'_T = G_T(\xi_x, \xi_y, z_1) \otimes G_T^*(\xi_x, \xi_y, z_2), \quad (7)$$

где $G_T(\xi_x, \xi_y, z) = \left(-i\xi_x z, -i\xi_y z, 1 + z\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \right)^T$. Последнее представление позволяет численно моделировать случайное поле напряжений \mathbf{Tu} на основе спектральной модели. Для поля смещений $\mathbf{u}(x, y, z)$ также получено представление для спектрального тензора.

Теорема 2. Спектральный тензор случайного поля $\mathbf{u}(x, y, z)$ имеет вид

$$S_u = \frac{1}{8\pi\mu^2} \frac{e^{-(z_1+z_2)\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}}}{\xi_x^2 + \xi_y^2} S'_T, \quad S'_T = G_u(\xi_x, \xi_y, z_1) \otimes G_u^*(\xi_x, \xi_y, z_2),$$

$$u G_u(\xi_x, \xi_y, z) = \left(i\xi_x z - \frac{i\xi_x}{\alpha\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}}, i\xi_y z - \frac{i\xi_y}{\alpha\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}}, -\frac{\alpha+1}{\alpha} - z\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \right)^T.$$

3. Средняя энергия деформации. Средняя энергия деформации $\langle E(x_1, x_2, x_3) \rangle$ по определению есть

$$\langle E(x_1, x_2, x_3) \rangle = \left\langle \frac{\lambda}{2} \left(\sum_i \varepsilon_{ii} \right)^2 + \mu \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^2 \right\rangle \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ – компоненты тензора деформаций, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)$.

Дифференцируя формулу Пуассона для смещений (4), можно получить аналогичное интегральное представление для деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$. Составляя затем необходимые произведения ε_{ij} и усредняя, точно так же как это было сделано ранее для корреляций, получим

$$\langle E(\mathbf{x}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \left(\sum_i \frac{\partial K_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu}{4} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial K_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial K_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx'_1 dx'_2.$$

Опуская преобразования, приведем точный результат $\langle E(x_3) \rangle = \frac{1}{32\pi} \left(\frac{2\lambda+\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{9}{\mu} \right) \frac{1}{x_3^2}$.

4. Спектральное представление для частично однородного случайного поля. Из представления для корреляционного тензора случайного поля $\mathbf{Tu}(x, y, z)$ в теореме 1 видно, что оно однородно относительно переменных x, y и неоднородно по координате z . Случайные поля с такими свойствами называются частично однородными и их можно моделировать по схеме, описанной нами в [3]. В этом случае моделирующая формула для случайного векторного поля напряжений имеет вид

$$\mathbf{Tu}(x, y, z) \approx \frac{1}{2\sqrt{R_1 R_2}} \sum_{\substack{k, m = -\infty \\ (k, m) \neq (0, 0)}}^{\infty} e^{-\pi z \sqrt{(k/R_1)^2 + (m/R_2)^2}} \times \\ \left\{ \zeta_{k,m} \cos \pi \left(\frac{kx}{R_1} + \frac{my}{R_2} \right) + \beta_{k,m} \sin \pi \left(\frac{kx}{R_1} + \frac{my}{R_2} \right) \right\},$$

где $\zeta_{k,m}$ и $\beta_{k,m}$ – случайные вектора

$$\zeta_{k,m} = \left(-\frac{\pi k}{R_1} \eta'_{km}, -\frac{\pi m}{R_2} \eta'_{km}, \left[1 + z\pi \sqrt{(k/R_1)^2 + (m/R_2)^2} \right] \zeta'_{km} \right)^T, \\ \beta_{k,m} = \left(-\frac{\pi k}{R_1} \zeta'_{km}, -\frac{\pi m}{R_2} \zeta'_{km}, \left[1 + z\pi \sqrt{(k/R_1)^2 + (m/R_2)^2} \right] \eta'_{km} \right)^T$$

здесь ζ'_{km} и η'_{km} – два семейства независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Вид корреляционного тензора B_T выписан в теореме 1, а также может быть вычислен приближенно, на основе (7), и в этом случае

$$B_T(\tau_x, \tau_y, z_1, z_2) \approx \frac{1}{4R_1 R_2} \sum_{\substack{k, m = -\infty \\ (k, m) \neq (0, 0)}}^{\infty} e^{-\pi(z_1+z_2)\sqrt{(k/R_1)^2+(m/R_2)^2}} \times \\ \left[\Re S'_T \cos \pi \left(\frac{k\tau_x}{R_1} + \frac{m\tau_y}{R_2} \right) - \Im S'_T \sin \pi \left(\frac{k\tau_x}{R_1} + \frac{m\tau_y}{R_2} \right) \right], \quad (8)$$

где \Re и \Im есть действительная и мнимая части матрицы S'_T в (7). Используя результаты теоремы 2, для поля смещений можно также выписать моделирующие формулы:

$$\mathbf{u}(x, y, z) \approx \frac{1}{4\mu\sqrt{R_1 R_2}} \sum_{\substack{k, m = -\infty \\ (k, m) \neq (0, 0)}}^{\infty} \frac{e^{-\pi z \rho_{km}}}{\rho_{km}} \left\{ \zeta_{k, m} \cos \pi \left(\frac{kx}{R_1} + \frac{my}{R_2} \right) + \beta_{k, m} \sin \pi \left(\frac{kx}{R_1} + \frac{my}{R_2} \right) \right\}$$

$$\text{где } \zeta_{k, m} = \left(\left[\frac{kz}{R_1} - \frac{1}{\alpha} \frac{k}{\pi \rho_{km} R_1} \right] \eta'_{km}, \left[\frac{mz}{R_2} - \frac{1}{\alpha} \frac{m}{\pi \rho_{km} R_2} \right] \eta'_{km}, - \left[\frac{\alpha+1}{\alpha\pi} + z\rho_{km} \right] \zeta'_{km} \right)^T,$$

$$\beta_{k, m} = \left(- \left[\frac{kz}{R_1} - \frac{1}{\alpha} \frac{k}{\pi \rho_{km} R_1} \right] \zeta'_{km}, - \left[\frac{mz}{R_2} - \frac{1}{\alpha} \frac{m}{\pi \rho_{km} R_2} \right] \zeta'_{km}, - \left[\frac{\alpha+1}{\alpha\pi} + z\rho_{km} \right] \eta'_{km} \right)^T$$

ζ'_{km} и η'_{km} – два семейства независимых стандартных гауссовских случайных величин, $\rho_{km} = \sqrt{(k/R_1)^2 + (m/R_2)^2}$. Для корреляционного тензора смещений B_u имеем

$$B_u(\tau_x, \tau_y, z_1, z_2) \approx \frac{1}{8\mu^2 R_1 R_2} \sum_{\substack{k, m = -\infty \\ (k, m) \neq (0, 0)}}^{\infty} \frac{e^{-\pi(z_1+z_2)\rho_{km}}}{\rho_{km}^2} \times \\ \left[\Re S'_u \cos \pi \left(\frac{k\tau_x}{R_1} + \frac{m\tau_y}{R_2} \right) - \Im S'_u \sin \pi \left(\frac{k\tau_x}{R_1} + \frac{m\tau_y}{R_2} \right) \right],$$

матрица S'_u определена в теореме 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09–01–00639, 10–01–00040, 10–01–00152).

Литература

1. Купрадзе, В. Д., Гегелиа, Т. Г., Башелешвили, М. О., и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Наука, М., 1976.
2. Kaganer V. M. and Sabelfeld K. K.. X-ray diffraction peaks from correlated dislocations: Monte Carlo study of the dislocation screening. Acta Crystallographica, A66, 2010. P. 703–716.
3. Shalimova I. A. and Sabelfeld K. K.. Elastic 3D half-space with correlated defects on the boundary. Physica A, 2010. Vol. 389, №21. P. 4436–4449.

Об асимптотической оптимальности нормы периодического функционала погрешности в неизотропном пространстве

Юмова Ц. Ж.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ;
syum@mail.ru

Введение. В работе рассматриваются функционалы погрешности в неизотропном пространстве $W_p^{\bar{m}}(E_n)$, где $1 < p < \infty$, $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ - неотрицательный целочисленный вектор, с естественной нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^{\bar{m}}(E_n)} = \left(\int_{E_n} \sum_{k=0}^n |D^{m_k} \varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1)$$

Интегрируемые функции считаем элементами пространства $W_p^m(E_n)$, вложенного в пространство непрерывных функций, обеспеченное условием вложения $p - \sum_{k=0}^n m_k^{-1} < 0$. Пусть $N = N_1 \cdot \dots \cdot N_n$ — число узлов формулы, $h_k > 0$ — шаги решетки, $1/h_k$ — не обязательно целые числа, $N_k = [1/h_k]$ — количество узлов решетки вдоль выбранных координатных направлений, принадлежащих системе $B_0 = \{\gamma | \gamma \in E_n, 0 \leq \gamma_k < N_k, k = 1, \dots, n\}$, $\Delta^\sigma = \{x \in E_n, 0 \leq x_k < 1 - \sigma_k h_k\}$ — фундаментальный параллелепипед с длинами ребер $1 - \sigma_k h_k$, $\sigma_k = \{1/h_k\}$ — дробная часть числа $1/h_k$, $m^* = n / (\sum_{k=1}^n m_k^{-1})$, $\bar{h} = \text{diag}(h_1 h_2 \dots h_n)$ — матрица периодов.

1. Вычисление оптимальных коэффициентов кубатурной формулы. Задача о построении решетчатой кубатурной формулы для ограниченной области Ω заключается в следующем. Взяв узлы на решетке заданной ньютоновской системы B_0 , строго лежащие внутри или же на границе гладкой области Ω , при фиксированных шагах $h_1 h_2 \dots h_n$ вдоль выбранных координатных направлений, определяемых с помощью системы соотношений

$$h_1^{m_1} = h_2^{m_2} = \dots = h_n^{m_n} = h^{m^*}. \quad (2)$$

минимизировать кубатурную формулу по коэффициентам. Оптимальные коэффициенты формулы для функции и ее производных в s_k узлах решетки определяются из равенства

$$\sum_{\gamma_k=0}^{s_k} C_{\gamma_k}^{\alpha_k} \gamma_k^{\alpha_k} = \frac{1 - \sigma_k h_k}{\alpha_k + 1}, \quad \alpha_k = \overline{0, m_k} \quad (3)$$

при любом значении порядка ρ_k старшей производной, зависящей от гладкости функции m_k вдоль выбранной координатной оси $OX_k, k=1, 2, \dots, n$.

Построим формулу, точно интегрирующую многочлен второй степени для функции, использующей ее значения и первых производных в четырех узлах решетки:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{59}{144} \varphi(0) + \frac{5}{16} \varphi(1) + \frac{29}{144} \varphi(2) + \frac{11}{144} \varphi(3) - \\ - \frac{13}{144} \varphi'(0) - \frac{5}{48} \varphi'(1) - \frac{17}{144} \varphi'(2) - \frac{19}{144} \varphi'(3).$$

Коэффициенты при значениях функции в узлах решетки положительны, их сумма равна единице, а коэффициенты при значениях производной функции в соответствующих узлах не обязательно положительны, но в целом малы.

Построим формулу в трех узлах решетки для функции с первой производной, точно интегрирующей многочлен второй степени вдоль первой координатной оси OX_1 :

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{83}{195} \varphi(0) + \frac{14}{39} \varphi(1) + \frac{43}{195} \varphi(2) - \frac{3}{130} \varphi'(0) - \frac{1}{10} \varphi'(1) - \frac{23}{130} \varphi'(2)$$

и точно интегрирующей многочлен третьей степени со старшей производной третьего порядка вдоль второй координатной оси OX_2 :

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{16625}{388688} \varphi(0) + \frac{32}{93} \varphi(1) + \frac{2917}{12896} \varphi(2) - \frac{7385}{116064} \varphi'(0) - \frac{49}{468} \varphi'(1) - \frac{14873}{116064} \varphi'(2) - \frac{965}{19344} \varphi''(0) - \frac{1}{31} \varphi''(1) + \frac{283}{19344} \varphi''(2) + \frac{11}{624} \varphi'''(0) + \frac{11}{624} \varphi'''(1) + \frac{11}{624} \varphi'''(2).$$

Беря декартово произведение коэффициентов при значениях функции, ее производных, получим формулу на плоскости:

$$\int_0^{1-\sigma_1 h_1} \int_0^{1-\sigma_2 h_2} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \approx \prod_{k=1}^2 \sum_{\gamma_k=0}^{s_k} \sum_{\alpha_k=0}^{\rho_k} C_{\gamma_k}^{\alpha_k} \varphi_{\gamma_k}^{\alpha_k}$$

Вычисленные по формуле (3) оптимальные коэффициенты с участием ρ_k производных в s_k узлах решетки со старшей степенью многочлена m_k запишем в виде матрицы размерностью $m \times n$, где число строк матрицы означает количество коэффициенты кубатурной формулы при значениях функции, в первой, второй и т.д. ($m-1$) производной, соответственно, а количество столбцов указывает на число узлов формулы. Если количество узлов кубатурной формулы и порядок старшей производной функции можно определить из размерности матрицы, то в дальнейшем условимся гладкость выбранного направления m_k обозначать в виде нижнего индекса матрицы. Так, в матрице D_3 представлены вычисленные оптимальные коэффициенты кубатурной формулы в трех узлах решетки точно интегрирующие многочлен третьей степени со старшей производной функции второго порядка:

$$D_3 = \begin{pmatrix} \frac{643}{1488} & \frac{32}{93} & \frac{111}{496} \\ -\frac{259}{4464} & -\frac{1}{9} & -\frac{547}{4464} \\ -\frac{55}{744} & -\frac{1}{31} & \frac{7}{744} \end{pmatrix}$$

Используя построенные функционалы относительно простого вида, учитывающие свойства неизотропного пространства, с узлами, лежащими внутри или же на границе области, строим функционалы с регулярным пограничным слоем суммированием элементарных функционалов погрешностей, как в обычном анализе формулы прямоугольников получаются путем суммирования элементарных формул прямоугольников.

2. Асимптотическое представление нормы оптимального периодического функционала погрешности. Среди решеток вида $h_1 \gamma_1, h_2 \gamma_2, \dots, h_n \gamma_n$, оптимальная по порядку решетка определяется с помощью системы соотношений (2).

Из условий (2) найдено $h_k = h^{m^*/m_k}, k = 1, 2, \dots, n$. Асимптотическое представление нормы оптимального периодического функционала погрешности $\tilde{l}_0(\bar{h}^{-1} x) = 1 - \Phi_0(\bar{h}^{-1} x)$, где $\Phi_0(\bar{h}^{-1} x) = \sum_{B_0} \det \bar{h} \delta(x - \bar{h} \gamma)$ дает возможность подсчитать с заданной точностью некоторую константу, входящую в оценку сверху нормы функционала погрешности с регулярным

пограничным слоем. При стремлении $h_0 = (h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2)^{1/2}$ к нулю, выделим не зависящий от него, главный член нормы

$$\|\tilde{l}_0(\bar{h}^{-1}x)\|_{\tilde{W}_p^{\bar{m}^*}} = \left(\int_{\Delta^\sigma} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{(2\pi i h_k^{-1} \gamma_k)^{m_k} \exp(2\pi i h_k^{-1} \gamma_k x_k)}{1 + \sum_{j=0}^n (2\pi i h_j^{-1} \gamma_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_{\gamma_k}^{(0)} \right|^{p'} dx \right)^{1/p'} \quad (4)$$

Для построенных кубатурных формул с регулярным пограничным слоем при различных шагах и гладкостях по выбранным координатным направлениям, удовлетворяющих системе соотношений (2), справедлива следующая

Теорема. Если для функций из пространства $W_p^{\bar{m}}(\Delta^\sigma)$ с естественной нормой (1) выполнены условия $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $p - \sum_{k=0}^n m_k^{-1} < 0$ и h_k - шаги решетки,

то норма периодического функционала $\tilde{l}_0(\bar{h}^{-1}x)$ представима в виде (3). При этом сумма коэффициентов функционала при значениях функции в узлах параллелепипедальной решетки равны 1 и при этом имеет место асимптотическая оптимальность нормы периодического функционала погрешности

$$\begin{aligned} & \|\tilde{l}_0(\bar{h}^{-1}x)\|_{\tilde{W}_p^{\bar{m}^*}} = \\ & = h^{m^* + n - \frac{n}{p}} \left(\int_{\Delta^\sigma} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{(2\pi i h_k^{-1} \gamma_k)^{m_k} \exp(2\pi i h_k^{-1} \gamma_k x_k)}{1 + \sum_{j=0}^n (2\pi i h_j^{-1} \gamma_j)^{2m_j}} + h_k^{m_k} C_{\gamma_k}^{(0)} \right|^{p'} dx \right)^{1/p'} (1 + O(h_0)) \end{aligned}$$

Работа выполняется в рамках целевой программы МОиН РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 г.г.) на 2011 год" (проект № РНП 2.1.1/13828).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. *Юмова Ц. Ж.* Построение кубатурных формул с регулярным пограничным слоем на плоскости // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем // Материалы IV Международной научно-технической конференции, Пенза, Изд-во ПДЗ, 2009. С. 69–73.

Содержание

Рябов В. М. Иван Петрович Мысовских	3
Аверина Т. А. Использование численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений в задачах оптимизации нанесения тонких пленок карбида кремния	10
Азамов С. С. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ и его свойства	13
Ахмедов Д. М. Коэффициенты одной оптимальной квадратурной формулы	16
Баяндужева Е. С. Метод конечных элементов решения эллиптико-параболического уравнения	19
Белых В. Н. К проблеме численного решения эллиптических задач	21
Болтаев А. К. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6} - 1$	22
Булгатова Е. Н. Вычисление сингулярных интегралов	25
Burmistrov A. Monte Carlo algorithms for numerical estimation of the elliptic BVP solution and its gradient	26
Бурцев А. А., Кириллова С. В., Симонов К. В. Оценка опасности наводнений на основе данных мониторинга	30
Васкевич В. Л. Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатур	33
Войтишек А. В. Теория и приложения дискретно-стохастических численных методов: новые результаты	33
Войтишек А. В. Оптимальные дискретно-стохастические кубатурные формулы	37
Войтишек А. В., Малицкая Н. С., Сидорова Т. В. Исследование эффекта упорядочения узлов в одномерном дискретно-стохастическом алгоритме построения адаптивных сеток	41
Гуломов О. Х., Шодиев С. Ю. Группы целочисленных автоморфизмов совершенных форм от восьми переменных	44
Гусев С. А. Чувствительность диффузионного процесса к параметрам движения границы	46
Жалолов И. И., Жалолов Икром. И., Аслонов Ф. Б. Экстремальная функция функционала погрешности квадратурной формулы и его норма в пространстве $H_2^\mu(R)$	50

Жалолов О. И., Аслонов Ф. Б. Наилучшая весовая кубатурная формула над пространством С. Л. Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$	53
Жалолов Ф. И. Наилучшая весовая квадратурная формула над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$	56
Кадена Л., Кириллова С. В., Симонов К. В. Анализ сложных сигналов на основе вейвлет-преобразования	59
Кириллов К. А. Об оценках погрешности кубатурных формул, точных для полиномов Хаара	63
Коротченко М. А. Ценностное моделирование для решения уравнения Смолуховского с линейными коэффициентами коагуляции	64
Корытов И. В. Представление функционала погрешности кубатурной формулы в пространстве Соболева с нормой, осложненной биномиальными коэффициентами	68
Кулдошев Х. М. Об одной оптимальной интерполяционной формуле	71
Леш Н. Э., Ушанов С. В. Имитационное моделирование процесса распространения лесного пожара по неоднородному слою горючего материала	73
Марченко М. А. PARMONC — универсальная библиотека программ для распределенных вычислений по методу Монте-Карло	76
Махоткин О. А. Моделирование случайных переменных с распределением Мэйкехама	77
Михайлов Г. А., Медведев И. Н., Ухинов С. А. Векторные (вероятностно-алгебраические) алгоритмы метода Монте-Карло	80
Намсараева Г. В. Об одной численной модели распространения примесей	81
Нуралиев Ф. А. Норма функционала погрешности одной интерполяционной формулы с производными	83
Огородников В. А., Савельев Л. Я., Каргаполова Н. А. Некоторые свойства неоднородных марковских последовательностей с периодическими матрицами переходных вероятностей	86
Осипов Н. Н. Оценка одной теоретико-числовой суммы	90
Пашко А. А. Оценка точности моделирования субгауссовских полей в различных функциональных пространствах	91
Пономаренко А. К. Две инвариантные кубатурные формулы с лапласианом	91
Попов А. С. Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений т тетраэдра	94

Содержание	141
Рамазанов М. Д. Ненасыщаемый алгоритм решетчатых кубатурных формул	97
Рахматуллин Д. Я. Ненасыщаемый алгоритм решетчатых кубатурных формул для наилучших решеток	99
Рогалев А. Н., Рогалев А. А. Численная реализация модели Стритера-Фелпса и ее модификаций с учетом неопределенности данных	100
Рябов В. М. Об одном методе обращения преобразования Лапласа	104
Санеева Л. И., Данзанова В. С. Квадратурные формулы общего вида для классов периодических функций	107
Ухинов С. А., Чимаева А. С. Определение второй компоненты матрицы аэрозольного рассеяния по наземным измерениям поляризованного излучения в альмукантарате Солнца методом Монте-Карло	111
Хаётов А. Р. Об одной оптимальной квадратурной формуле в смысле Сарда	115
Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н. Схема переменных направлений для численного решения гиперболо-параболического уравнения	117
Хаятов Х. У., Очилова Н. Т. Об одной погрешности весовых кубатурных формул в пространстве $\tilde{C}^{(m)}(T_n)$	120
Холмуродов А. Э. Алгоритм численного решения одномерных прямых задач распространения SH волн в пористых средах	123
Шадиметов Х. М., Абдукаюмов Б. Н. Оптимальные квадратурные формулы для вычисления коэффициентов Фурье	127
Шадиметов Х. М., Эшнйёзов Ж. Ж. Оптимальные интерполяционные формулы в пространствах $L_2^{(1)}(0, 1)$ и $L_2^{(2)}(0, 1)$	128
Шалимова И. А., Сабельфельд К. К. Упругое полупространство со свободной границей под случайной нормальной нагрузкой: точные решения и алгоритмы моделирования упругих смещений и напряжений	132
Юмова Ц. Ж. Об асимптотической оптимальности нормы периодического функционала погрешности в неизотропном пространстве	136