ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 1 (2011). С. 80-84.

УДК 517.929

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО ДАРБУ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С.Я. СТАРЦЕВ

Аннотация. В работе рассматриваются цепочки дифференциальных уравнений вида $\varphi(x, u_{i+1}, (u_{i+1})_x) = \psi(x, u_i, (u_i)_x)$, где u зависит от дискретной переменной i и непрерывной переменной x, а функции $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ и x являются функционально-независимыми. Показано, что из уже известных результатов нетрудно получить необходимые условия интегрируемости по Дарбу для цепочек указанного вида. Эти условия не являются достаточными, но могут оказаться полезными при проведении классификации дифференциально-разностных уравнений, интегрируемых по Дарбу. В качестве вспомогательного результата доказано также утверждение о структуре симметрий для дифференциально-разностных уравнений более общего вида.

Ключевые слова: интегрируемость по Дарбу, дифференциально-разностные уравнения

Один из классов интегрируемых уравнений вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

образован уравнениями, для каждого из которых существуют как дифференциальная подстановка вида $v = X(x, y, u, u_x, u_{xx}, \dots)$, так и подстановка вида $w = Y(x, y, u, u_y, u_{yy}, \dots)$, переводящие решения (1) в решения уравнений $v_y = 0$ и $w_x = 0$ соответственно. Такие уравнения называются интегрируемыми по Дарбу или уравнениями лиувиллевского типа. Полная классификация интегрируемых по Дарбу уравнений вида (1) была выполнена в работе [1].

Цепочку дифференциальных уравнений вида

$$(u_{i+1})_x = F(x, u_i, u_{i+1}, (u_i)_x),$$

где неизвестная функция u зависит от целого числа i и вещественной переменной x, можно рассматривать как дифференциально-разностный аналог уравнения (1). Среди таких цепочек также имеются интегрируемые по Дарбу. Однако, в отличие от уравнений вида (1), полная классификация вышеуказанных “полудискретных” уравнений, интегрируемых по Дарбу, в настоящий момент пока отсутствует — известны лишь отдельные примеры (см., например, [2]), а также результаты классификации для цепочек специального вида [3].

Для того чтобы дать строгое определение интегрируемости по Дарбу, нам потребуется ввести некоторые обозначения. В дальнейшем во всех формулах мы для краткости будем опускать индекс i и, в частности, будем записывать вышеуказанную цепочку в виде

$$(u_1)_x = F(x, u, u_1, u_x). \tag{2}$$

S.Ya. Startsev, Necessary conditions of Darboux integrability for differential-difference equations of a special kind.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00440-а).
Поступила 25 октября 2010 г.

Мы будем предполагать, что $F_{u_x} \neq 0$ и, следовательно, уравнение (2) можно записать в виде

$$(u_{-1})_x = \tilde{F}(x, u, u_{-1}, u_x). \tag{3}$$

Производные $u_m^{(n)} := \partial^n u_{i+m}/\partial x^n$ от сдвигов u для любых ненулевых $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ мы можем поэтому выразить в силу уравнений (2)–(3) через x и так называемые *динамические переменные* $u_l := u_{i+l}$, $u^{(k)} := \partial^k u_i/\partial x^k u_i$. Запись $g[u]$ будет обозначать, что функция g зависит от x и конечного числа динамических переменных.

Через T мы обозначим оператор сдвига по i в силу уравнения (2). Этот оператор задается следующими правилами: $T(f(a, b, \dots)) = f(T(a), T(b), \dots)$ для любой функции f; $T(u_m) = u_{m+1}$; $T(u^{(n)}) = D^{n-1}(F)$ (то есть "смешанные" переменные $u_1^{(n)}$ выражаются через динамические переменные в силу уравнения (2)). Здесь

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u^{(1)}\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial u^{(k)}} + T^{(k-1)}(F)\frac{\partial}{\partial u_k} + T^{(1-k)}(\tilde{F})\frac{\partial}{\partial u_{-k}}\right),$$

то есть через D обозначен оператор полной производной по x в силу уравнений (2)–(3). Оператор обратного сдвига T^{-1} задается похожим образом.

Определение 1. *Уравнение* (2) *называется интегрируемым по Дарбу, если для него найдутся функции $I[u]$ и $X[u]$, каждая из которых зависит хотя бы от одной из динамических переменных, такие что выполнены соотношения $D(I) = 0$ и $T(X) = X$. Функции $I[u]$ и $X[u]$ в этом случае называются соответственно i-интегралом и x-интегралом уравнения* (2).

В настоящей заметке мы будем рассматривать специальный подкласс уравнений (2), а именно – уравнения вида

$$\varphi(x, u_1, (u_1)_x) = \psi(x, u, u_x), \tag{4}$$

где функции $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ удовлетворяют условиям $\varphi_y\psi_z - \varphi_z\psi_y \neq 0$ и $\varphi_z\psi_z \neq 0$. Этот подкласс уравнений интересен, например, тем, что такие уравнения допускают обратимое преобразование $v = \varphi(x, u, u_x)$ (подробнее см. [4]), переводящее (4) в уравнения вида

$$(v_1)_x = p(x, v, v_1)v_x + q(x, v, v_1). \tag{5}$$

Таким образом, изучая подкласс уравнений (4), мы тем самым заодно изучаем и уравнения вида (5). Кроме того, часть из условий интегрируемости по Дарбу для уравнений вида (4) фактически уже получена в ранее выполненных работах и чтобы это увидеть, достаточно сопоставить между собой результаты работ [2], [4]–[6]. Изложению этого наблюдения и посвящена настоящая заметка.

Если говорить более конкретно, то основным её результатом является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Если уравнение* (4) *является интегрируемым по Дарбу, то, разрешая его относительно $(u_1)_x$, мы получим уравнение вида*

$$\xi_x(x, u_1) + \xi_{u_1}(x, u_1)(u_1)_x = \alpha(x, \psi)(\xi(x, u_1))^2 + \beta(x, \psi)\xi(x, u_1) + \gamma(x, \psi),$$

а, разрешая (4) *относительно u_x, придем к уравнению вида*

$$\eta_x(x, u) + \eta_u(x, u)u_x = \hat{\alpha}(x, \varphi)(\eta(x, u))^2 + \hat{\beta}(x, \varphi)\eta(x, u) + \hat{\gamma}(x, \varphi).$$

Другими словами, для любого интегрируемого по Дарбу уравнения (4) найдутся точечные замены переменных $\tilde{u} = \xi(x, u)$ и $\bar{u} = \eta(x, u)$, приводящие это уравнение как к виду

$$(\tilde{u}_1)_x = \alpha(x, \tilde{\psi})\tilde{u}_1^2 + \beta(x, \tilde{\psi})\tilde{u}_1 + \gamma(x, \tilde{\psi}),$$

так и к виду

$$\bar{u}_x = \hat{\alpha}(x,\bar{\varphi})\bar{u}^2 + \hat{\beta}(x,\bar{\varphi})\bar{u} + \hat{\gamma}(x,\bar{\varphi}),$$

то есть при записи в виде (2) и (3) правая часть уравнения (4) после подходящей замены переменных оказывается квадратичной по u_1 и u_{-1} соответственно.

Перед тем как приступить к доказательству Теоремы 1, нам потребуется дать одно определение и доказать два вспомогательных утверждения.

Определение 2. *Уравнение вида* $u_t = s[u]$ *называется симметрией уравнения* (2), *если выполнено соотношение* $L(s) = 0$, *где*

$$L = TD - F_{u_x}D - F_{u_1}T - F_u.$$

Лемма 1. *Пусть* $X[u] \in \ker(T-1)$ *для некоторого уравнения вида* (2). *Тогда* $X[u]$ *не зависит сдвигов* u *(динамических переменных вида* u_l, $l \neq 0$*).*

Доказательство. Предположим противное и обозначим через j и r соответственно наибольшее положительное и наименьшее отрицательное числа, для которых $X[u]$ зависит от u_j и u_r. Дифференцирование соотношения $T(X) = X$ по u_{j+1} и u_r дает нам $T(X_{u_j}) = 0$ и $X_{u_r} = 0$ соответственно. Таким образом, мы пришли к противоречию, которое и доказывает лемму. □

Лемма 2. *Любая симметрия* $u_t = s[u]$ *уравнения* (2) *имеет вид*

$$u_t = \hat{s}(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_{-1}, u, u_1, \dots, u_k) + \bar{s}(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}), \tag{6}$$

то есть $s[u]$ *распадается на сумму двух слагаемых, одно из которых зависит только от сдвигов, а другое — только от производных* u.

Доказательство. Пусть симметрия имеет вид

$$u_t = s(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_{-1}, u, u_1, \dots, u_k, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}).$$

Дифференцируя определяющее соотношение для симметрии по $u^{(n+1)}$, получим

$$(L(s))_{u^{(n+1)}} = F_{u_x}(T(s_{u^{(n)}}) - s_{u^{(n)}}) = 0.$$

Применяя лемму 1, мы видим, что $s_{u^{(n)}}$ не зависит от сдвигов u и, следовательно, может зависеть только от переменных x, u, $u^{(1)}$, $\dots$, $u^{(n)}$. Поэтому правая часть $s[u]$ симметрии представляется в виде

$$s[u] = g(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_k, u^{(1)}, \dots, u^{(n-1)}) + h(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}).$$

Предположим теперь, что

$$s[u] = g(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_k, u^{(1)}, \dots, u^{(m)}) + h(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}), \tag{7}$$

где m — некоторое натуральное число, меньшее n. Тогда, дифференцируя определяющее соотношение $L(s) = 0$ по $u^{(m+1)}$, мы получим

$$(L(h))_{u^{(m+1)}} + F_{u_x}(T(g_{u^{(m)}}) - g_{u^{(m)}}) = 0. \tag{8}$$

Заметим, что $L(h)$ может зависеть только от x, u, u_1 и производных u. Это позволяет нам применить к (8) рассуждения из доказательства леммы 1 и показать, что $g_{u^{(m)}}$ не зависит от сдвигов u. В силу этого, правая часть симметрии записывается в виде

$$s[u] = \tilde{g}(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_k, u^{(1)}, \dots, u^{(m-1)}) + \tilde{h}(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}).$$

То есть из (7) следует выполнение этого же соотношения с m на единицу меньшим и, в силу принципа математической индукции, мы получаем, что верно представление (6). □

Доказательство Теоремы 1. В работе [2] было доказано, что для любого интегрируемого по Дарбу уравнения вида (2) существует дифференциальный оператор $R = \sum_{k=0}^{r} c_k[u]D^k$, такой, что $u_t = R(\omega)$ является симметрией этого уравнения для любого $\omega \in \ker(T-1)$. Покажем, что коэффициенты c_k оператора R могут зависеть только от x, u и производных u. Предположим противное: пусть коэффициенты R зависят от u_j для некоторого $j \neq 0$. Через l обозначим наибольшее число, для которого $(c_l)_{u_j} \neq 0$. В качестве ω возьмем x-интеграл, такой, чтобы порядок m старшей из производных u, от которых этот интеграл зависит, был выше порядков производных u, содержащихся в коэффициентах оператора R. (Поскольку оператор D переводит x-интегралы снова в x-интегралы, мы всегда можем построить x-интеграл, зависящий от производных достаточно высокого порядка.) Тогда $(R(\omega))_{u_j u^{(m+l)}} = (c_l)_{u_j}\omega_{u^{(m)}} \neq 0$, что противоречит лемме 2. Таким образом, симметрия $u_t = R(\omega)$ для любого $\omega \in \ker(T-1)$ имеет вид

$$u_t = s(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}). \tag{9}$$

В работе [4] было доказано[1], что любая симметрия вида (9) уравнения (4) переводится как дифференциальной подстановкой $v = \varphi(x, u, u_x)$, так и подстановкой $\tilde{v} = \psi(x, u, u_x)$ в некоторое уравнение такого же вида (9). С другой стороны, согласно [5], уравнение (9) переводится дифференциальной подстановкой $v = f(x, u, u_x)$ снова в уравнение такого же вида тогда и только тогда, когда (9) является симметрией уравнения $u_{xy} = -f_u u_y / f_{u_x}$. Напомним, что (9) называется симметрией уравнения (1), если s лежит в ядре оператора

$$M = D_x D_y - F_{u_x} D_x - F_{u_y} D_y - F_u,$$

где через D_x и D_y обозначены полные производные в силу уравнения (1) по x и y соответственно. Заметим, что операторы D_x и D совпадают между собой на множестве функций, зависящих только от x, u и производных u по x.

Таким образом, если уравнение (4) является интегрируемым по Дарбу, то найдется оператор $R = \sum_{k=0}^{r} c_k[u]D_x^k$, такой, что $u_t = R(\omega)$ является симметрией одновременно для двух уравнений

$$u_{xy} = -\frac{\varphi_u(x, u, u_x)}{\varphi_{u_x}(x, u, u_x)}\, u_y \qquad \text{и} \qquad u_{xy} = -\frac{\psi_u(x, u, u_x)}{\psi_{u_x}(x, u, u_x)}\, u_y \tag{10}$$

при любом $\omega \in \ker(T-1)$. В частности, в качестве ω можно взять любую функцию $g(x)$. Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых порядках производных функции g в соотношении $M(R(g)) = 0$, мы получим, что $u_t = R(g(x))$ является симметрией уравнения (1) для любой функции g тогда и только тогда, когда выполнена цепочка соотношений

$$\begin{gathered} (D_y - F_{u_x})(c_r) = 0, \\ M(c_k) + (D_y - F_{u_x})(c_{k-1}) = 0, \quad k = \overline{1, r}, \\ M(c_0) = 0. \end{gathered}$$

Нетрудно проверить, что при выполнении этой цепочки соотношений $u_t = R(\omega)$ будет являться симметрией уравнения (1) для любого ω не только из $\ker(T-1)$, но и из $\ker D_y$.

Уравнения вида

$$u_{xy} = -\frac{f_u(x, u, u_x)}{f_{u_x}(x, u, u_x)}\, u_y,$$

для которых найдется дифференциальный оператор оператор R, такой, что $u_t = R(\omega)$ для любого $\omega \in \ker D_y$ является симметрией этого уравнения, описаны в работе [6]. В ней было доказано, что любое такое уравнение точечной заменой переменных $u = \lambda(x, \tilde{u})$

[1] Строго говоря, в работе [4] рассматривались уравнения (4), не зависящие явным образом от x. Однако нетрудно проверить, что рассуждения из этой работы без особых изменений переносятся и на случай явной зависимости уравнения (4) от x.

можно привести к уравнению такого же вида $\tilde{u}_{xy} = -\tilde{f}_{\tilde{u}}/\tilde{f}_{\tilde{u}_x}\tilde{u}_y$, где $\tilde{f} = f(x, \lambda, D_x(\lambda))$ удовлетворяет соотношению $\tilde{u}_x = \alpha(x, \tilde{f})\tilde{u}^2 + \beta(x, \tilde{f})\tilde{u} + \gamma(x, \tilde{f})$. Применение этого результата к уравнениям (10) доказывает теорему. □

В заключение заметим, что условия, полученные в теореме, являются необходимыми, но не достаточными для интегрируемости уравнения (4) по Дарбу. Для того чтобы проиллюстрировать это, положим φ равным $(u_1)_x$, а ψ – равным $u_x + c_2u^2 + c_1u + c_0$, где c_j — некоторые константы, и рассмотрим уравнение

$$(u_1)_x = u_x + c_2u^2 + c_1u + c_0. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что условия интегрируемости по Дарбу выполнены при любых значениях констант c_j (в обозначениях Теоремы 1 имеем $\xi = u_1$, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \psi$ и $\eta = u$, $\hat{\alpha} = -c_2$, $\hat{\beta} = -c_1$, $\hat{\gamma} = \varphi - c_0$). Однако (11) является интегрируемым по Дарбу лишь в случае $c_2 = c_1 = 0$, поскольку в полученном в [3] списке интегрируемых по Дарбу уравнений вида $(u_1)_x = u_x + d(u, u_1)$ не имеется ни одного уравнения с d, не зависящим от u_1, и при этом отличным от константы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые уравнения лиувиллевского типа* // УМН. 2001. Т. 56. № 1(337). С. 63–106.
2. Адлер В.Е., Старцев С.Я. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. 1999. Т. 121, № 2, С. 271–285.
3. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *Complete list of Darboux integrable chains of the form $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$* // J. Math. Phys. 2009. V. 50. № 10. Paper 102710, 23 pages.
4. Ямилов Р.И. *Обратимые замены переменных, порожденные преобразованиями Беклунда* // ТМФ. 1990. Т. 85. № 3. С. 368–375.
5. Соколов В.В. *О симметриях эволюционных уравнений* // УМН. 1988. Т. 43, № 5, С. 133–163.
6. Старцев С.Я. *О дифференциальных подстановках типа преобразования Миуры* // ТМФ. 1998. Т. 116. № 3. С. 336–348.

Сергей Яковлевич Старцев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `startsev@anrb.ru`