ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 1 (2011). С. 85-93.

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ ПОВЕДЕНИЕМ $T_G(b)(z)$ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ

А.Ю. ТИМОФЕЕВ

Аннотация. И.Н. Векуа построил теорию обобщенных аналитических функций, как решений уравнения

$$\partial_{\bar{z}} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \tag{0.1}$$

где $z \in G$ (G, например, единичный круг в комплексной плоскости) и коэффициенты $A(z)$, $B(z)$ принадлежат $L_p(G)$, $p > 2$. Теория Векуа переносит теорию голоморфных функций на решения (0.1) с помощью так называемого принципа подобия. При этом большую роль играет T_G-оператор, который является правым обратным к оператору $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, где производная $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ понимается в смысле Соболева.

В работе предложена схема построения в единичном круге G функции $b(z)$ с заданным поведением $T_G(b)(z)$ в особой точке $z = 0$, где T_G — интегральный оператор Векуа. Сформулированы условия на функцию $b(z)$, когда $T_G(b)(z)$ является непрерывной функцией.

Ключевые слова: T_G-оператор, особая точка, модуль непрерывности.

1. Введение

В теории уравнений с частными производными за последние годы успешно используются методы, основанные на представлении решений в комплексной форме. Эти методы развиты главным образом в работах И.Н. Векуа, Л. Берса, С. Бергмана и других. В качестве примера рассмотрим следующее представление для системы уравнений с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \eta} + a_0 u + b_0 v, \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + c_0 u + d_0 v, \tag{1.1}$$

где a_0, b_0, c_0, d_0 — непрерывные функции переменных ξ, η в некоторой области G.

Система (1.1) является обобщением условий Коши–Римана, которые получаются при $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$. Эта система была впервые рассмотрена Карлеманом, доказавшим для её решения теорему единственности. Подробное исследование системы (1.1) и её приложений провёл Векуа [1]. Всюду в дальнейшем будем для простоты считать, что функции u, v обладают в области G непрерывными частными производными.

Введём обозначения

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i\frac{\partial}{\partial \eta}\right), \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i\frac{\partial}{\partial \eta}\right). \tag{1.2}$$

A.Y. Timofeev, Construction of functions with determined behavior $T_G(b)(z)$ at a singular point.

Поступила 24 января 2011 г.

Известна формула представления произвольной функции $f(\zeta) = u + iv$, обладающей в некоторой ограниченной области G непрерывными частными производными ([2, с. 317]):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}. \tag{1.3}$$

Для аналитических функций двойной интеграл исчезает, и мы приходим к интегральной формуле Коши.

Применим эту формулу к решению системы (1.1). С помощью символа дифференцирования (1.2) эта система записывается в виде одного комплексного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} = Af + B\overline{f}, \tag{1.4}$$

где $f = u + iv$, $A = \frac{1}{4}(a_0 + d_0 + ic_0 - ib_0)$, $B = \frac{1}{4}(a_0 - d_0 + ic_0 + ib_0)$. Поэтому формула (1.3) даёт следующее комплексное представление решений системы (1.1):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{A(\zeta)f(\zeta) + B(\zeta)\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\xi d\eta. \tag{1.5}$$

В данной работе на конкретном примере рассматривается поведение двойного интеграла в формуле (1.3), который в работе [1] обозначается как $T_G(f)(z)$:

$$T_G(f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z}, \zeta = \xi + i\eta. \tag{1.6}$$

Известно (см. напр. [3]–[5]), что теория Векуа для системы (1.4) перестаёт работать если коэффициенты $A(\zeta)$, $B(\zeta)$ не принадлежат пространству $L_p(G)$ $(p > 2)$. Поэтому для уравнений с такими коэффициентами, как $A(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, $B(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ и других, необходимо провести самостоятельное исследование. В работах [3]–[12] получен целый ряд результатов для таких уравнений (1.4) с сингулярными коэффициентами. Следует отметить, что во всех этих работах большую роль играет значение оператора $T_G(f)$ на том или ином классе функций. Известно, что T_G переводит пространство $L_p(G)$ $\quad (p > 2)$ в пространство Гёльдера $C_\alpha(G)$ с показателем $\alpha = \frac{p-2}{p}$. Известно также поведение $T_G(f)$ на некоторых других классах функций (см. также раздел 2).

В связи с этим, в данной работе изучается поведение $T_G(f)$ для функций $f(z)$, имеющих в точке $z = 0$ особенность того или иного порядка.

В работе для единичного круга $G = \{z : |z| < 1\}$ для заданного модуля непрерывности $\mu(x)$ строится функция $b = b(\zeta)$, такая, что $T_G(b)(z)$ имеет в точке $z = 0$ поведение, описываемое в этой точке функцией μ. Здесь T_G — оператор, введённый И.Н. Векуа ((1.6)).

Для этого разработана схема вычисления $T_G f$ с помощью теории вычетов. В разделе 3 доказываются вспомогательные утверждения, позволяющие вычислить $T_G f$ для достаточно широкого класса функций $f(z)$ с особенностью в точке $z = 0$. Примеры подтверждают приведённые без доказательства результаты из книги Л.Г. Михайлова. Кроме того, они свидетельствуют о том, что $T_G f$ может быть ограниченной и даже (после доопределения в точке $z = 0$) непрерывной функцией, хотя $f(z)$ имеет в нуле особенность.

2. Свойства оператора T_G

В данном разделе приводятся основные свойства функции $T_G(f)(z)$ (см. например [1, с. 39]).

Свойство 1. *Пусть G — ограниченная область. Если $f \in L_p(\overline{G})$, $p > 2$, то функция $g = T_G f$ удовлетворяет условиям*

$$|g(z)| \leqslant M_1 L_p(f, \overline{G}), z \in E, \tag{2.1}$$

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leqslant M_2 L_p(f, \overline{G})|z_1 - z_2|^\alpha, \alpha = \frac{p-2}{p}, \tag{2.2}$$

где z, z_1, z_2 — произвольные точки плоскости, а M_1, M_2 — произвольные постоянные, причём M_1 зависит от p и G, а M_2 — только от p; $L_p(f, \overline{G})$ — норма функции f в пространстве $L_p(\overline{G})$.

Неравенства (2.1) и (2.2) показывают, что T_G — линейный вполне непрерывный оператор в пространстве $L_p(\overline{G})$, отображающий это пространство на $C_\alpha(\overline{G})$, $\alpha = \frac{p-2}{p}$, $p > 2$ (такие операторы называются иногда *усиленно вполне непрерывными* операторами), причём

$$C_\alpha(T_G f, \overline{G}) \leqslant M L_p(f, \overline{G}), \alpha = \frac{p-2}{p}, p > 2. \tag{2.3}$$

Свойство 2. *Пусть $f \in C(\overline{G})$. Тогда из*

$$g(z_1) - g(z_2) = \frac{z_1 - z_2}{\pi} = \iint_G \frac{f(\zeta)\, d\xi d\eta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}, z_1 \neq z_2$$

следует

$$\begin{cases} |g(z)| \leqslant MC(f, \overline{G}), \\ |g(z_1) - g(z_2)| \leqslant MC(f, \overline{G})|z_1 - z_2| \lg \frac{2d}{|z_1 - z_2|}, \end{cases}$$

где d — диаметр области G, M — постоянная.

Если же $f \in L_\infty(\overline{G})$, то имеем

$$\begin{cases} |g(z)| \leqslant ML_\infty(f, \overline{G}), \\ |g(z_1) - g(z_2)| \leqslant ML_\infty(f, \overline{G})|z_1 - z_2| \lg \frac{2d}{|z_1 - z_2|}, \end{cases}$$

Из этих неравенств следует, что оператор T_G непрерывен в пространствах $C(\overline{G})$ и $L_\infty(\overline{G})$, причём отображает эти пространства на класс функций, удовлетворяющих условию Дини.

В книге Л.Г. Михайлова [3] приводится следующая таблица, показывающая свойства функции $T_G(f)(z)$ по свойствам функции $f(z)$:

Условия на $f(\zeta)$	Свойства функции $T_G(f)(z)$
1) $L(G)$	$L_{2-\varepsilon}(G)$, $\varepsilon > 0$ мало
2) $L_p(G)$, $1 < p < 2$	$L_q(G)$, $q = \frac{2p}{p-2}$
3) $L_2(G)$	$L_s(G)$для любого $s \geq 1$
4) $L_p(G)$, $2 < p$	$C_\alpha(G)$, $\alpha = \frac{p-2}{p}$
5) $L_\infty(G)$, $C(G)$	$\Delta\omega = O(|\Delta z| \cdot \ln|\Delta z|)$, $\Delta\omega$ — модуль непрерывности
6) Голоморфная в G	Голоморфная в G

3. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе будут доказаны три леммы, которые могут быть использованы и в других исследованиях.

Лемма 1. *Рассмотрим интеграл $J(z, r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{re^{i\phi} - z}$, где $|z| < 1$ и $0 < r < 1$. Если $0 < r < |z|$, то $J(z, r) = -\frac{2\pi}{z}$. Если $|z| < r < 1$, то $J(z, r) = 0$.*

Доказательство. Сделаем в данном интеграле замену переменной: $e^{i\phi} = t$. В итоге получим следующий контурный интеграл:

$$J(z, r) = \frac{1}{i} \int_{|t|=1} \frac{dt}{t(rt - z)}.$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки: $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{z}{r}$ — простые полюсы.

1. Пусть $t_2 < 1$, что эквивалентно условию $|z| < r$, тогда

$$J(z,r) = 2\pi \left[\operatorname*{res}_{t_1=0} \frac{1}{t(rt-z)} + \operatorname*{res}_{t_2=\frac{z}{r}} \frac{1}{t(rt-z)} \right] = 0.$$

2. Пусть $|t_2| > 1$, это условие эквивалентно $|z| > r$, тогда

$$J(z,r) = 2\pi \cdot \operatorname*{res}_{t_1=0} \frac{1}{t(rt-z)} = -\frac{2\pi}{z}.$$

Таким образом,

$$J(z,r) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{z}, \text{если } 0 < r < |z|, \\ 0, \text{если } |z| < r < 1. \end{cases}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Рассмотрим интеграл*

$$J(z,r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{e^{in\phi}(re^{i\phi}-z)},$$

где n — натуральное число, $|z| < 1$ и $0 < r < 1$. Если $0 < r < |z|$, то $J(z,r) = -\frac{2\pi r^n}{z^{n+1}}$. Если $|z| < r < 1$, то $J(z,r) = 0$.

Доказательство. Повторяя схему доказательства леммы 1, получим следующий контурный интеграл

$$J(z,r) = \frac{1}{i} \int_{|t|=1} \frac{dt}{t^{n+1}(rt-z)}.$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки: $t_1 = 0$ — $(n+1)$ — *кратный полюс* и $t_2 = \frac{z}{r}$.

1. Пусть $t_2 < 1$, что эквивалентно условию $|z| < r$, тогда

$$J(z,r) = 2\pi \left[\operatorname*{res}_{t_1=0} \frac{1}{t^{n+1}(rt-z)} + \operatorname*{res}_{t_2=\frac{z}{r}} \frac{1}{t^{n+1}(rt-z)} \right] =$$
$$= 2\pi \left[(-1)^n \cdot \frac{r^n}{(-z)^{n+1}} + \frac{r^n}{z^{n+1}} \right] = 2\pi \left[-\frac{r^n}{z^{n+1}} + \frac{r^n}{z^{n+1}} \right] = 0.$$

2. Пусть $|t_2| > 1$, это условие эквивалентно $|z| > r$, тогда

$$J(z,r) = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{t_1=0} \frac{1}{t^{n+1}(rt-z)} = -\frac{2\pi r^n}{z^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$J(z,r) = \begin{cases} -\frac{2\pi r^n}{z^{n+1}}, \text{если } 0 < r < |z|, \\ 0, \text{если } |z| < r < 1. \end{cases}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Рассмотрим интеграл*

$$J(z,r) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\phi}\,d\phi}{re^{i\phi}-z},$$

где n — натуральное число, $|z| < 1$ и $0 < r < 1$. Если $0 < r < |z|$, то $J(z,r) = 0$. Если $|z| < r < 1$, то $J(z,r) = \frac{2\pi z^{n-1}}{r^n}$.

Доказательство. Сделаем в данном интеграле замену переменной: $e^{i\phi} = t$, — и получим следующий контурный интеграл:

$$J(z,r) = \frac{1}{i}\int_{|t|=1} \frac{t^{n-1}\,dt}{rt-z}.$$

Подынтегральная функция имеет одну особую точку $t = \frac{z}{r}$. Применяя основную теорему теории вычетов, получим, что

$$J(z,r) = \begin{cases} 0, \text{если } 0 < r < |z|, \\ \frac{2\pi z^{n-1}}{r^n}, \text{если } |z| < r < 1. \end{cases}$$

Лемма 3 доказана.

4. $T_G(f)(z)$ для радиально зависящих функций

4.1. $T_G(b)(z)$ **для радиально зависящих функций** $b = b(|\zeta|)$**.** Найдём в явном виде $T_G(b)(z)$, если $b = b(|\zeta|) = b(\rho)$, $0 < \rho < 1$.

Предположим, что фиксированное число $z \neq 0$, $|z| < 1$. Тогда, если $\zeta = \xi + i\eta$, то

$$T_G(b)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \frac{b(\rho)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<|z|} \frac{b(\rho)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|>|z|} \frac{b(\rho)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta = J_1(z) + J_2(z).$$

Вычислим вначале $J_1(z)$:

$$J_1(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{|z|} b(\rho)\cdot\rho\cdot\left(\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\rho e^{i\varphi} - z}\right)d\rho = -\frac{1}{\pi}\int_0^{|z|} b(\rho)\cdot\rho\cdot I(\rho,z)\,d\rho.$$

По лемме 1 для $|z| > \rho$ $I(\rho,z) = -\frac{2\pi}{z}$, значит

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{|z|} b(\rho)\cdot\rho\cdot\left(-\frac{2\pi}{z}\right)d\rho = \frac{2}{z}\cdot\int_0^{|z|} b(\rho)\cdot\rho\,d\rho.$$

Аналогично,

$$J_2(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{|z|}^1 b(\rho)\cdot\rho\cdot I(\rho,z)\,d\rho.$$

По лемме 1 для $|z| < \rho$ $I(\rho,z) = 0$, значит $J_2(z) = 0$.

Таким образом,

$$T_G(b)(z) = \frac{2}{z}\int_0^{|z|} b(\rho)\cdot\rho\,d\rho. \tag{4.1}$$

Примеры.

1. $b(\zeta) = \frac{1}{|\zeta|^\alpha}$, $\alpha < 2$. По формуле (4.1) получаем, что

$$T_G(b)(z) = \frac{2}{2-\alpha}\cdot\frac{|z|^{2-\alpha}}{z}.$$

В частности, при $\alpha = 1$

$$T_G(b)(z) = 2\cdot\frac{|z|}{z}$$

является ограниченной функцией.

2. $b(\zeta) = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\rho e^{i\varphi}}$. Повторяя рассуждения 4.1 с использованием леммы 2 при $n = 1$, получим, что
$$T_G(b)(z) = \frac{\overline{z}}{z}$$
является ограниченной функцией.
3. $b(\zeta) = \frac{1}{\overline{\zeta}} = \frac{e^{i\varphi}}{\rho}$. Повторяя рассуждения 4.1 с использованием леммы 3 при $n = 1$, получим, что
$$T_G(b)(z) = \ln|z|^2.$$

Примеры 1–3 приведены ранее без пояснений в [3, с. 123–124].

4.2. Поведение $T_G(b)(z)$ в точке $z = 0$ для радиально зависящих $b(\zeta)$. Для $z \neq 0$ рассмотрим разность
$$T_G(b)(z) - T_G(b)(0) = -\frac{z}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{b(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\,d\xi\,d\eta \tag{4.2}$$
Введём обозначения
$$I(\rho, z) = \frac{1}{i\rho}\int_{|t|=1} \frac{dt}{t^2(\rho t - z)},$$
тогда по лемме 2 получим, что
$$I(z, r) = \begin{cases} 0, |z| < \rho, \\ -\frac{2\pi}{z^2}, |z| > \rho. \end{cases}$$
Используя это в (4.2), получаем
$$T_G(b)(z) - T_G(b)(0) = \frac{2}{z}\int_0^{|z|} b(\rho)\cdot\rho\,d\rho. \tag{4.3}$$
Предполагая дополнительно, что $b(\rho) > 0$, из (4.3) следует
$$|T_G(b)(z) - T_G(b)(0)| = \frac{2}{|z|}\int_0^{|z|} b(\rho)\cdot\rho\,d\rho. \tag{4.4}$$

4.3. Построение функций с заданным поведением $T_G(b)(z)$ в точке $z = 0$. Формула (4.4) позволяет строить функции $b = b(\rho)$, такие, что $T_G(b)(z)$ имеет заданное в смысле модуля непрерывности поведение в точке $z = 0$.

Напомним, что модулем непрерывности называется заданная на интервале $(0, \delta)$ функция $\mu(t)$, удовлетворяющая условиям:
1. $\mu(t) \geq 0$, $t \geq 0$;
2. $\lim\limits_{t\to+0} \mu(t) = 0$;
3. $\mu(t)$ не убывает для $t > 0$;
4. для любых $t_1, t_2 \in (0, \delta)$ $\mu(t_1 + t_2) \leqslant \mu(t_1) + \mu(t_2)$.

Условие 4 заведомо выполнено, если предполагать, что $\frac{\mu(t)}{t}$ не возрастает для $t > 0$.

Предположим, что
$$\int_0^1 b(\rho)\cdot\rho\,d\rho < +\infty.$$
Введём обозначение $x = |z|$,
$$\mu(x) = \frac{2}{x}\int_0^x b(\rho)\cdot\rho\,d\rho \tag{4.5}$$
Тогда (4.4) можно записать
$$|T_G(b)(z) - T_G(b)(0)| = \mu(|z|). \tag{4.6}$$

Предполагая $\mu(x)$ дифференцируемой, получим

$$b(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x \cdot \mu(x)}{2} \right)' \tag{4.7}$$

Формула (4.7) позволяет для заданной функции μ строить $b = b(|\zeta|)$, такую, что выполняется (4.6).

4.4. Примеры.

4.4.1. $\mu(x) = x^\lambda$, $0 < \lambda < 1$. Тогда по формуле (4.7) получаем, что

$$b(\zeta) = \frac{\lambda + 1}{2} \cdot \frac{1}{|\zeta|^{1-\lambda}}.$$

У этой функции $b = b(\zeta)$, имеющей слабую особенность в точке $\zeta = 0$, $T_G(b)(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в начале координат.

4.4.2. $\mu(x) = x$. Тогда $b(\rho) = 1$. Среди радиально зависящих функций $b = b(\rho)$, таких, что $T_G(b)(z)$ удовлетворяет условию Липшица в точке $z = 0$, нет, отличных от постоянных.

4.4.3. Обратно, пусть

$$b(|\zeta|) = \frac{1}{|\zeta|^2 \ln^2 \frac{1}{|\zeta|}},$$

тогда $\mu(|z|) = \frac{2}{|z| \ln \frac{1}{|z|}} \to +\infty$ при $z \to 0$.

4.4.4. Для функции $b(|\zeta|) = \frac{1}{|\zeta| \ln^{1+\varepsilon} \frac{1}{|\zeta|}}$, принадлежащей $S_p(G)$ (см. [12]),

$$\mu(x) = \frac{2}{\ln^{1+\varepsilon} \frac{1}{x^*}}, 0 \leqslant x^* \leqslant x,$$

поэтому, учитывая монотонность последней функции, получаем, что

$$\mu(x) \leqslant \frac{2}{\ln^{1+\varepsilon} \frac{1}{x}},$$

значит $\mu(|z|) \to 0$, $z \to 0$.

4.5. Непрерывность $T_G(b)(z)$ в точке $z = 0$. Выясним, когда $\mu(|z|)$, участвующая в (4.6), стремится к 0 при $z \to 0$. Это эквивалентно условию

$$\frac{\int_0^x b(\rho) \cdot \rho \, d\rho}{x} \to 0, x \to 0. \tag{4.8}$$

По правилу Лопиталя (4.8) эквивалентно

$$b(x) \cdot x \to 0, x \to 0. \tag{4.9}$$

Отсюда, конечно, следует

$$\int_0^1 b(\rho) \cdot \rho \, d\rho < +\infty.$$

Таким образом, функция $b = b(|\zeta|)$ имеет непрерывную в точке $z = 0$ функцию $T_G(b)(z)$ тогда и только тогда, когда выполнено (4.9).

Пример. Функция

$$b(\zeta) = \frac{1}{|\zeta| \cdot \underbrace{\ln \ln \ln \ldots \frac{1}{|\zeta|}}_{\text{k раз}}} \quad (|\zeta| \leqslant d < 1)$$

не принадлежит даже $L_2(U_d)$, тем не менее, выполнено условие (4.9) и $T_G(b)(z)$ является непрерывной в начале координат.

4.6. Связь с пространством $S_p(G)$. Известно, что для функций $b(\zeta) \in S_p(G)$ $T_G(b)(z)$ является непрерывной функцией в точке $z = 0$ (см. [12]). Обозначим через $S_1(G)$ множество радиальных функций $b(\zeta)$ со свойством (4.9).

Сравним эти пространства, рассматривая радиально зависящие функции $b(\zeta)$.

Из результатов работы [13] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0(\varepsilon)$ со свойством

$$\frac{1}{p\left(\frac{1}{t}\right)} < \varepsilon \cdot t, t > \delta_0(\varepsilon),$$

то есть

$$\frac{1}{p(x)} < \varepsilon \cdot \frac{1}{x}, x < \frac{1}{\delta_0} = \delta_1(\varepsilon).$$

В итоге,

$$\frac{x}{p(x)} < \varepsilon, \text{для всех } 0 < x < \delta_1(\varepsilon). \tag{4.10}$$

Возьмём теперь произвольную функцию $b = b(|\zeta|) \in S_p(G)$. Следовательно, существует $p = p(r)$:

$$\sup_{|\zeta|<1} |b(|\zeta|)| \cdot p(r) = C_0 < +\infty.$$

Тогда, в силу (4.10),

$$|b(r)| \cdot r = |b(r)| \cdot p(r) \cdot \frac{r}{p(r)} \leqslant C_0\varepsilon, r < \delta_1(\varepsilon).$$

Таким образом, $b(|\zeta|) \in S_1(G)$.

Кроме того, $b(|\zeta|) = \frac{1}{|\zeta| \ln \frac{1}{|\zeta|}} \in S_1(0 < |\zeta| < t_0)$, но $b(|\zeta|) \notin S_p(G)$.

В итоге для радиально зависящих функций $b = b(|\zeta|)$ $S_p(G) \subset S_1(G)$, причём включение строгое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* М.: Наука. 1988. 512 с.
2. Лаврентьев М.А. *Методы теории функций комплексного переменного.* М.: Наука. 1973. 736 с.
3. L.G. Mikhailov *A new Class of Singular Integral Equations and its Application to Differential Equation with Singular Coefficients.* Berlin: Academie - Verlag. 1970.
4. Михайлов Л.Г. *Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.* Душанбе: Изд-во Тадж. ун-та. 1963.
5. Усманов З.Д. *Об одном классе обобщенных систем Коши–Римана с сингулярной точкой* // Сиб. матем. журнал. 1973. Т. 14, № 5. С. 1078–1087.
6. Усманов З.Д. *Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой.* Душанбе. 1993. 245 с.
7. Z.D. Usmanov *Generalized Cauchy–Riemann systems with a singular point.* Longman, Harlow. 1997.
8. M. Reissig, A. Timofeev *Special Vekua Equations with Singular Coefficients* // Applicable Analysis. 1999. Vol. 73 (1-2). P. 187–199.
9. Тунгатаров А. *К теории уравнения Карлемана–Векуа с сингулярной точкой* // Математический сборник. 1993. Т. 184, № 3. С. 111–120.
10. Тунгатаров А. *О непрерывных решениях обобщенной системы Коши–Римана с конечным числом сингулярных точек* // Математические заметки. 1994. Т. 56. С. 106–115.
11. R. Saks *Riemann-Hilbert Problem for New Class of Model Vekua Equations with Singular Degeneration* // Applicable analysis. 1999. Vol. 73 (1-2). P. 201–211.
12. M. Reissig, A. Timofeev *Dirichlet problems for generalized Cauchy–Riemann systems with singular coefficients* // Complex variables. 2005. Vol. 50, № 7-11. P. 653–672.

13. Тимофеев А.Ю. *Весовые пространства в теории обобщенных уравнений Коши–Римана* // Уфимский мат. журн. 2010. Т. 2. № 1. С. 110–118.

Алексей Юрьевич Тимофеев
Сыктывкарский государственный университет,
Октябрьский проспект, 55,
167001, г. Сыктывкар, Россия
E-mail: `tim@syktsu.ru`