

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА, МЕТОД ФУРЬЕ

Р.С. САКС

Аннотация. Изучается задача Коши для системы уравнений Навье-Стокса в трехмерном пространстве с периодическими условиями по пространственным переменным. Заданные и искомые вектор-функции раскладываются в ряды Фурье по собственным функциям оператора ротор. Задача сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В рассматриваемом базисе она имеет простой вид. Составлены программы реконструкции систем Галеркина и численного решения задачи Коши. Рассчитаны некоторые модельные задачи. Результаты оформлены в виде графиков, дающих представление о движении потока жидкости.

Исследована задача Коши для линейной однородной системы Стокса в шкале пространств Гильберта. Доказано, что оператор задачи реализует изоморфизм этих пространств.

В общем случае, выписаны семейства явных глобальных решений нелинейной задачи Коши. Кроме того, указаны два пространства Гильберта, в каждом из которых последовательность аппроксимаций Галеркина ограничена.

Ключевые слова: ряды Фурье, собственные функции оператора ротор, уравнения Навье-Стокса, задача Коши, глобальные решения, системы Галеркина, пространства Гильберта.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка задачи. В пространстве R^3 рассмотрим 2π -периодические функции: $f(x + 2\pi m) = f(x)$ для всех $m \in \mathbb{Z}^3$. Существует естественная реализация факторпространства $R^3/2\pi\mathbb{Z}^3$ в виде 3-мерного тора

$$\mathbb{T} = \{(e^{ix_1}, e^{ix_2}, e^{ix_3}) \in C^3; (x_1, x_2, x_3) \in R^3\},$$

задаваемая отображением $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (e^{ix_1}, e^{ix_2}, e^{ix_3})$. Откуда следует стандартная реализация периодических на R^3 функций в виде функций на 3-мерном торе. Фундаментальный куб Q^3 зададим неравенствами $0 \leq x_j < 2\pi$. Интегрирование на \mathbb{T} определяется при помощи интеграла Лебега на кубе Q , а именно $\int_{\mathbb{T}} f|_{\mathbb{T}} dx = \int_Q f dx$, где f есть сужение на Q периодической функции в R^3 , порождаемой функцией f на торе. L_p -пространства на \mathbb{T} отождествляются с L_p -пространствами на Q и обозначаются $L_p(\mathbb{T})$. Отметим, что класс непрерывных функций $C(\mathbb{T})$ не соответствует классу всех непрерывных функций на Q , а только тем функциям, которые остаются непрерывными при периодическом продолжении на все R^3 . Банахово пространство $C(\mathbb{T})$ является подпространством в $L_\infty(\mathbb{T})$ и наделяется L_∞ -нормой (см. [1], гл.10, [2], гл.7).

Рассмотрим еще подпространство соленоидальных вектор-функций в $[L_2(\mathbb{T})]^3$, которое обозначим

$$\widehat{V}^0 = \{v(x) \in [L_2(\mathbb{T})]^3 : \operatorname{div} v = 0; \|v\|_{\widehat{V}^0} = (2\pi)^{-3} \|v\|_{L_2(Q)}\}.$$

R.S. SAKS, CAUCHY PROBLEM FOR THE NAVIER-STOKES EQUATIONS, FOURIER METHOD.

© САКС Р.С. 2011.

Поступила 23 апреля 2010 г.

Пусть заданы комплексные вектор-функции $g(x) \in \widehat{V}^0$ и $f(t, x) \in \widehat{V}^0$ при любом $t \geq 0$.

Задача 1. Найти вектор скорости $v(t, x) = (v_1, v_2, v_3)$ и давление $p(t, x)$, которые 2π -периодичны по пространственным переменным x_j , непрерывны в $R_+ \times R^3$, имеют соответствующую гладкость и удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + f, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{при } (t, x) \in R_+ \times R^3 \quad (1)$$

и начальному условию:

$$v(0, x) = g(x). \quad (2)$$

Здесь Δ , ∇ , div — это линейные операторы Лапласа, градиента и дивергенции, а нелинейный оператор $(v \cdot \nabla)v = \sum_{j=1}^3 v_j \partial_j v$.

В классической постановке предполагается, что функции g и f гладкие: $g \in [C^\infty(\mathbb{T})]^3$ и $f \in [C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{T})]^3$. Физически значимые решения удовлетворяют условиям, что функции v и p гладкие и глобально определены:

$$v(t, x) \in [C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{T})]^3, \quad p(t, x) \in [C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{T})]^3, \quad (3)$$

и что кинетическая энергия решения глобально ограничена, то есть существует постоянная $E \in (0, \infty)$ такая, что

$$\int_Q |v(t, x)|^2 dx < E \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (4)$$

Свободная энциклопедия в интернете – Wikipedia в статье „Navier–Stokes existence and smoothness“ обсуждает трудную проблему:

–либо доказать (А) *теорему существования и единственности решений уравнений Навье–Стокса в \mathbb{T}^3* : пусть $f(t, x) \equiv 0$, для любого гладкого начального условия g существует гладкое и глобально определенное решение уравнений Навье–Стокса, то есть вектор скорости $v(t, x)$ и давление $p(t, x)$, удовлетворяющие условиям (3), (4);

–либо доказать (В) *теорему о разрушении решений уравнений Навье–Стокса в \mathbb{T}^3* : существует внешняя сила $f(t, x)$ и начальное условие $g(x)$, для которых не существует гладких и глобально определенных решений уравнений Навье–Стокса, то есть вектор скорости $v(t, x)$ и давление $p(t, x)$ не удовлетворяют условиям (3), (4).

В §5 для частных случаев начальных условий g и правых частей f , отвечающих собственным функциям оператора ротор, мы построим в явном виде семейства классических решений задачи при любых $\nu > 0$.

Перейдем к обобщенной постановке задачи (см. монографии [4, 5, 6, 7], в обозначениях мы будем следовать работам [8, 9]).

1.2. Функциональные пространства задачи. Основное пространство

$$V^0 = \{v \in [L_2(\mathbb{T})]^3 : \operatorname{div} v = 0, \int_Q v dx = 0; \|v\|_{V^0} = (2\pi)^{-3} \|v\|_{L_2(Q)}\}, \quad (5)$$

где соотношение $\operatorname{div} v = 0$ понимается в смысле теории распределений над пространством Π^∞ бесконечно дифференцируемых 2π -периодических функций, в котором сходимость $\varphi_n \rightarrow 0$ означает равномерную сходимость φ_n к нулю при $n \rightarrow \infty$ вместе со всеми производными (см. [1], гл. 10). То есть

$$(\operatorname{div} v, \varphi) \equiv -(v, \nabla \varphi) = 0 \quad \text{для любой } \varphi \in \Pi^\infty. \quad (6)$$

Отметим включение пространств $V^0 \subset \widehat{V}^0$.

Для представления вектор-функции $v(x) \in [L_2(\mathbb{T})]^3$ используется ряд Фурье

$$v(x) = v_0 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} v_k e^{ikx}, \quad \text{где } v_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q v(x) e^{-ikx} dx, \quad (7)$$

$k = (k_1, k_2, k_3)$ — целочисленные векторы, $k^2 \equiv |k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$, знак $v(x) = \sum$ означает сходимость ряда к $v(x)$ в среднем квадратичном, то есть в норме $L_2(\mathbb{T})^3$.

На плотном в $[L_2(\mathbb{T})]^3$ множестве Π^∞ имеет место равенство Парсевалья-Стеклова

$$(2\pi)^{-3} \|v\|^2 = |v_0|^2 + \sum_{k^2=1}^{\infty} |v_k|^2, \quad (8)$$

которое позволяет определить разложение (преобразование) Фурье для элементов из $[L_2(\mathbb{T})]^3$ и более широких пространств распределений [1].

Условие соленоидальности $v(x)$ сводится к равенствам $(v_k, k) = 0$, то есть к ортогональности векторов v_k волновым векторам k для любых $k \neq 0$.

Интегральное условие $\int_Q v \, dx = 0$ означает, что $v_0 = 0$.

Следуя работам [1, 8], введем пространство Соболева периодических вектор-функций H_s с нормой, определяемой равенством

$$\|v\|_{H_s}^2 = |v_0|^2 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} |k|^{2s} |v_k|^2, \quad s \in R_+. \quad (9)$$

Далее, пространства \widehat{V}^s и V^s — это пересечения \widehat{V}^0 и V^0 с H_s :

$$V^s = \{v(x) \in H_s \cap V^0; \|v\|_{V^s} = \|v\|_{H_s}\}. \quad (10)$$

Квадрат нормы в \widehat{V}^s определяется предыдущей формулой при условии: $(v_k, k) = 0$ для всех $k \neq 0$, что создает определенные трудности при исследовании.

Это условие исчезает, если перейти к рядам Фурье оператора ротор. Согласно §2, собственные функции ротора имеют вид: $c_k^\pm e^{ikx}$ и $\widehat{k} e^{ikx}$, где $\widehat{k} = k/|k|$. Любую вектор-функцию $v(x)$ из $L_2(\mathbb{T})^3$ можно разложить в ряд по собственным функциям ротора

$$v(x) = v_0 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} (\gamma_k \widehat{k} + \gamma_k^+ c_k^+ + \gamma_k^- c_k^-) e^{ikx}, \quad (11)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q (v(x), \widehat{k}) e^{-ikx} dx, \quad (12)$$

$$\gamma_k^\pm = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q (v(x), c_k^\pm) e^{-ikx} dx. \quad (13)$$

Тогда

$$\|v\|_{H_s}^2 = |v_0|^2 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} |k|^{2s} (|\gamma_k|^2 + |\gamma_k^+|^2 + |\gamma_k^-|^2), \quad (14)$$

$$\|v\|_{V^s}^2 = \sum_{|k|^2=1}^{\infty} |k|^{2s} (|\gamma_k^+|^2 + |\gamma_k^-|^2), \quad (15)$$

так как согласно Лемме 1 функция $v(x) \in V^s$, если и только если все $\gamma_k = 0$ и $v_0 = 0$.

Далее, вектор-функция $v(t, x)$, как функция от $t \in (0, T)$ со значениями в пространстве V^s , принадлежит пространству $L_2(0, T; V^s)$, если она имеет конечную норму, квадрат которой равен

$$\begin{aligned} \|v(t, x)\|_{L_2(0, T; V^s)}^2 &= \int_0^T \|v(t, \cdot)\|_{V^s}^2 dt = \\ &= \int_0^T \left(\sum_{|k|^2=1}^{\infty} |k|^{2s} (|\gamma_k^+(t)|^2 + |\gamma_k^-(t)|^2) \right) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

При $T = +\infty$ пространство $L_2(0, T; V^s)$ обозначается как $L_2(R_+; V^s)$.

Норма функции $v(t, x)$ в пространстве $L_\infty(0, T; V^s)$ определяется так

$$\|\varphi\|_{L_\infty(0, T; V^s)} = \text{ess sup}_{t \in [0, T]} \|v(t, \cdot)\|_{V^s}, \quad (17)$$

Наконец, определим пространство $W^{1,2(s)}$, где $s \in [0, \infty)$, соотношением:

$$W^{1,2(s)} = \{v(t, x) \in L_2(0, T; V^{2+s}) : \partial_t v(t, x) \in L_2(0, T; V^s)\}. \quad (18)$$

Отметим, что при представлении физических полей v обычно считают, что среднее вектор-функции v по кубу равно нулю, т.е. вектор $v_0 = 0$. Это условие заложено в определении пространства V^0 .

1.3. Обобщенная постановка задачи (см. [7] п.3 гл.3). Предположим, что (v, p) — классическое решение задачи (1), (2) и

$$v \in C^2([0, T] \times \mathbb{T}), p \in C^1([0, T] \times \mathbb{T}).$$

Очевидно, что $v \in L_2(0, T; V^2)$, $\partial_t v \in L_2(0, T; V^0)$. Умножая (скалярно в $L_2(Q)$) первое уравнение (1) на произвольную вектор-функцию w из класса V^1 и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{d}{dt}(v, w) + \nu(\nabla v, \nabla w) + b(v, v, w) = (f, w), \quad w \in V^1, \quad (19)$$

где по определению

$$b(u, v, w) \equiv \sum_{i,j=1}^3 \int_Q u_i (\partial_i v_j) \overline{w_j} dx. \quad (20)$$

Отметим, что ∇p выпадает: $(\nabla p, w) = -(p, \text{div} w) = 0$, так как $w \in V^1$.

З а д а ч а 2. Даны $f(t, x) \in L_2(0, T; V^0)$, $g \in V^1$. В классе

$$W^{1,2(0)} = \{v(t, x) \in L_2(0, T; V^2) : \partial_t v(t, x) \in L_2(0, T; V^0)\}. \quad (21)$$

найти вектор-функцию $v(t, x)$, удовлетворяющую при любой $w \in V^1$ уравнениям (19) и начальному условию (2): $v(0, x) = g(x)$.

1.4. Результаты. В работе изучается задача Коши для системы уравнений Навье-Стокса в трехмерном пространстве с условием периодичности по пространственным переменным на основе рядов Фурье оператора ротор.

Отдельные периодические собственные функции оператора ротор были известны и применялись давно в работах В.И. Арнольда [10] и его учеников, О. Богоявленского [11], у физиков [12], [13], [14], [15]. См. также монографию В.В. Козлова [16] "Общая теория вихрей" и обзоры В.В. Пухначева [17] и А.С. Махалова и В.П. Николаенко [18].

В 2000 году автору удалось выписать базисные собственные функции ротора в пространстве $[L_2(\mathbb{T})]^3$ (см. Теорему в §2) и рассказать это О.А. Ладыженской на семинаре в Уфе (см. [19], [20]). В 2003 году О.А. Ладыженская решала задачу "О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей" [21]. На стр. 73 она пишет о схеме Галеркина: "Она хороша для получения доказательства теорем существования и дальнейшего качественного анализа решений. Однако, ее численная реализация требует знания какой-либо фундаментальной системы $\{\varphi_k\}$ в $H(\Omega)$. В данной работе мы предлагаем один из способов ее построения". В частности, О.А. Ладыженская интересовалась возможностью вычисления собственных функций оператора Стокса в областях простейших форм (куб, шар и др.) и спросила автора об этом.

Оказалось, что у периодических собственных функций (v_k, p_k) оператора Стокса $p_k = \text{const}$, а вектор-функции v_k совпадают с соленоидальными собственными функциями ротора u_k^\pm при $k \neq 0$ и u_0^j при $k = 0$ [22].

Позднее [23] автор вычислил собственные функции (v_n, p_n) оператора Стокса в шаре с условием: $v_n = 0$ на границе. В этом случае, p_n также постоянные и каждая собственная

вектор-функция v_n оператора Стокса есть сумма, $v_n = u_n^+ + u_n^-$, собственных вектор-функций ротора u_n^+ и u_n^- с одинаковыми по абсолютной величине, но разными по знаку собственными значениями. На границе шара они выходят в касательную плоскость и противоположно направлены. Так что в [23] найден другой подход к решению задачи о построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей. Работу [22] автор рассказывал О.А. Ладыженской в ПОМИ в конце 2003, а основу статьи [23] - сотрудникам ее лаборатории в начале 2005 года.

В работе [24] задача Коши для системы уравнений Навье-Стокса в классе 2π -периодических функций сводится к задаче Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее явный вид подсказал способ построения семейств точных решений задачи.

В настоящей работе, используя базис из периодических собственных функций ротора в пространстве V^0 , мы строим "приближения" v_l вектора скорости v . Коэффициенты v_l удовлетворяют конечной нелинейной системе Галеркина RS_l . Эта система в заданном базисе имеет простой вид. Ее линейная часть диагональная, а нелинейная часть каждого из уравнений является квадратичной формой (от неизвестных функций), коэффициенты которой вычисляются явно через скалярные произведения базисных векторов ротора (см. §3). Составлены программы расчета коэффициентов этих систем RS_l , численного решения задачи Коши и другие.

Рассчитаны некоторые модельные задачи. Рисунки §6 дают представление о колебаниях вектора скорости в плоскостях, ортогональных волновым векторам k . Видно, что при уменьшении параметра вязкости движение жидкости заметно осложняется.

В §4 исследована разрешимость задачи Коши для линейной однородной системы Стокса в шкале пространств $W^{1,2(s)}$, где $s \geq -1$. Доказано, что оператор задачи $(\partial_t + A, \gamma_0)v \rightarrow (0, \gamma_0 v)$ реализует изоморфизм пространств $W^{1,2(s)} \cap Ker(\partial_t + A)$ и V^{s+1} (Теорема 2).

В §3 рассмотрены решения v_l задач Коши для уравнений Галеркина RS_l с данными $S_l f, S_l g$ в предположении, что $f \in L_2(0, T; V^0)$, $g \in V^1$. Доказано, что последовательность $\{v_l\}_{l=1}^\infty$ ограничена как в пространстве $L_2(0, T; V^1)$ так и в пространстве $L_\infty(0, T; V^0)$.

В §5 выделены семейства точных глобальных решений. Простоты ради мы ограничились четырьмя случаями. Другие семейства можно выписать из [25], положив $\Omega = 0$.

А.Бабин, А.Махалов и В.Николаенко опубликовали ряд работ (см. [8] и обзор [18]), посвященных исследованию задачи Коши для системы уравнений Навье-Стокса в пространстве, вращающемся равномерно (вокруг вертикального вектора с угловой скоростью Ω) с начальными данными периодическими с периодами $2\pi a_j$ вдоль координатных осей e_j . В этом случае в уравнениях (1) добавляется еще сила Кориолиуса, равная $\Omega[e_3, v]$. Предполагая, что $g(x) \in V^\alpha$ и $\|g(x)\|_\alpha \leq M_\alpha$, а правая часть $f(t, x)$ принадлежит пространству $V^{\alpha-1}$ для $\alpha > 1/2$ и

$$\sup_T \int_T^{T+1} \|f\|_{\alpha-1}^2 dt \leq M_{\alpha f}^2, \tag{22}$$

они доказывают, что существует число Ω_1 , зависящее от $M_\alpha, M_{\alpha f}, \nu, a_1, a_2, a_3$ такое, что для $\Omega \geq \Omega_1$ система Навье-Стокса имеет глобальное решение $U(t)$ со значениями в V^α , причем $\|U(t)\|_\alpha \leq M'_\alpha$ для всех $t \geq 0$.

Изучая статью [8], автор ограничился случаем, когда периодичность по переменным x_j одинакова, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, и разложил заданные и искомую вектор-функции в ряды Фурье по собственным функциям оператора ротор. Это привело к существенным упрощениям и позволило выписать явно уравнения Галеркина и различные семейства точных решений уравнений Навье-Стокса (см. [25, 26, 27]).

А.В.Фурсиков [9] изучал начально-краевую задачу для уравнений Навье-Стокса в ограниченной области с гладкой границей и доказал ее локальную разрешимость в $V^{1,2(0)}$ с

начальными условиями из неограниченного эллипсоида $El_\rho^{1/2} = \{g \in V^1 : \|g\|_{V^{1/2}} < \rho\}$ при малом ρ .

С.С.Титов (см., например, [28] гл.4) изучает периодическую задачу Коши для уравнений Навье-Стокса методом Коши-Ковалевской в шкалах банаховых пространств. Решение строится в виде специального степенного ряда. Используя результаты Л.В. Овсянникова, при определенных условиях малости $v(0, x)$ и времени t доказывается существование решения.

2. РЯДЫ ФУРЬЕ

2.1. Ряды Фурье и собственные функций оператора Лапласа. Спектр оператора Лапласа в классе 2π -периодических функций состоит из чисел $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$, которые равны квадратам длин целочисленных векторов k . Собственные функции $(2\pi)^{-3/2} e_j e^{ikx}$ при $k \in \mathbb{Z}^3$, $j = 1, 2, 3$, образуют ортонормированный базис в пространстве $[L_2(\mathbb{T})]^3$ вектор-функций, интегрируемых с квадратом модуля в кубе Q .

Любая вектор-функция $f(x) \in [L_2(\mathbb{T})]^3$ разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = f_0 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} f_k e^{ikx}, \quad \text{где } f_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q f(x) e^{-ikx} dx, \quad (23)$$

сходящийся в среднем квадратичном (см., например, [1, 2, 3]).

Отметим, что тригонометрические полиномы плотны в $C(\mathbb{T})^3$ и $L_p(\mathbb{T})^3$, $1 \leq p < \infty$.

Если для некоторой $f \in L_p(\mathbb{T})^3$ все коэффициенты Фурье равны нулю, то $f = 0$.

Если $f \in L_2(\mathbb{T})^3$ и $\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} f_k e^{ikx}$ — ее ряд Фурье, то выполняется равенство Парсеваля-Стеклова

$$(2\pi)^{-3} \|f(x)\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} |f_k|^2. \quad (24)$$

Соответствие $f \leftrightarrow \{f_k\}$ есть унитарное отображение $L_2(\mathbb{T}^3)^3$ на $l_2(\mathbb{Z}^3)^3$.

Ряд Фурье (23) можно переписать в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_Q \left(\sum_k f_k \delta(y - k) \right) e^{ixy} dy. \quad (25)$$

Формула (25) означает, что преобразованием Фурье периодической функции $f(x)$ служит боронообразная функция $\sum_k f_k \delta(y - k)$ (см. [1], гл. 10).

2.2. Ряды Фурье на базе из собственных функций ротора. Автор доказал [22], что спектр оператора ротор состоит из числа 0 бесконечной кратности и чисел $\pm |k|$ конечной кратности.

Пусть $k_0 \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$. Обозначим через $u_k^\pm(x)$ базисные собственные вектор-функции оператора ротор, отвечающие собственным значениям $\pm |k_0|$, соответственно. Они удовлетворяют уравнениям

$$\text{rot } u_k^\pm(x) = \pm |k_0| u_k^\pm(x) \quad (26)$$

и имеют вид

$$u_k^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} c_k^\pm e^{ikx}, \quad (27)$$

причем точки k лежат на сфере радиуса $|k_0|$. Векторы $c_k^\pm = a_k^\pm + ib_k^\pm$ мы выбираем в зависимости от равенства нулю вектора $k' = (k_1, k_2)$:

$$c_k^\pm = \pm \frac{\sqrt{2}}{2|k'|} \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \frac{\sqrt{2}}{2|k||k'|} \begin{pmatrix} k_1 k_3 \\ k_2 k_3 \\ -k_1^2 - k_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{при } k' \neq 0 \quad (28)$$

и

$$c_k^\pm = \pm \frac{\sqrt{2}}{2|k|} \begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } k' = 0 \text{ и } k \neq 0. \quad (29)$$

Нетрудно убедиться, что b_k^+ есть векторное произведение $\widehat{k} = k/|k|$ и a_k^+ и что при любом $k \neq 0$ три вектора c_k^+ , c_k^- и \widehat{k} образуют ортонормированный базис в комплексном пространстве \mathbb{C}^3 , а три вектора $\sqrt{2}a_k^+$, $\sqrt{2}b_k^+$, \widehat{k} — в действительном пространстве R^3 , соответственно.

Нулевому собственному значению ротора соответствуют вектор-функции $u_k(x) = (2\pi)^{-3/2} \widehat{k} e^{ikx}$ при $k \neq 0$ и векторы $u_0^j = (2\pi)^{-3/2} e_j$ при $k = 0$.

Совместно с $u_k^\pm(x)$ они образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{T})^3$ [22]. Этот результат будет использован в дальнейшем, приведем его в виде теоремы с доказательством.

Теорема. Любая вектор-функция $f(x) \in [L_2(\mathbb{T})]^3$ разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = f_0 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} (\phi_k \widehat{k} + \phi_k^+ c_k^+ + \phi_k^- c_k^-) e^{ikx} \quad (30)$$

по собственным функциям оператора ротор. Вектор f_0 есть интеграл

$$f_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q f(x) dx, \quad (31)$$

— среднее f по кубу, остальные коэффициенты ϕ_k , ϕ_k^+ , ϕ_k^- равны

$$\phi_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q (f(x), \widehat{k}) e^{-ikx} dx, \quad (32)$$

$$\phi_k^\pm = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q (f(x), c_k^\pm) e^{-ikx} dx. \quad (33)$$

Скобки (f, g) здесь означают скалярные произведения в \mathbb{C}^3 . Ряд сходится в среднем квадратичном, то есть в норме $[L_2(\mathbb{T})]^3$.

Разложение (30) назовем модифицированным рядом Фурье. Равенство Парсеваля-Стеклова принимает вид:

$$(2\pi)^{-3} \|f\|^2 = |f_0|^2 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} (|\phi_k|^2 + |\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2). \quad (34)$$

Доказательство. Для любого вектора h из C^3 при $k \neq 0$ имеет место разложение

$$h = (h, \widehat{k}) \widehat{k} + (h, c_k^+) c_k^+ + (h, c_k^-) c_k^-. \quad (35)$$

Для вектора f_k из (23) согласно обозначениям (32) и (33) оно имеет вид $f_k = \phi_k \widehat{k} + \phi_k^+ c_k^+ + \phi_k^- c_k^-$. Подставив это разложение в ряд (23), получим ряд (30). Обозначим через $S_l f(x)$ частичную сумму ряда (30), проекцию вектора $f(x)$ на конечномерное пространство G_l , натянутое на базисные векторы u_0^j , u_k и u_k^\pm при $|k|^2 \leq l$. Тогда

$$(2\pi)^{-3} \|S_l f(x)\|^2 = |f_0|^2 + \sum_{|k|^2=1}^l (|\phi_k|^2 + |\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2) = \sum_{|k|^2=0}^l |f_k|^2. \quad (36)$$

Вектор $f - S_l f(x)$ ортогонален G_l и $\|f - S_l f(x)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_l f(x)\|^2$ согласно теореме Пифагора [4]. Из равенства Парсеваля следует, что при $l \rightarrow \infty$ норма разности $\|f - S_l f(x)\| \rightarrow 0$. Значит, последовательность $S_l f(x)$ сходится к $f(x)$ в норме пространства $L_2(\mathbb{T})^3$. Теорема доказана.

2.3. О суммировании рядов. Кратность собственных чисел $\pm|k_0|$ ротора равна числу $\kappa(|k_0|^2)$ точек целочисленной решетки \mathbb{Z}^3 , лежащих на сфере радиуса $|k_0|$. Число $|k_0|^2$ — целое. Числа $n = 4^m(8q + 7)$, где $m, q \geq 0$ целые, не представимы в виде суммы квадратов трех целых чисел, число $n = 7$ — первое из них. Для таких n полагаем $\kappa(n) = 0$. Тогда $N_l = \kappa(1) + \dots + \kappa(l)$ есть число ненулевых точек целочисленной решетки, лежащих в шаре радиуса \sqrt{l} . Знак $\sum_{|k|^2=1}^{\infty}$ показывает, что суммирование ряда (30) ведется по уровням $|k|^2 = l$, где $l = 1, 2, \dots$. На каждой такой сфере суммирование точек решетки произвольно и сходимость ряда не зависит от порядка суммирования. Уровни, для которых $\kappa(n) = 0$, пропускаются.

При вычислении *коэффициентов Фурье* (32), (33) необходимо задать нумерацию точек решетки. Составлена программа *нумерации ненулевых точек решетки*

$$k \rightarrow \vartheta(k) : 1(-1, 0, 0), 2(0, -1, 0), 3(0, 0, -1), \dots, 18(1, 1, 0), \dots,$$

в которой точка $(-1, 0, 0)$ является первой, точка $(1, 1, 0)$ — 18-той и т.д.

При вычислении интегралов по кубу, мы воспользовались кубатурными формулами Соболева с регулярным пограничным слоем ([1], гл.14).

2.4. Разложение на ортогональные подпространства. Ряды Фурье (23) и (30) означают, что имеется 2 способа разложения векторного пространства $L_2(\mathbb{T})^3$ на ортогональные подпространства:

$$L_2(\mathbb{T})^3 = \bigoplus_{j,k} F_k^j \quad \text{и} \quad L_2(\mathbb{T})^3 = \bigoplus_j F_0^j \oplus \bigoplus_{k \neq 0} (R_k \oplus R_k^+ \oplus R_k^-), \quad (37)$$

где F_k^j — подпространства, образованные вектор-функциями $e_j e^{ikx}$ ($j = 1, 2, 3$), а R_k, R_k^{\pm} — вектор-функциями $\widehat{k} e^{ikx}, c_k^{\pm} e^{ikx}$.

Действительно, в комплексном пространстве $F_k = F_k^1 \oplus F_k^2 \oplus F_k^3$ выбираем другой базис и получаем разложение $F_k = R_k \oplus R_k^+ \oplus R_k^-$. Эти базисы эквивалентны, их выбор неоднозначен (см. [22]).

Лемма 1. Пусть $f(x)$ из $L_2(\mathbb{T})^3$ представлена рядом (30). Она удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} f = 0$ в смысле обобщенных функций тогда и только тогда, когда ее коэффициенты (32) равны нулю, $\phi_k = 0$.

Действительно, ввиду (6) условие $\operatorname{div} f = 0$ означает ортогональность вектора f градиенту любой скалярной периодической функции $\psi(x)$ из Π^{∞} .

Произвольная функция $\psi(x)$ из Π^{∞} разлагается в ряд Фурье $\psi(x) = \psi_0 + \sum_{k \neq 0} \psi_k e^{ikx}$, сходящийся в $L_2(Q)$ вместе с производными любого порядка.

Ее градиент равен: $\sum_{k \neq 0} ik \psi_k e^{ikx}$. Формула (32) означает, что $i(2\pi)^3 |k| \phi_k = -(f, \nabla e^{ikx})$ есть скалярное произведение $-f$ и ∇e^{ikx} в $L_2(Q)$. Поэтому,

$$-(f(x), \nabla \psi(x)) = i(2\pi)^3 \sum_{|k|^2=1}^{\infty} |k| \phi_k \bar{\psi}_k. \quad (38)$$

Значит, $\operatorname{div} f = 0$, если все $\phi_k = 0$. Обратное утверждение следует из произвола в выборе ψ_k и полноты системы экспонент $\{e^{ikx}\}$.

Из леммы 1 вытекает, что для функций $f \in \widehat{V}^0$ имеет место разложение

$$f(x) = f_0 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} (\phi_k^+ c_k^+ + \phi_k^- c_k^-) e^{ikx}, \quad (39)$$

и квадрат ее нормы равен

$$\|f\|_{\widehat{V}^0}^2 = |f_0|^2 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} (|\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2). \quad (40)$$

2.5. Градиентная и соленоидальная составляющие вектор-функции. Вектор-функцию $F(x) \in L_2(\mathbb{T})^3$ разложим в ряд Фурье (30) и представим его в виде суммы: $F(x) = f(x) + \nabla q(x)$, где

$$f = f_0 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} (\phi_k^+(t)c_k^+ + \phi_k^-(t)c_k^-) e^{ikx}, \quad q = -i \sum_{|k|^2=1}^{\infty} \phi_k |k|^{-1} e^{ikx} \quad (41)$$

Откуда видно, что $f \in \widehat{V}^0$ и $q \in H_1(\mathbb{T})$. Вектор-функции $\nabla q(x)$ и $f(x)$ взаимно ортогональны. Они являются проекциями F на пространства

$$G = \bigoplus_{k \neq 0} R_k, \text{ и } \widehat{V}^0 = F_0 \bigoplus_{k \neq 0} (R_k^+ \oplus R_k^-); \quad L_2(\mathbb{T})^3 = G \oplus \widehat{V}^0. \quad (42)$$

Будем их обозначать, через $\widehat{\Pi}_0 F$ и $\Pi_G F$, то есть $f = \widehat{\Pi}_0 F$, $\nabla q = \Pi_G F$.

Другая формулировка Леммы 1: $f \in \widehat{V}^0 \Leftrightarrow \Pi_G f = 0$.

Если функция $F(t, x)$ зависит также от времени t , то функции q и f также зависят от t . Подставляя $\nabla q + f$ в правую часть уравнения (1) и положим $P = p - q$. Получим уравнения того же вида, в котором $F = f$ и $f(t, x)$ соленоидальна для любого $t \geq 0$.

2.6. Связь между собственными функциями операторов ротора и Стокса. Периодические собственные вектор-функции (v_n, p_n) оператора Стокса удовлетворяет уравнениям [5]:

$$-\nu \Delta v_n + \nabla p_n = \lambda v_n, \quad \operatorname{div} v_n = 0. \quad (43)$$

Из этих уравнений легко получить, что p_n являются гармоническими функциями, $\Delta p_n = 0$. Однако, гармоническая функция является периодической тогда и только тогда, когда она постоянна, $p_n = \text{const}$. Значит, $\nabla p_n = 0$, и уравнения (43) не содержат давления. Соленоидальные собственные функции ротора $u_0^j(x)$ и $u_k^{\pm}(x)$ удовлетворяют этим уравнениям с $\lambda = 0$ и $\lambda = \nu |k|^2$ при $k \neq 0$. Согласно теореме 1 других собственных функций нет. Таким образом, ряд (39) есть разложение вектор-функции $f(x) \in \widehat{V}^0$ по собственным функциям как оператора ротора, так и оператора Стокса.

2.7. Гильбертово пространство $H_s(\mathbb{T})$, $s \in \mathbb{R}$. Так обозначается пространство Соболева 2π -периодических вектор-функций с нормой

$$\|f\|_{H_s}^2 = |f_0|^2 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} |k|^{2s} (|\phi_k|^2 + |\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2) \quad (44)$$

при $s \geq 0$, причем $H_0(\mathbb{T})$ отождествляется с $L_2(\mathbb{T})^3$. Пространство $H_{(-s)}$ при $s > 0$ определяется как сопряженное к H_s относительно скалярного произведения в $L_2(\mathbb{T})^3$. Норма в $H_{(-s)}$ определяется формулой (44), в которой s отрицательно. Таким образом пространства H_s определены для любых s из \mathbb{R} (см. [1], гл. 12, [6], гл.1).

С.Л.Соболев определил и исследовал эти пространства при целых s .

В п.1.2 мы определили пространство $\widehat{V}^s = H_s \cap \widehat{V}^0$ и его подпространство $V^s = H_s \cap V^0$, состоящее из вектор-функций f с нулевым средним: $f_0 = S_0 f = 0$ при $s \geq 0$. Теперь их можно определить при всех $s \in \mathbb{R}$. Отметим вложения этих пространств. При $s > 1$ имеем:

$$V^s \subset V^1 \subset V^0 \subset V^{-1} \subset V^{-s}.$$

Если $f \in V^s$, то согласно Лемме 1

$$\|f\|_{V^s}^2 = \sum_{|k|^2=1}^{\infty} |k|^{2s} (|\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2). \quad (45)$$

Отметим, что норма (45) функции f в пространстве V^s при $s = 1$ совпадает с нормой $\|\nabla f\|_{V^0}$, а при $s = 2$ — с нормой $\|\Delta f\|_{V^0}$.

Далее, норма функции $f(t, x) = \widehat{\Pi}_0 f(t, x)$ в пространстве $L_2(0, T; \widehat{V}^s)$ определяется так:

$$\|f\|_{L_2(0, T; \widehat{V}^s)}^2 = \int_0^T (|f_0(t)|^2 + \sum_{|k|^2=1}^{\infty} |k|^{2s} (|\phi_k^+(t)|^2 + |\phi_k^-(t)|^2)) dt. \quad (46)$$

Подставляя ряды (45) в формулы (17) и (18), мы получим явные выражения для норм f в пространствах $L_\infty(0, T; V^s)$ и $W^{1,2,(s)}$ через модифицированные коэффициенты Фурье и их производные.

2.8. Действительные собственные функции ротора и вихревые потоки. Так как ротор является дифференциальным оператором первого порядка с действительными коэффициентами и его собственные значения действительны, то реальные и мнимые части его собственных функций также являются собственными функциями с теми же собственными значениями. Выпишем явный вид их реальных частей.

Положим $\phi_k = \alpha_k + i\beta_k = |\phi_k| e^{i\theta_k}$,

$$\phi_k^\pm = \alpha_k^\pm + i\beta_k^\pm = |\phi_k^\pm| e^{i\theta_k^\pm}, \quad \text{где } |\theta_k|, |\theta_k^\pm| \leq \pi,$$

тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\phi_k e^{ikx}) \widehat{k} &= (\alpha_k \cos kx - \beta_k \sin kx) \widehat{k} = |\phi_k| \cos(kx + \theta_k) \widehat{k}, \\ \operatorname{Re}(\phi_k^\pm c_k^\pm e^{ikx}) &= |\phi_k^\pm| (\cos(kx + \theta_k^\pm) a_k^\pm - \sin(kx + \theta_k^\pm) b_k^\pm). \end{aligned} \quad (47)$$

Полученные выражения дают возможность представить динамику движения жидкости в \mathbb{R}^3 , определяемой стационарными полями $d_k^\pm(x) = 2\operatorname{Re}(\phi_k^\pm c_k^\pm e^{ikx})$. Пусть скорость движения жидкости $v(x) = d_k^+(x)$. Очевидно, что вектор $d_k^+(x)$ лежит в плоскости, образованной векторами a_k^+ , b_k^+ . Его длина $|d_k^+(x)|$ не зависит от x и равна $\sqrt{2}|\phi_k^+|$, а направление — постоянно в каждой из плоскостей $P_{\delta+2\pi n}$, где $kx = \delta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, ибо

$$d_k^+(x)|_{P_{\delta+2\pi n}} = d_k^+(x)|_{P_\delta} = 2|\phi_k^+| (\cos(\delta + \theta_k^+) a_k^+ - \sin(\delta + \theta_k^+) b_k^+). \quad (48)$$

Плоскость P_δ ортогональна вектору k и вектор $d_k^+(x)$, перенесенный в точку $x \in P_\delta$, не выходит из этой плоскости. Поэтому на каждой из этих плоскостей жидкость течет в одном и том же направлении равномерно. Если векторы $d_k^+(x)$ откладывать от точек x , лежащих на оси вектора k , то $kx = |k||x|$ и, значит, они вращаются при изменении x .

Вектор $\operatorname{rot} d_k^\pm(x)$ в точке x называется завихренностью потока, задаваемого полем $d_k^\pm(x)$. Так как при любом $k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$

$$\operatorname{rot} d_k^\pm(x) = \pm|k| d_k^\pm(x) \quad (49)$$

и длина векторов $d_k^\pm(x)$ постоянна по x , то завихренность таких потоков жидкости не равна нулю в каждой точке $x \in \mathbb{R}^3$. Назовем их вихревыми. Отметим, что вектор-функции $\widehat{d}_k^\pm(x)$ единичной длины также удовлетворяют уравнению (49). Завихренность этих потоков растет с ростом $|k|$.

2.9. Ряд Фурье действительной функции. Рассмотрим целочисленную решетку \mathbb{Z}^3 и ее подмножества $M_1 = \{k : k_1 \in \mathbb{N}, k_2 = k_3 = 0\}$, $M_2 = \{k : k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{N}, k_3 = 0\}$, $M_3 = \{k : (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, k_3 \in \mathbb{N}\}$, через $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ обозначим их объединение и через M^* — множество центрально симметричное с M . Вектор $-k \in M^*$, если $k \in M$ и обратно. $M \cup M^* = \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$.

Пусть $k \in M$. Из формул (28), (29) видно, что $\overline{c_k^+} = -c_{-k}^+ = -c_k^-$, где черта означает комплексное сопряжение. Следовательно, выражение $\overline{\phi_k^+ c_k^+ e^{ikx}} = \phi_{-k}^+ c_{-k}^+ e^{-ikx}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\phi_k^+} = -\phi_{-k}^+$.

Для действительной функции $f(x)$ разность $f(x) - \overline{f(x)} = 0$. Учитывая единственность представления $f(x)$ в виде ряда Фурье, приходим к следующему утверждению:

Лемма 2. Пусть вектор-функция $f(x) \in L_2(\mathbb{T})$ и представлена рядом (30). Она вещественна, $f(x) = \overline{f(x)}$, тогда и только тогда, когда ее коэффициенты Фурье удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{\phi}_k = -\phi_{-k}, \quad \bar{\phi}_k^+ = -\phi_{-k}^+, \quad \bar{\phi}_k^- = -\phi_{-k}^-, \quad k \in M, \quad \text{и} \quad f_0^j = \bar{f}_0^j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Для действительной функции ряд (30) принимает вид:

$$f(x) = f_0 + 2\operatorname{Re} \sum_{k \in M} (\phi_k \widehat{k} + \phi_k^+ c_k^+ + \phi_k^- c_k^-) e^{ik \cdot x}. \quad (50)$$

Норма функции $\widehat{\Pi}_0 f$, проекции f на \widehat{V}^0 , задается формулой:

$$\|\widehat{\Pi}_0 f\|_{\widehat{V}^0}^2 = |f_0|^2 + 2 \sum_{k \in M} (|\phi_k^+|^2 + |\phi_k^-|^2). \quad (51)$$

3. МЕТОД ФАЭДО-ГАЛЕРКИНА

3.1. Обобщенная задачи Коши. Воспользуемся методом Фаэдо-Галеркина [5, 6, 7]. В качестве фундаментальной ортонормированной системы в \widehat{V}^0 возьмем собственные функции оператора Стокса:

$$u_0^j = \varpi^{-1} e_j \quad \text{и} \quad u_k^\pm(x) = \varpi^{-1} c_k^\pm e^{ikx}, \quad \text{где} \quad j = 1, 2, 3, \quad k \neq 0,$$

$\varpi = (2\pi)^{3/2}$, которые являются также собственными функциями ротора.

Условие $f(t, x) \in L_2(0, T; \widehat{V}^0)$ означает, что вектор-функция $f = \widehat{\Pi}_0 f$, представленная рядом (39), имеет конечную норму

$$\|f(t, x)\|_{L_2(0, T; \widehat{V}^0)}^2 = \int_0^T (|f_0(t)|^2 + \sum_{|k|^2=1} (|\phi_k^+(t)|^2 + |\phi_k^-(t)|^2)) dt. \quad (52)$$

Так как $V^0 \subset V^{-1}$, то норма f в $L_2(0, T; \widehat{V}^{-1})$ также конечна.

Условие $g \in \widehat{V}^1$ означает, что $g = \widehat{\Pi}_0 g$ и разлагается в ряд:

$$g(x) = g_0 + \sum_{|k|^2=1} (\psi_k^+ c_k^+ + \psi_k^- c_k^-) e^{ik \cdot x}, \quad (53)$$

где

$$g_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q g(x) dx, \quad \psi_k^\pm = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q (g(x), c_k^\pm) e^{-ik \cdot x} dx. \quad (54)$$

Причем

$$\|g(x)\|_{\widehat{V}^1}^2 = |g_0|^2 + \sum_{|k|^2=1} |k|^2 (|\psi_k^+|^2 + |\psi_k^-|^2) < \infty. \quad (55)$$

Следовательно, последовательность частичных сумм ряда (53):

$$S_l g(x) = g_0 + \varpi \sum_{|k|^2=1}^l (\psi_k^+ u_k^+(x) + \psi_k^- u_k^-(x)) \quad (56)$$

сходится к g в норме $\widehat{V}^1 \subset \widehat{V}^0$. При этом величины $\|g - S_l g\|_{\widehat{V}^0}^2 =$

$$\|g\|_{\widehat{V}^0}^2 - \|S_l g\|_{\widehat{V}^0}^2 = \varpi^{-2} \int_Q |g|^2 dx - |g_0|^2 - \sum_{|k|^2=1}^l (|\psi_k^+|^2 + |\psi_k^-|^2), \quad (57)$$

также стремятся к нулю при $l \rightarrow \infty$.

Пусть $f(t, x) \in L_2(0, T; \widehat{V}^0)$, $g \in \widehat{V}^1$. Будем искать "приближенное" решение задачи 2 в виде

$$v_l(x, t) = \varpi \sum_{j=1}^3 v_0^j(t) e_0^j + \varpi \sum_{|k|^2=1}^l (\gamma_{k,l}^+(t) u_k^+(x) + \gamma_{k,l}^-(t) u_k^-(x)), \quad (58)$$

где функции $v_0^j(t)$ и $\gamma_{k,l}^\pm(t)$ находятся из условий

$$v_0^j(0) = g^j, \quad \gamma_{k,l}^\pm(0) = \psi_k^\pm, \quad j = 1, 2, 3, \quad 0 < |k|^2 \leq l, \quad (59)$$

и уравнений:

$$\frac{d}{dt}(v_l, u_0^j) + \nu(\nabla v_l, \nabla u_0^j) + b(v_l, v_l, u_0^j) = (f, u_0^j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (60)$$

$$\frac{d}{dt}(v_l, u_k^\pm) + \nu(\nabla v_l, \nabla u_k^\pm) + b(v_l, v_l, u_k^\pm) = (f, u_k^\pm), \quad 0 < |k|^2 \leq l. \quad (61)$$

Здесь скобками (\cdot, \cdot) обозначены скалярные произведения в $L_2(Q)$. Функции

$$p_l(x, t) = p_0(t) + \sum_{|k|^2=1}^l p_{k,l}(t) e^{ikx} \quad (62)$$

находятся из уравнений

$$(L(v_l) + \nabla p_l - f, \widehat{u}_k) = 0, \quad 0 < |k|^2 \leq l. \quad (63)$$

Легко видеть, что уравнения (60) совпадают с уравнениями

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = f_0(t) \text{ и } v_0(0) = g_0 \quad (64)$$

для вектор-функции $v_0(t) = (v_0^1, v_0^2, v_0^3)$.

Уравнения (61), учитывая гладкость $v_l(t, x)$ по x , совпадают с уравнениями

$$(L(v_l) + \nabla p_l - f, u_k^\pm) = 0, \quad 0 < |k|^2 \leq l. \quad (65)$$

Выпишем их детальнее. Отметим, что вектор-функция

$$\nabla p_l(x, t) = i \sum_{|k|^2=1}^l p_{k,l}(t) k e^{ik \cdot x} = i \sum_{|k|^2=1}^l |k| p_{k,l}(t) \widehat{k} e^{ik \cdot x} \quad (66)$$

ортогональна базисным вектор-функциям u_k^\pm из V^0 , т.е. $(\nabla p_l, u_k^\pm) = 0$.

Оператор $L(v)$ в уравнениях (1) есть сумма линейного и нелинейного операторов: $Sv = \partial_t v - \nu \Delta v$ и $N(v, v) = (v \cdot \nabla)v$.

Вычислим значения этих операторов на сумме (58).

$$Sv_l = \partial_t v_0 + \sum_{|k|^2=1}^l ((\partial_t + \nu |k|^2) \gamma_{k,l}^+(t) c_k^+ + (\partial_t + \nu |k|^2) \gamma_{k,l}^-(t) c_k^-) e^{ikx}. \quad (67)$$

Если обозначить вектор $\gamma_{k,l}^+(t) c_k^+ + \gamma_{k,l}^-(t) c_k^-$ через w_k , то при $n + m = k$ имеем $N(w_n e^{inx}, w_m e^{imx}) = i e^{ikx} (w_n, m) w_m$. Следовательно,

$$N(v_l, v_l) = (v_0 \cdot \nabla) v_l + i \sum_{|k|^2=1}^{\rho_l} e^{ikx} \sum_{n+m=k} (w_n, m) w_m, \quad (68)$$

где $\rho_l = \max |n + m|^2$ при $|n|^2 \leq l$ и $|m|^2 \leq l$,

$$(v_0 \cdot \nabla) v_l = i \sum_{|k|^2=1}^l ((v_0, k) \gamma_{k,l}^+(t) c_k^+ + (v_0, k) \gamma_{k,l}^-(t) c_k^-) e^{ikx}. \quad (69)$$

Вектор w_m при $k \neq m$ разлагается по базисным векторам \widehat{k} , c_k^+ , c_k^- :

$$w_m = (w_m, \widehat{k}) \widehat{k} + (w_m, c_k^+) c_k^+ + (w_m, c_k^-) c_k^-. \quad (70)$$

Подставляя выражения (69), (70) в (68) и используя формулу (67), легко получить явный вид уравнений (65) :

$$\frac{\partial \gamma_{k,l}^+}{\partial t} + (\nu |k|^2 + i(v_0, k)) \gamma_{k,l}^+ + \quad (71)$$

$$+ i \sum_{m^2=1}^l [\gamma_{k-m,l}^+(c_{k-m}^+, m) + \gamma_{k-m,l}^-(c_{k-m}^-, m)] [\gamma_{m,l}^+(c_m^+, c_k^+) + \gamma_{m,l}^-(c_m^-, c_k^+)] = \phi_k^+(t),$$

$$\frac{\partial \gamma_{k,l}^-}{\partial t} + (\nu |k|^2 + i(v_0, k)) \gamma_{k,l}^- + \quad (72)$$

$$+ i \sum_{m^2=1}^l [\gamma_{k-m,l}^+(c_{k-m}^+, m) + \gamma_{k-m,l}^-(c_{k-m}^-, m)] [\gamma_{m,l}^+(c_m^+, c_k^-) + \gamma_{m,l}^-(c_m^-, c_k^-)] = \phi_k^-(t),$$

$0 < |k-m| \leq l$, относительно неизвестных функций $\gamma_{k,l}^+$ и $\gamma_{k,l}^-$, удовлетворяющих начальным условиям

$$\gamma_{k,l}^\pm(0) = \psi_k^\pm, \quad 0 < |k|^2 \leq l. \quad (73)$$

Уравнения (63) сводятся к алгебраическим уравнениям и согласно (66) функции $p_{k,l}(t)$ определяются через $\gamma_{k,l}^\pm$:

$$p_{k,l}(t) = -i |k|^{-1} (\phi_k(t) - \quad (74)$$

$$\sum_{m^2=1}^l [\gamma_{k-m,l}^+(c_{k-m}^+, m) + \gamma_{k-m,l}^-(c_{k-m}^-, m)] [\gamma_{m,l}^+(c_m^+, \widehat{k}) + \gamma_{m,l}^-(c_m^-, \widehat{k})])$$

Функция $p_0(t)$ не определяется и не учитывается в уравнениях (1), так как $\nabla p_0(t) = 0$. Для однозначности определения давления $p(x, t)$ будем предполагать, как обычно [5], что $p_0(t) = \varpi^{-2} \int_Q p(x, t) dx = 0$.

При постановке задачи 2 в п.1.3 мы предположили, что $f(t, x) \in L_2(0, T; V^0)$, $g \in V^1$. В этом случае $S_0 f = f_0(t) = 0$ и $S_0 g = g_0 = 0$. Задача (64) имеет только тривиальное решение $v_0(t) \equiv 0$, и уравнения (71), (72) упрощаются.

Систему уравнений (71), (72) относительно неизвестных $\gamma_{k,l}^+(t)$ и $\gamma_{k,l}^-(t)$ обозначим через RS_l (от "reduced system"). Заметим, что система RS_1 — линейна и интегрируется элементарно, а системы RS_l при $l \geq 2$ — нелинейны. Они составляют комплексную систему уравнений Галеркина на базе из собственных функций оператора Стокса.

3.2. Разложение по действительным собственным функциям ротора. Пусть вектор-функции $f \in L_2(0, T; V^0)$ и $g \in V^1$ действительны и

$$S_l f(t, x) = 2\varpi \operatorname{Re} \sum_{k \in M_l} (\phi_k^+(t) u_k^+ + \phi_k^-(t) u_k^-), \quad (75)$$

$$S_l g(x) = 2\varpi \operatorname{Re} \sum_{k \in M_l} (\psi_k^+ u_k^+ + \psi_k^- u_k^-). \quad (76)$$

Тогда галеркинские приближения находятся в виде

$$v_l = \operatorname{Re} v_l(x, t) = 2\varpi \operatorname{Re} \sum_{k \in M_l} (\gamma_{k,l}^+(t) u_k^+ + \gamma_{k,l}^-(t) u_k^-), \quad (77)$$

где комплексные функции $\gamma_{k,l}^\pm$ и их сопряженные удовлетворяют уравнениям (71), (72) в которых $k \in M_l$ и $v_0(t) = 0$. Множество M_l есть пересечение множества M с шаром

радиуса \sqrt{l} , оно содержит $N_l/2$ точек. Остальные N_l уравнений являются комплексно сопряженными с предыдущими. В этом нетрудно убедиться из явной формы уравнений (71), (72), так как согласно п.3.10

$$c_{-k}^{\pm} = -\overline{c_k^{\pm}}, \quad \phi_{-k}^{\pm} = -\overline{\phi_k^{\pm}}, \quad k \in M. \quad (78)$$

Если положить $\gamma_{k,l}^{\pm} = \alpha_{k,l}^{\pm} + i\beta_{k,l}^{\pm}$ и перейти к действительным переменным α, β , то вычислив реальную и мнимую части комплексных уравнений, получим систему $2N_l$ действительных уравнений с $2N_l$ действительными неизвестными. Обозначим ее через GS_l . Она является действительной формой уравнений Галеркина.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что мы придем к тем же уравнениям GS_l , если воспользуемся ортонормированным базисом из действительных собственных функций оператора ротор в пространстве V^0 :

$$\sqrt{2}Re u_k^{\pm}(x) \text{ и } \sqrt{2}Im u_k^{\pm}(x), \quad k \in M. \quad (79)$$

Выпишем аналоги уравнений (61).

$$\frac{d}{dt}(v_l, Re u_k^{\pm}) + \nu(\nabla v_l, \nabla Re u_k^{\pm}) + b(v_l, v_l, Re u_k^{\pm}) = (f, Re u_k^{\pm}), \quad (80)$$

$$\frac{d}{dt}(v_l, Im u_k^{\pm}) + \nu(\nabla v_l, \nabla Im u_k^{\pm}) + b(v_l, v_l, Im u_k^{\pm}) = (f, Im u_k^{\pm}), \quad (81)$$

где $k \in M_l$. Отметим, что в этом базисе

$$v_l = 2\varpi \sum_{k \in M_l} (\alpha_{k,l}^+ Re u_k^+ - \beta_{k,l}^+ Im u_k^+ + \alpha_{k,l}^- Re u_k^- - \beta_{k,l}^- Im u_k^-), \quad (82)$$

$$\|v_l(t, \cdot)\|_{V^0}^2 = 2 \sum_{k \in M_l} ((\alpha_{k,l}^+)^2 + (\beta_{k,l}^+)^2 + (\alpha_{k,l}^-)^2 + (\beta_{k,l}^-)^2). \quad (83)$$

На практике удобно работать с комплексными уравнениями RS_l . Если же функции f и g — действительны, то получим автоматически действительное решение v_l и согласно Лемме 2 оно имеет вид (77).

3.3. Основные соотношения между $v_l(t, x)$, $v_l(0, x)$ и $f(t, x)$ [5, 6, 7]. Умножая уравнения (80) на $2\varpi\alpha_{k,l}^{\pm}$, а уравнения (81) — на $-2\varpi\beta_{k,l}^{\pm}$ и складывая, приходим к основному соотношению:

$$\left(\frac{dv_l}{dt}, v_l\right) + \nu \|\nabla v_l\|_{V^0}^2 + b(v_l, v_l, v_l) = (f, v_l), \quad (84)$$

где $b(v_l, v_l, v_l) = 0$ ввиду периодичности и соленоидальности вектора v_l . Действительно, опуская временно индекс l , имеем $b(v, v, v) \equiv$

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_Q v_i(\partial_i v_j) v_j dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_Q \partial_i (v_i v_j^2) dx - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_Q v_j^2 \left(\sum_{i=1}^3 \partial_i v_i \right) dx = 0.$$

Далее, учитывая формулы (82), (83), получаем

$$\left(\frac{dv_l}{dt}, v_l\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_l\|_{V^0}^2 \quad \text{и} \quad \|\nabla v_l\|_{V^0}^2 = \|v_l\|_{V^1}^2.$$

Поэтому формула (84) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_l\|_{V^0}^2 + \nu \|v_l\|_{V^1}^2 = (f, v_l) \quad (85)$$

3.4. Две априорные оценки. Умножим равенство (85) на 2 и заметим, что правая часть полученных уравнений ограничена величиной

$$2|(f, v_l)| \leq 2\|v_l\|_{V^1}\|f\|_{V^{-1}} \leq \nu\|v_l\|_{V^1}^2 + \nu^{-1}\|f\|_{V^{-1}}^2. \quad (86)$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\|v_l\|_{V^0}^2 + \nu\|v_l\|_{V^1}^2 \leq \nu^{-1}\|f\|_{V^{-1}}^2. \quad (87)$$

Интегрируя (87) от 0 до s , $0 < s < T$, и учитывая, что $\|v_l(0, \cdot)\|_{V^0}^2 \leq \|g\|_{V^0}^2$, приходим к неравенству

$$\|v_l(s, \cdot)\|_{V^0}^2 \leq \|v_l(0, \cdot)\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^s \|f(t, \cdot)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq \|g\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{V^{-1}}^2 dt.$$

Значит,

$$\sup_{s \in [0, T]} \|v_l(s, \cdot)\|_{V^0}^2 \leq \|g\|_{V^0}^2 + \nu^{-1}\|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2. \quad (88)$$

Правая часть конечна и не зависит от l . Следовательно, последовательность вектор-функций $v_l(t, x)$ ограничена в пространстве $L_\infty(0, T; V^0)$.

Проинтегрировав (87) от 0 до T , получим

$$\|v_l(T, \cdot)\|_{V^0}^2 + \nu \int_0^T \|v_l(t, \cdot)\|_{V^1}^2 dt \leq \|v_l(0, \cdot)\|_{V^0}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{V^{-1}}^2 dt.$$

Значит,

$$\nu\|v_l\|_{L_2(0, T; V^1)}^2 \leq \|g\|_{V^0}^2 + \nu^{-1}\|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2. \quad (89)$$

Следовательно, последовательность вектор-функций $v_l(t, x)$ ограничена также в пространстве $L_2(0, T; V^1)$.

Нелинейная система GS_l с начальными условиями имеет решение, определенное на некотором максимальном интервале $[0, t_l]$.

Если $t_l < T$, то норма $\|v_l(t, \cdot)\|_{V^0}$ (см. (83)) должна стремиться к $+\infty$ при $t \rightarrow t_l$. Но первая априорная оценка (88) показывает, что этого не может быть, и поэтому $t_l = T$.

Мы предположили, что $f(t, x) \in L_2(0, T; V^0)$, $g(x) \in V^1$, а решение задачи 2 ищем в пространстве

$$W^{1,2(0)} = \{v(t, x) \in L_2(0, T; V^2) : \partial_t v(t, x) \in L_2(0, T; V^0)\}. \quad (90)$$

Поэтому правые части в системе GS_l , вообще говоря, принадлежат лишь пространству $L_2(0, T)$, а производные трактуются как обобщенные.

Важной частью обоснования метода Фаэдо-Галеркина является доказательство существования сходящейся подпоследовательности у последовательности v_l в каком-либо из пространств. В монографиях [5, 6, 7], где изучаются начально-краевые задачи для уравнений Навье-Стокса в областях различных размерностей, этот факт вытекает из компактности вложения определенных пространств Гильберта. Некоторые из доказанных там утверждений переносятся на задачу Коши (1), (2) с периодическими краевыми условиями. Этим мы предполагаем заняться в отдельной работе.

3.5. Метод ортогонального проектирования. Пусть Π_0 — орто-проектор пространства $L_2(\mathbb{T})^3$ на V^0 (см. п.3.7). Применив его к обеим частям первого из уравнений (1), освободимся от вектора ∇p . Получим операторное уравнение на вектор-функциях от t со значениями в пространстве V^0 :

$$\partial_t v(t, \cdot) + \nu Av + B(v, v) = \Pi_0 f \quad \text{с условием} \quad \gamma_0 v \equiv v|_{t=0} = g, \quad (91)$$

где

$$A = -\Pi_0 \Delta, \quad B(v, w) = \Pi_0 \left(\sum_{j=1}^3 v_j \partial_j w \right). \quad (92)$$

Проекция этого уравнения на ортогональные подпространства R_k^+, R_k^- совпадают с уравнениями (71), (72), в которых $l = \infty$ и $v_0(t) = 0$.

Задаче (91) соответствует оператор

$$(\partial_t + \nu A + B, \gamma_0) : W^{1,2(s)} \rightarrow L_2(0, T; V^s) \times V^{1+s}, \quad (93)$$

обратимость которого означает разрешимость задачи.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОКСА

4.1. Эта задача состоит в следующем. Даны f и g , найти 2π -периодическую по x_j вектор-функцию (v, p) , удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v = -\nabla p + f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v(0, x) = g(x). \quad (94)$$

Классическая и обобщенная постановки задачи такие же, как и для нелинейной системы в §1. Задаче соответствует оператор (93), где $B = 0$.

Задача Коши для системы Галеркина RS_l :

$$\partial_t \gamma_k^\pm + \nu |k|^2 \gamma_k^\pm = \phi_k^\pm(t), \quad \gamma_k^\pm(0) = \psi_k^\pm, \quad (95)$$

распадается на отдельные задачи, которые решаются элементарно.

При фиксированном $k \neq 0$ получаем

$$\gamma_k^\pm(t) = \psi_k^\pm e^{-\nu |k|^2 t} + \rho_k^\pm(t), \quad \text{где} \quad \rho_k^\pm(t) = \int_0^t e^{\nu |k|^2 (\tau-t)} \phi_k^\pm(\tau) d\tau. \quad (96)$$

Функция $\gamma_k^\pm(t) \in C^1[0, T]$, если $\phi_k^\pm(t) \in C[0, T]$.

Если же $\phi_k^\pm(t) \in L_2[0, T]$, то $\gamma_k^\pm(t) \in C[0, T]$ и имеет обобщенные производные из $L_2[0, T]$.

Предположим вначале, что $f = f_k, g = g_k$, где

$$f_k = \phi_k^+(t) u_k^+(x) + \phi_k^-(t) u_k^-(x), \quad g_k = \psi_k^+ u_k^+ + \psi_k^- u_k^-, \quad (97)$$

$u_k^\pm(x) = \varpi^{-1} c_k^\pm e^{ikx}$ — собственные функции ротора и $\phi_k^\pm(t) \in C[0, T]$. Тогда вектор-функция (v_k, p_k) , где

$$v_k = \gamma_k^+(t) u_k^+(x) + \gamma_k^-(t) u_k^-(x), \quad \nabla p_k = 0. \quad (98)$$

является классическим решением задачи (94).

Если же f и g действительны и

$$f = \operatorname{Re} (\phi_k^+(t) u_k^+(x) + \phi_k^-(t) u_k^-(x)), \quad g = \operatorname{Re} (\psi_k^+ u_k^+ + \psi_k^- u_k^-) \quad (99)$$

то $(\operatorname{Re} v_k, \operatorname{Re} p_k)$ есть действительное решение задачи (94).

Определение. Вектор-функции (v_k, p_k) , $(\operatorname{Re} v_k, \operatorname{Re} p_k)$ и $(\operatorname{Im} v_k, \operatorname{Im} p_k)$ назовем базовыми решениями линейной задачи (94).

Конечные суммы базовых решений также являются решениями задачи.

4.2. Общий случай. Пусть $f \in L_2(0, T; V^s)$, $g \in V^{1+s}$, $s \geq -1$. Тогда f и g представимы рядами

$$f(x, t) = \sum_{|k|^2=1}^{\infty} (\phi_k^+(t)u_k^+(x) + \phi_k^-(t)u_k^-(x)), \quad (100)$$

$$g(x) = \sum_{|k|^2=1}^{\infty} (\psi_k^+u_k^+(x) + \psi_k^-u_k^-(x)). \quad (101)$$

Пусть

$$v = \sum_{|k|^2=1}^{\infty} \left(\psi_k^+ e^{-\nu|k|^2 t} + \rho_k^+(t) \right) u_k^+(x) + \left(\psi_k^- e^{-\nu|k|^2 t} + \rho_k^-(t) \right) u_k^-(x), \quad (102)$$

— формальный ряд, $\nabla p = 0$. Если частичные суммы $S_l v$ ряда (102) сходятся в пространстве $W^{1,2(s)}$, то вектор-функция (v, p) будет решением задачи (94). Неоднородную задачу мы изучим в отдельной работе.

Рассмотрим детальнее однородную задачу.

Теорема 1. Пусть $f = 0$, $g \in V^{1+s} \subset \widehat{V}^{1+s}$, $s \geq -1$,

$$v_g(t, x) = \varpi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu n t} \sum_{|k|^2=n} (\psi_k^+ c_k^+ + \psi_k^- c_k^-) e^{ikx}, \quad p_g(t, x) = 0. \quad (103)$$

Тогда вектор-функция (v_g, p_g) является единственным решением однородной задачи (94). Причем, если $t > 0$, то $\|\partial_t^m v_g\|_{V^q} \leq M \|g\|_{V^0}$ для любых q и $m \geq 0$. Частичные суммы $S_l v_g$ и $S_l \partial_t^m v_g$ ряда v_g и его производной по t порядка m сходятся при $l \rightarrow \infty$ в норме пространства Соболева H_q . Если же $t \geq 0$, то $S_l v_g$ сходится при $l \rightarrow \infty$ в пространствах $W^{1,2(s)}$ и $L_\infty(0, T; V^{s+1})$ при любых $T > 0$. Кроме того, при $t \rightarrow 0$ норма разности $\|v_g(t, \cdot) - g\|_{V^{s+1}} \rightarrow 0$ и при $t \rightarrow +\infty$ норма $\|v_g(t, \cdot)\|_{V^{s+1}} \rightarrow 0$.

В основе доказательства теоремы лежат следующие оценки ряда (103) и его формальных производных. Пусть $t > 0$. Для любого $q \geq 0$ и целого $m \geq 0$ имеем

$$\|\partial_t^m v_g\|_{V^q}^2 = \nu^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2m+q} e^{-2\nu n t} \sum_{|k|^2=n} (|\psi_k^+|^2 + |\psi_k^-|^2). \quad (104)$$

Обозначим

$$M^2(\nu, m, q, t) = \nu^{2m} \max_{n \in \mathbb{N}} (n^{2m+q} e^{-2\nu n t}). \quad (105)$$

При $t > 0$ постоянная $M < \infty$ для любых $\nu > 0$, $m \geq 0$, $q \geq 0$, поэтому

$$\|\partial_t^m v_g\|_{V^q} \leq M \|g\|_{V^0}. \quad (106)$$

Пусть $m = 1$, $q = s$ в (104). Интегрируя этот ряд почленно и учитывая, что

$$\int_0^T e^{-2\nu n t} dt < \int_0^\infty e^{-2\nu n t} dt = (2\nu n)^{-1},$$

получаем

$$\|\partial_t v_g\|_{L_2(0, T; V^s)}^2 = \int_0^T \|\partial_t v_g\|_{V^s}^2 dt < \frac{1}{2} \nu \|g\|_{V^{s+1}}^2. \quad (107)$$

Так как $-\Delta u_k^\pm(x) = |k|^2 u_k^\pm(x)$, то

$$\|\Delta v_g\|_{L_2(0, T; V^s)}^2 = \int_0^T \|\Delta v_g\|_{V^s}^2 dt < \frac{1}{2\nu} \|g\|_{V^{s+1}}^2. \quad (108)$$

Следовательно,

$$\|v_g\|_{W^{1,2(s)}}^2 = \|v_g\|_{L_2(0, T; V^{s+2})}^2 + \|\partial_t v_g\|_{L_2(0, T; V^s)}^2 < \frac{1}{2} (\nu + \nu^{-1}) \|g\|_{V^{s+1}}^2. \quad (109)$$

Экспонента $e^{-2\nu t} \leq 1$ при $t \geq 0, \nu > 0, n \geq 1$ в (104), поэтому

$$\|v_g\|_{L_\infty(0,T;V^{s+1})} = \text{ess sup}_{t \in [0,T]} \|v_g(t, \cdot)\|_{V^{s+1}} \leq \|g\|_{V^{s+1}}. \quad (110)$$

Наконец, неравенство

$$\|v_g\|_{V^{s+1}} \leq e^{-\mu t} \|g\|_{V^{s+1}}, \quad 0 < \mu < \nu, \quad (111)$$

получаем из (104), так как $0 < e^{-2(\nu n - \mu)t} < 1$ при $\nu > \mu > 0, n \geq 1, t > 0$.

Полученные неравенства дают оценки отклонений $v_g - S_l v_g$ и их производных через отклонения $g - S_l g$. Так при $t > 0$ согласно (106)

$$\|\partial_t^m v_g - S_l \partial_t^m v_g\|_{V^q} \leq M \|g - S_l g\|_{V^0} \text{ для любых } q, m \geq 0 \text{ и } l \geq 1. \quad (112)$$

При $t \geq 0$, согласно (109),(110),

$$\|v_g - S_l v_g\|_{W^{1,2(s)}}^2 < \frac{1}{2}(\nu + \nu^{-1}) \|g - S_l g\|_{V^{s+1}}^2, \quad (113)$$

$$\|v_g - S_l v_g\|_{L_\infty(0,T;V^{s+1})} < \|g - S_l g\|_{V^{s+1}}. \quad (114)$$

Пространство $V^q = H_q \cap V^0$ по определению, $q > 0$. По условию теоремы $g \in V^{1+s}, 1+s \geq 0$ и $V^{1+s} \subset V^0$. Значит, последовательность $S_l v_g$ сходится к v_g при $l \rightarrow \infty$ в пространствах $W^{1,2(s)}$ и $L_\infty(0,T;V^{s+1})$ для любого $T > 0$. Согласно (112) при $t > 0$ последовательность $S_l v_g$ частичных сумм ряда v_g (а также последовательности $S_l \partial_t^m v_g$ из его производных по t) сходятся при $l \rightarrow \infty$ к v_g (и к $\partial_t^m v_g$) в норме пространства Соболева H_q . При $q \geq 2$ пространства Соболева $H_q(Q)$ вложены в пространства Гельдера $C^{q-1,5}(\bar{Q})$.

Значит, ряд (103) при $t > 0$ имеет непрерывные производные по x_j и по t любого порядка и выполняется принцип суперпозиции. Согласно п.5.1 ряд v_g удовлетворяет уравнениям (94), в которых $p = 0$ и $f = 0$. Далее,

$$\|g - v_g(t, \cdot)\|_{V^{s+1}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{s+1} (1 - e^{-\nu n t})^2 \sum_{|k|^2=n} (|\psi_k^+|^2 + |\psi_k^-|^2), \quad (115)$$

поэтому $\|g - v_g(t, \cdot)\|_{V^{s+1}}^2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Наконец, из оценки (111) вытекает, что $\|v_g(t, \cdot)\|_{V^{s+1}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Однозначная разрешимость задачи следует из единственности разложения g в ряд Фурье. Если $g = 0$, то $g_0 = 0$ и $\psi_k^\pm = 0$ для всех $k \neq 0$, а, значит, $v_g = 0$. Теорема доказана.

4.3. Теорема 1 остается справедливой при $t \in R_+ = (0, +\infty)$. Формулы (104)–(109) позволяют обнаружить интересные равенства:

$$\|v_g\|_{L_2(R_+;V^{s+2})}^2 = (2\nu)^{-1} \|g\|_{V^{s+1}}^2, \quad (116)$$

$$\|\partial_t v_g\|_{L_2(R_+;V^s)}^2 = 2^{-1} \nu \|g\|_{V^{s+1}}^2. \quad (117)$$

Значит,

$$\|v_g\|_{W^{1,2(s)}}^2 = 2^{-1}(\nu + \nu^{-1}) \|g\|_{V^{s+1}}^2. \quad (118)$$

При $\nu = 1$

$$\|v_g\|_{W^{1,2(s)}} = \|g\|_{V^{s+1}}. \quad (119)$$

Напомним, что изоморфизм евклидовых пространств — это взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее как линейные операции, определенные в этих пространствах, так и скалярное произведение.

При $s \geq -1, \nu = 1$ имеет место

Теорема 2 а. *Линейный оператор $g \mapsto v_g$, определенный рядом (103), реализует изоморфизм пространств V^{s+1} и $W^{1,2(s)} \cap \text{Ker}(\partial_t + A)$.*

Действительно, каждому элементу g из V^{s+1} с $g_0 = 0$ соответствует единственный элемент v_g из $W^{1,2(s)}$ такой, что $(\partial_t + A)v_g = 0, \gamma_0 v_g = g$. Обратное, ряд v определяет ряд g ,

равный $v|_{t=0}$, и согласно (119) длины этих вектор-функций совпадают. Итак, $g \leftrightarrow v$. Пусть h, w другая пара такая, что $h \leftrightarrow w$, $h_0 = 0$ и ϕ_k^\pm – коэффициенты Фурье h . Соотношения $\alpha g \leftrightarrow \alpha v$ и $g + h \leftrightarrow v + w$ следуют из линейности оператора. Скалярное произведение вектор-функций g и h в V^{s+1} имеет вид:

$$(g, h)_{V^{s+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{s+1} \sum_{|k|^2=n} ((\psi_k^+, \phi_k^+) + (\psi_k^-, \phi_k^-)). \quad (120)$$

Откуда легко видеть, что при $\nu = 1$

$$(v, w)_{W^{1,2(s)}} = (g, h)_{V^{s+1}}. \quad (121)$$

Теорема доказана. Ее можно сформулировать иначе

Теорема 2. *Линейный оператор $(\partial_t + A, \gamma_0)v \rightarrow (0, \gamma_0 v)$ реализует изоморфизм пространств $W^{1,2(s)} \cap Ker(\partial_t + A)$ и V^{s+1} .*

Используя эту теорему и следуя работе [9] можно доказать локальную разрешимость нелинейной задачи в классе $W^{1,2(0)}$ с начальными условиями из неограниченного эллипсоида $El_\rho^{1/2} = \{g \in V^1 : \|g\|_{V^{1/2}} < \rho\}$ при достаточно малом ρ .

Краевые задачи для уравнений $rot u + \lambda u = h$ с $\lambda \neq 0$, Стокса и Соболева (в стационарном случае), их разрешимость по Фредгольму в области с гладкой границей автор изучал ранее [29, 30, 31].

Ниже мы приведем семейства явных решений нелинейной задачи, которые используются при тестировании программы численного решения.

5. ЯВНЫЕ ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

5.1. Базовые решения. Это решения (v_k, p_k) линейной задачи с данными f_k, g_k , соответствующие собственным функциям ротора $u_k^\pm(x) = \varpi^{-1} c_k^\pm e^{ikx}$ с собственными значениями $\pm|k|$ при любом $k \neq 0$:

$$f_k = \phi_k^+(t) u_k^+(x) + \phi_k^-(t) u_k^-(x), \quad g_k = \psi_k^+ u_k^+ + \psi_k^- u_k^-, \quad (122)$$

$$v_k = \gamma_k^+(t) u_k^+(x) + \gamma_k^-(t) u_k^-(x), \quad \nabla p_k = 0, \quad (123)$$

где

$$\gamma_k^\pm(t) = \psi_k^\pm e^{-\nu|k|^2 t} + \int_0^t e^{\nu|k|^2(\tau-t)} \phi_k^\pm(\tau) d\tau, \quad \text{а } \phi_k^\pm(t) \in C[0, T], \quad (124)$$

например. Зафиксируем вектор $k \neq 0$.

Теорема 3. *Любое базовое решение (v_k, p_k) (соотв., $(Re v_k, Re p_k)$) линейной задачи (94) с данными (122) (соотв., (99)) является классическим решением нелинейной задачи (1), (2) с теми же данными.*

Доказательство. Пара (v_k, p_k) является решением линейной задачи, $\nabla p_k = 0$. Остается показать, что $N(v_k, v_k) = 0$. Очевидно, $\partial_j v_k = ik_j v_k$ и $(v_k, k) = 0$, так как $(c_k^\pm, k) = 0$. Поэтому

$$N(v_k, v_k) \equiv \sum_{j=1}^3 v_{k,j} \partial_j v_k = i(v_k, k) v_k = 0. \quad (125)$$

Далее, пусть $(w_k, q_k) = (Re v_k, Re p_k)$. Так как $\partial_j w_k = k_j Re(iv_k)$ и $(w_k, k) = 0$, то $N(w_k, w_k) = (w_k, k) Re(iv_k) = 0$.

Значит, пара $(Re v_k, Re p_k)$ также есть решение нелинейной задачи.

Выделим один важный частный случай. Пусть

$\phi_k^\pm(t) = \beta_k^\pm e^{-\sigma_k^\pm t}$, $\psi_k^\pm = 0$, тогда

$$\gamma_k^\pm(t) = \begin{cases} \beta_k^\pm t e^{-\nu|k|^2 t} & \text{при } \sigma_k^\pm = \nu|k|^2, \\ \frac{\beta_k^\pm}{\nu|k|^2 - \sigma_k^\pm} (e^{-\sigma_k^\pm t} - e^{-\nu|k|^2 t}) & \text{при } \sigma_k^\pm \neq \nu|k|^2. \end{cases} \quad (126)$$

Из этой формулы видим, что при $t \rightarrow +\infty$ модуль скорости $|v_k^\pm(x, t)|$ стремится к нулю, если $Re \sigma_k^\pm > 0$,

$$|v_k^\pm(x, t)| \rightarrow \frac{|\beta_k^\pm|}{|\nu k^2 - \sigma_k^\pm|}, \quad \text{если } Re \sigma_k^\pm = 0$$

и $|v_k^\pm(x, t)| \rightarrow +\infty$ экспоненциально, если $Re \sigma_k^\pm < 0$.

При $\sigma_k^\pm = \nu |k|^2$ имеет место резонанс.

5.2. Пусть Λ_k — луч, задаваемый вектором k . Точки k и $\lambda k \in \Lambda_k$, если λ — натуральное число. В этом случае базовые решения можно складывать. Например,

Теорема 4. Пусть $f = 0, g = g(k) \in V^{1+s}$, $s \geq -1$, где

$$g(k) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (\psi_{\lambda k}^+ u_{\lambda k}^+(x) + \psi_{\lambda k}^- u_{\lambda k}^-(x)). \quad (127)$$

Положим

$$v_{(k)} = \varpi^{-1} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (\psi_{\lambda k}^+ c_{\lambda k}^+ + \psi_{\lambda k}^- c_{\lambda k}^-) e^{i\lambda k x - \nu \lambda^2 |k|^2 t}, \quad p = 0. \quad (128)$$

Тогда пара $(v_{(k)}, 0)$, является решением задачи (1), (2) с $f = 0, g = g(k)$.

Доказательство. Данные задачи удовлетворяют условиям Теоремы 1. Поэтому пара $(v_{(k)}, 0)$ является решением линейной задачи. Остается показать, что $N(v_{(k)}, v_{(k)}) = 0$. Так как $c_{\lambda k}^\pm = c_k^\pm$ при $\lambda \in \mathbb{N}$, то

$$v_{(k)} = \alpha_k^+ c_k^+ + \alpha_k^- c_k^-, \quad \text{где } \alpha_k^\pm(t, x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \psi_{\lambda k}^\pm e^{i\lambda k x - \nu \lambda^2 |k|^2 t}, \quad (129)$$

причем ряды $\alpha_k^\pm(t, x)$ и их производные по x_j сходятся при $t > 0, g \in V^0$.

$$\nabla \alpha_k^\pm = i k \alpha_{k,1}^\pm, \quad \text{где } \alpha_{k,1}^\pm(t, x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda \psi_{\lambda k}^\pm e^{i\lambda k x - \nu \lambda^2 |k|^2 t}. \quad (130)$$

$$N(v_{(k)}, v_{(k)}) = \alpha_k^+ N(c_k^+, \alpha_k^+) c_k^+ + \dots + \alpha_k^- N(c_k^-, \alpha_k^-) c_k^- = 0, \quad (131)$$

так как каждое слагаемое этой суммы равно нулю. Действительно, учитывая, что $(c_k^\pm, k) = 0$, для первого из них получаем:

$$N(\alpha_k^+ c_k^+, \alpha_k^+ c_k^+) = \alpha_k^+ (c_k^+ \cdot \nabla) \alpha_k^+ c_k^+ = i \alpha_k^+ (c_k^+, k) \alpha_{k,1}^+ c_k^+ = 0, \quad (132)$$

что и требовалось доказать.

5.3. Пусть q — плоскость, задаваемая векторами m и n . Некоторые решения линейной задачи (v_k, p_k) при $k \in q$ можно складывать. Например.

Теорема 5. Пусть $f = 0, g = g_q \in V^{1+s}$, $s \geq -1$, где

$$g_q = \sum_{k \in q} \psi_k e^{i k x} m \times n. \quad (133)$$

Положим

$$v_q = \sum_{k \in q} \psi_k e^{i k x - \nu |k|^2 t} m \times n, \quad p = 0. \quad (134)$$

Тогда пара $(v_q, 0)$ является решением задачи (1), (2) с $f = 0, g = g_q$.

Доказательство. Разложим вектор $m \times n$ по базису \hat{k}, c_k^+, c_k^- и учтем, что любой вектор $k \in q$ ортогонален векторному произведению $m \times n$. Получаем

$$m \times n = (c_k^+, m \times n) c_k^+ + (c_k^-, m \times n) c_k^-. \quad (135)$$

Подставляя это выражение в формулы (133), (134), получим разложение g_q и v_q по собственным функциям ротора.

Ряд (133) удовлетворяет условиям Теоремы 1. Остается доказать, что $N(v_q, v_q) = 0$. Это делается также, как в предыдущей теореме:

$$v_q = \alpha m \times n, \text{ где } \alpha(t, x) = \sum_{k \in q} \psi_k e^{ikx - \nu|k|^2 t}. \quad (136)$$

$$N(v_q, v_q) = i\alpha(t, x) \sum_{k \in q} (m \times n, k) \psi_k e^{ikx - \nu|k|^2 t} m \times n = 0. \quad (137)$$

5.4. Пусть σ — сфера радиуса \sqrt{n} и $n = |k_0|^2$. Сумма решений линейной задачи (v_k, p_k) при $k \in \sigma$ не является решением нелинейной задачи. Но для собственных функций с одинаковыми собственными значениями справедлива

Теорема 6. Пусть $\phi_k^+(t) \in C[0, T]$,

$$f_\sigma^+ = \sum_{|k|^2=n} \phi_k^+(t) u_k^+(x), \quad g_\sigma^+ = \sum_{|k|^2=n} \psi_k^+ u_k^+. \quad (138)$$

Положим

$$\gamma_k^+(t) = \psi_k^+ e^{-\nu|k|^2 t} + \int_0^t e^{\nu|k|^2(\tau-t)} \phi_k^+(\tau) d\tau, \quad (139)$$

$$v_\sigma^+ = \sum_{|k|^2=n} \gamma_k^+(t) u_k^+(x), \quad p_\sigma^+ = \sum_{|k|^2=n} p_k^+ - \frac{1}{2}(v_\sigma^+)^2, \quad \nabla p_k^+ = 0. \quad (140)$$

Тогда пара (v_σ^+, p_σ^+) является классическим решением нелинейной задачи (1), (2) с $f = f_\sigma^+$, $g = g_\sigma^+$.

Доказательство. По построению для линейного оператора S имеем

$$Sv_\sigma^+ = f_\sigma^+ - \nabla \sum_{|k|^2=n} p_k^+. \quad (141)$$

При вычислении нелинейного оператора N от v_σ^+ воспользуемся соотношением $N(v, v) = (\text{rot } v) \times v + \nabla \frac{1}{2} v^2$ и учтем, что $\text{rot } v_\sigma^+ = \sqrt{n} v_\sigma^+$. Получаем

$$N(v_\sigma^+, v_\sigma^+) = (\text{rot } v_\sigma^+) \times v_\sigma^+ + \nabla \frac{1}{2} (v_\sigma^+)^2 = \nabla \frac{1}{2} (v_\sigma^+)^2. \quad (142)$$

Следовательно,

$$Sv_\sigma^+ + N(v_\sigma^+, v_\sigma^+) = f_\sigma^+ - \nabla \sum_{|k|^2=n} p_k^+ + \nabla \frac{1}{2} (v_\sigma^+)^2 = f_\sigma^+ - \nabla p_\sigma^+, \quad (143)$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что аналогичная теорема справедлива для собственных функций с отрицательными собственными значениями $-\sqrt{n}$. Для собственных функций с различными собственными значениями $\pm\sqrt{n}$ она, вообще говоря, не верна.

В работе автора [25] опубликованы семейства глобальных решений задачи Коши для нелинейной системы Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве с угловой скоростью Ω . Полагая $\Omega = 0$, легко выписать другие семейства точных глобальных решений нелинейной задачи.

6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Модельная задача — это задача Коши для системы Галеркина RS_l .

6.1. Стандартный вид уравнений Галеркина. Создана программа нумерации ненулевых точек решетки

$$k \rightarrow \vartheta(k) : 1(-1, 0, 0), 2(0, -1, 0), 3(0, 0, -1), \dots, 18(1, 1, 0), \dots,$$

в которой точка $(-1, 0, 0)$ является первой, точка $(1, 1, 0)$ — восемнадцатой и так далее. Используя эту нумерацию, введем нумерацию $\vartheta(k)$ для известных и неизвестных функций $\gamma_k^\pm(t)$. Так, например, $\gamma_{1(-1,0,0)}^+$ означает, что элемент $\gamma_{(-1,0,0)}^+$ является первым в этой системе нумерации и так далее. При $|k|^2 \leq l$ последний элемент имеет номер N_l , равный числу ненулевых точек решетки в шаре радиуса \sqrt{l} .

Введем в рассмотрение вектор-строку. Пусть

$$\gamma = (\gamma^+, \gamma^-) = (\gamma_1^+, \dots, \gamma_{N_l}^+, \gamma_1^-, \dots, \gamma_{N_l}^-) \quad (144)$$

и $B_{\vartheta(k)}^+$, $B_{\vartheta(k)}^-$ — матрицы квадратичных форм. В этих обозначениях $2N_l$ комплексных уравнений RS_l и начальные условия имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \gamma_{\vartheta(k)}^\pm = -\nu |k|^2 \gamma_{\vartheta(k)}^\pm - \gamma B_{\vartheta(k)}^\pm \gamma^T + \phi_{\vartheta(k)}^\pm, \quad \gamma_{\vartheta(k)}^\pm(0) = \psi_{\vartheta(k)}^\pm, \quad (145)$$

где $\vartheta(k) = 1, \dots, N_l$. Квадратичные формы

$$\begin{aligned} \gamma B_{\vartheta(k)}^\pm \gamma^T = i \sum_{m^2=1}^l & (\gamma_{k-m}^+(c_{k-m}^+, m)(c_m^+, c_k^\pm) \gamma_m^+ + \gamma_{k-m}^+(c_{k-m}^+, m)(c_m^-, c_k^\pm) \gamma_m^- + \\ & \gamma_{k-m}^-(c_{k-m}^-, m)(c_m^+, c_k^\pm) \gamma_m^+ + \gamma_{k-m}^-(c_{k-m}^-, m)(c_m^-, c_k^\pm) \gamma_m^-) \end{aligned}$$

распадаются на четыре однотипные квадратичные формы $\gamma^+ C^{++} (\gamma^+)^T, \dots, \gamma^- C^{--} (\gamma^-)^T$. Ненулевые элементы в матрицах этих форм занимают одни и те же позиции $(k-m, m)$ и располагаются “перпендикулярно” главной диагонали. Эти матрицы и матрицы B_k^\pm являются разреженными.

Составлена программа *вычисления модифицированных коэффициентов Фурье* (32), (33) вектор-функций $f(t, x)$ и $g(x)$, которые входят в уравнения и начальные данные задачи (145).

При вычислении интегралов по кубу использовались кубатурные формулы Соболева с регулярным пограничным слоем.

Составлены программы *вычисления коэффициентов системы RS_l и численного решения задачи Коши методом Рунге-Кутты*.

Распечатка системы RS_2 занимает около 20 страниц формата А4. Поэтому представим только первое плюсовое уравнение из RS_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma_{1(-1,0,0)}^+ = & -\nu \gamma_{1(-1,0,0)}^+ - \\ & \{ \gamma_{2(0,-1,0)}^+ (0.603553i) \gamma_{10(-1,1,0)}^+ + \gamma_{2(0,-1,0)}^+ (0.103553i) \gamma_{10(-1,1,0)}^- \\ & + \gamma_{3(0,0,-1)}^+ (0.603553i) \gamma_{9(-1,0,1)}^+ + \gamma_{3(0,0,-1)}^+ (-0.103553i) \gamma_{9(-1,0,1)}^- \\ & + \gamma_{4(0,0,1)}^+ (-0.603553i) \gamma_{8(-1,0,-1)}^+ + \gamma_{4(0,0,1)}^+ (0.103553i) \gamma_{8(-1,0,-1)}^- \\ & + \gamma_{5(0,1,0)}^+ (-0.603553i) \gamma_{7(-1,-1,0)}^+ + \gamma_{5(0,1,0)}^+ (-0.103553i) \gamma_{7(-1,-1,0)}^- \\ & + \gamma_{7(-1,-1,0)}^+ (0.25i) \gamma_{5(0,1,0)}^+ + \gamma_{7(-1,-1,0)}^+ (0.25i) \gamma_{5(0,1,0)}^- \\ & + \gamma_{8(-1,0,-1)}^+ (0.25i) \gamma_{4(0,0,1)}^+ + \gamma_{8(-1,0,-1)}^+ (0.25i) \gamma_{4(0,0,1)}^- \\ & + \gamma_{9(-1,0,1)}^+ (-0.25i) \gamma_{3(0,0,-1)}^+ + \gamma_{9(-1,0,1)}^+ (-0.25i) \gamma_{3(0,0,-1)}^- \\ & + \gamma_{10(-1,1,0)}^+ (-0.25i) \gamma_{2(0,-1,0)}^+ + \gamma_{10(-1,1,0)}^+ (-0.25i) \gamma_{2(0,-1,0)}^- \\ & + \gamma_{2(0,-1,0)}^- (-0.603553i) \gamma_{10(-1,1,0)}^+ + \gamma_{2(0,-1,0)}^- (-0.103553i) \gamma_{10(-1,1,0)}^- \\ & + \gamma_{3(0,0,-1)}^- (-0.603553i) \gamma_{9(-1,0,1)}^+ + \gamma_{3(0,0,-1)}^- (0.103553i) \gamma_{9(-1,0,1)}^- \\ & + \gamma_{4(0,0,1)}^- (0.603553i) \gamma_{8(-1,0,-1)}^+ + \gamma_{4(0,0,1)}^- (-0.103553i) \gamma_{8(-1,0,-1)}^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma_{5(0,1,0)}^- (0.603553i) \gamma_{7(-1,-1,0)}^+ + \gamma_{5(0,1,0)}^- (0.103553i) \gamma_{7(-1,-1,0)}^- \\
 & + \gamma_{7(-1,-1,0)}^- (-0.25i) \gamma_{5(0,1,0)}^+ + \gamma_{7(-1,-1,0)}^- (-0.25i) \gamma_{5(0,1,0)}^- \\
 & + \gamma_{8(-1,0,-1)}^- (0.25i) \gamma_{4(0,0,1)}^+ + \gamma_{8(-1,0,-1)}^- (0.25i) \gamma_{4(0,0,1)}^- \\
 & + \gamma_{9(0,0,1)}^+ (-0.25i) \gamma_{3(0,0,-1)}^+ + \gamma_{9(-1,0,1)}^+ (-0.25i) \gamma_{3(0,0,-1)}^- \\
 & + \gamma_{10(-1,1,0)}^- (0.25i) \gamma_{2(0,-1,0)}^+ + \gamma_{10(-1,1,0)}^- (0.25i) \gamma_{2(0,-1,0)}^- \} + \phi_{1(-1,0,0)}^+(t).
 \end{aligned}$$

Его коэффициенты вычислены с шестым порядком точности.

6.2. Разрешимость задачи (145). Предположив, что $f(t, x) \in L_2(0, T; V^0)$, $g(x) \in V^1$, мы доказали в §4 две априорные оценки

$$\sup_{s \in [0, T]} \|v_l(s, \cdot)\|_{V^0}^2 \leq \|g\|_{V^0}^2 + \nu^{-1} \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 \quad (146)$$

и

$$\|v_l\|_{L_2(0, T; V^1)}^2 \leq \nu^{-1} \|g\|_{V^0}^2 + \nu^{-2} \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2. \quad (147)$$

Откуда вытекает, что задача (145) разрешима на всем интервале $(0, T)$, и ее решение $v_l(t, x)$ ограничено в пространствах $L_\infty(0, T; V^0)$ и $L_2(0, T; V^1)$ при любом $l = 1, 2, \dots$. Отметим, что вектор-функции f и g действительны, $f_0(t) = 0$, $g_0 = 0$ и $S_l f(t, x)$, $S_l g(x)$ — их частичные суммы:

$$S_l f(t, x) = 2\varpi \operatorname{Re} \sum_{k \in M_l} (\phi_k^+(t) u_k^+(x) + \phi_k^-(t) u_k^-(x)), \quad (148)$$

$$S_l g(x) = 2\varpi \operatorname{Re} \sum_{k \in M_l} (\psi_k^+ u_k^+(x) + \psi_k^- u_k^-(x)), \quad (149)$$

а галеркинские приближения v_l , решения уравнений GS_l , имеют вид

$$v_l = \operatorname{Re} v_l(x, t) = 2\varpi \operatorname{Re} \sum_{k \in M_l} (\gamma_{k,l}^+(t) u_k^+(x) + \gamma_{k,l}^-(t) u_k^-(x)). \quad (150)$$

6.3. Визуальное представление. Рассмотрим поток, скорость которого задается действительной собственной функцией ротора вида

$$d_k^+(t, x) = 2 \operatorname{Re} (\phi_k^+(t) c_k^+ e^{ikx})$$

при $k \neq 0$. Она определяется комплексной функцией $\phi_k^+(t) = |\phi_k^+(t)| e^{i\theta_k^+(t)}$.

Пусть $P_{k,\delta}$ — плоскость, заданная уравнением $kx = \delta$. По построению векторы \widehat{k} , $\sqrt{2}a_k^+$, $\sqrt{2}b_k^+$ образуют ортонормированный базис в пространстве R^3 , который индуцирует базис на плоскости $P_{k,\delta}$. На каждой из них поток жидкости имеет скорость

$$v_{k,\delta}^+(t) = d_k^+|_{P_{k,\delta}} = 2 |\phi_k^+(t)| (\cos(\delta + \theta_k^+(t)) a_k^+ - \sin(\delta + \theta_k^+(t)) b_k^+), \quad (151)$$

не зависящую от $x \in P_{k,\delta}$.

Ее координаты в базисе $(\sqrt{2}a_k^+, \sqrt{2}b_k^+)$ такие же, как у комплексной функции $\phi_{k,\delta}^+(t) = \sqrt{2} \overline{\phi_k^+(t)} e^{i\delta}$ в базисе $(1, i)$. Другими словами, кривую $\phi_{k,\delta}^+(t)$ можно получить из кривой $\phi_k^+(t)$ растяжением на $\sqrt{2}$, поворотом на угол α и отражением от действительной оси.

Поэтому рисунок кривой $\phi_k^\pm(t)$ на комплексной плоскости дает возможность представить поведение вектора скорости $v_{k,\delta}^\pm(t)$ в плоскости $P_{k,\delta}$, ортогональной вектору k . Назовем его к а р т о й потока $d_k^\pm(t, x)$.

Составим карты для каждого из слагаемых решения (150). Набор таких карт даст представление об этом потоке в целом.

6.4. Решение задачи Коши для системы RS_2 . Пусть $\nu = 0.1$, $f = 0$ и ψ_k^+ заданы при $k = (0, 0, 1)$, $k = (0, 1, 1)$, а ψ_k^- – при $k = (0, 1, 0)$, то есть начальный поток g состоит из трех стационарных вихревых потоков:

$$g = 2\text{Re}(\psi_k^+ c_k^+ e^{ikx})|_{k=(0,0,1)} + 2\text{Re}(\psi_k^+ c_k^+ e^{ikx})|_{k=(0,1,1)} + 2\text{Re}(\psi_k^- c_k^- e^{ikx})|_{k=(0,1,0)}.$$

В результате вычисления задачи появляются 8 ненулевых функций $\gamma_k^\pm(t)$ для $k \in M' = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, -1, 1), (0, 1, 1)\}$, и полученное решение v имеет вид

$$v(t, x) = 2\text{Re} \sum_{k \in M'} (\gamma_k^+(t) c_k^+ + \gamma_k^-(t) c_k^-) e^{ikx}. \quad (152)$$

Далее мы повторили наши вычисления для $\nu = 0.01$ и можно увидеть различие этих кривых.

Пример. Переменная t меняется от 0 до 10. Начальные данные:

$$\psi_{4(0,0,1)}^+ = -3, \quad \psi_{14(0,1,1)}^+ = 14i, \quad \psi_{5(0,1,0)}^- = 2,$$

и по симметрии

$$\psi_{3(0,0,-1)}^+ = 3, \quad \psi_{11(0,-1,-1)}^+ = 14i, \quad \psi_{2(0,-1,0)}^- = -2.$$

На рисунках изображены карты вихревых потоков, то есть кривые $\gamma_k^\pm(t)$ на комплексной плоскости, дающие представление о поведении вектора скорости в плоскости, ортогональной вектору k .

$$\nu = 0, 01, \quad \gamma_{4(0,0,1)}^+(0) = -3.$$

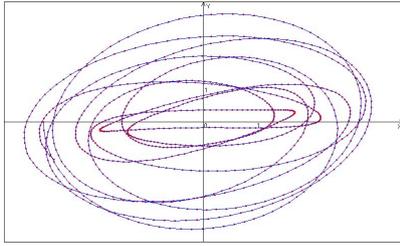


Рис.1.

$$\nu = 0, 01, \quad \gamma_{5(0,1,0)}^+(0) = 0$$

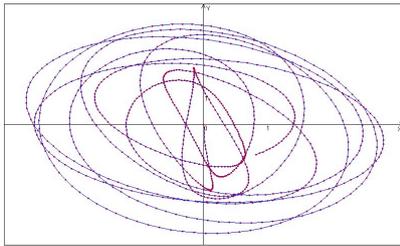


Рис.3.

$$\nu = 0, 01, \quad \gamma_{12(0,-1,1)}^+(0) = 0$$

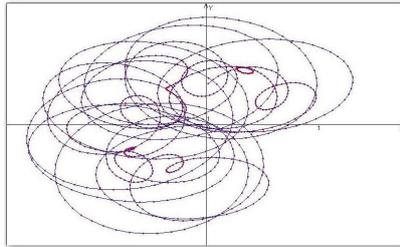


Рис.5.

$$\nu = 0, 1, \quad \gamma_{4(0,0,1)}^+(0) = -3.$$

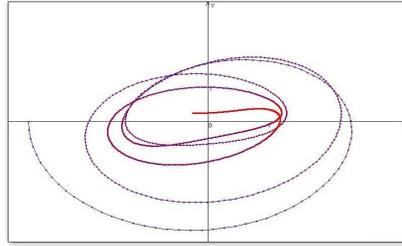


Рис.2.

$$\nu = 0, 1, \quad \gamma_{5(0,1,0)}^+(0) = 0$$

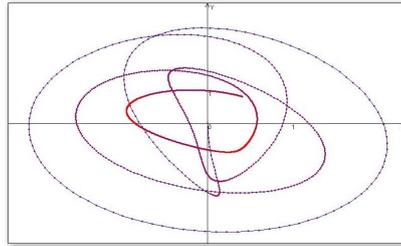


Рис.4.

$$\nu = 0, 1, \quad \gamma_{12(0,-1,1)}^+(0) = 0$$

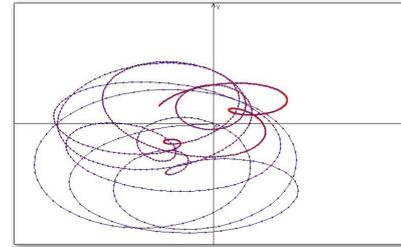


Рис.6.

$$\nu = 0, 01, \quad \gamma_{14(0,1,1)}^+(0) = 14i$$

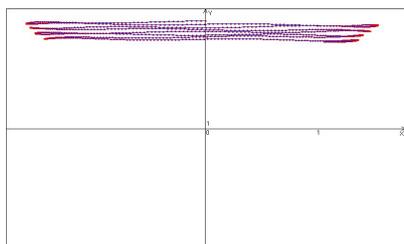


Рис.7.

$$\nu = 0, 1, \quad \gamma_{14(0,1,1)}^+(0) = 14i$$

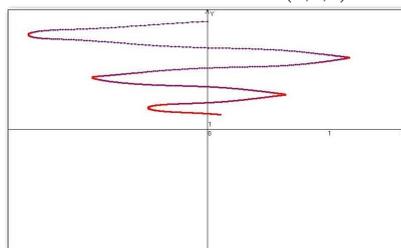


Рис.8.

$$\nu = 0, 01, \quad \gamma_{4(0,0,1)}^-(0) = 0$$

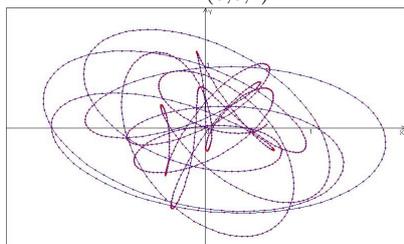


Рис.9.

$$\nu = 0, 1, \quad \gamma_{4(0,0,1)}^-(0) = 0$$

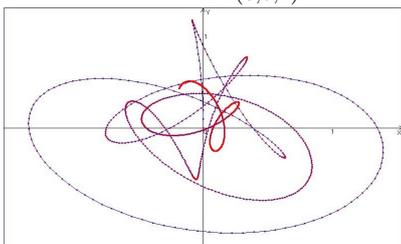


Рис.10.

$$\nu = 0, 01, \quad \gamma_{5(0,1,0)}^-(0) = 2$$

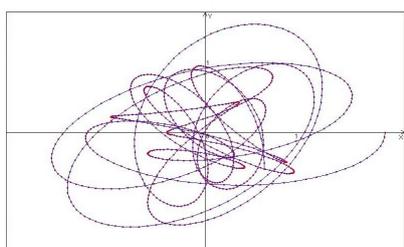


Рис.11.

$$\nu = 0, 1, \quad \gamma_{5(0,1,0)}^-(0) = 2$$

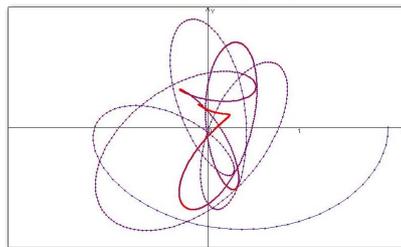


Рис.12.

$$\nu = 0, 01, \quad \gamma_{12(0,-1,1)}^-(0) = 0$$

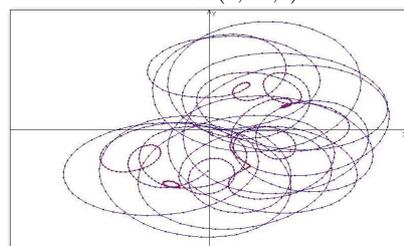


Рис.13.

$$\nu = 0, 1, \quad \gamma_{12(0,-1,1)}^-(0) = 0$$

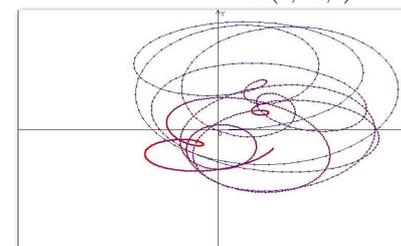


Рис.14.

$$\nu = 0, 01, \quad \gamma_{14(0,1,1)}^-(0) = 0$$

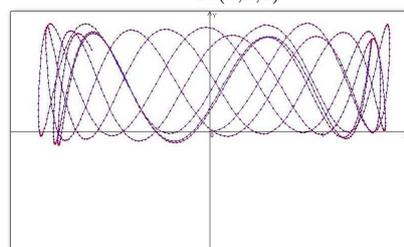


Рис.15.

$$\nu = 0, 1, \quad \gamma_{14(0,1,1)}^-(0) = 0$$

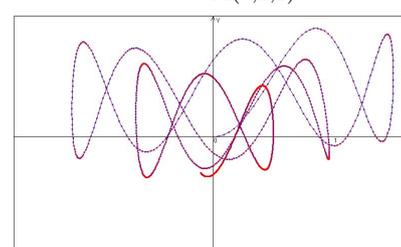


Рис.16.

В заключение отметим, что идея данного метода численного решения задачи принадлежит О.А.Ладыженской, которая предложила также провести расчеты модельных задач и в численном эксперименте понять характер разрушения решений при уменьшении коэффициента вязкости системы и других условиях. Этот вопрос остается открытым.

А.Г. Хайбуллин проделал большую работу по составлению программ, которые указаны в этой статье.

Благодарности. Профессору М.Д. Рамазанову за поддержку и аспиранту А.Г. Хайбуллину за помощь при оформлении работы. А также профессору Н.Х. Ибрагимову и организаторам конференции Mogran-13 профессорам В.А. Байкову и Р.К. Газизову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М.: Наука. 1974. 810 с.
2. Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*. М.: Мир. 1974. 335 с.
3. Ильин В.А. *Избранные труды*. Т. 1 М.: Макспресс. 2008. 730 с.
4. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука. 1988. 512 с.
5. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. Москва: Наука. 1970. 288 с.
6. Лионс Ж.-Л. *Методы решения нелинейных краевых задач*. М.: Мир. 1972. 590 с.
7. Темам Р.И. *Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ*. М.: Фазис. 1997. 770 с.
8. A.Babin, A.Mahalov, B.Nicolaenko *Global regularity of 3D rotating Navier-Stokes equations for resonant domains* // *Indiana Univ. Math. J.* 1999. V. 48. № 3. P. 1133–1176.
9. A.Fursikov *Local existence theorems with unbounded set of input data and unboundedness of stable invariant manifolds for 3D Navier-Stokes equations* // *Discrete and continuous dynamical systems series*. 2010. V. 3. № 2,
10. Арнольд В.И. *Избранное-60*. М.: Фазис. 1997.770 с.
11. О.И. Bogoyavlenskij *Infinite families of exact periodic solutions to the Navier-Stokes equations*// *Moscow Mathematical Journal*. 2003. V. 3. № 2. P. 263-272.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. том VI Гидродинамика..* Москва: Наука, 1986. 736 с.
13. S. Chandrasekhar, P.S. Kendall *On force-free magnetic fields* // *Astrophys. Journal*.1957. V. 126. P. 457-460.
14. J. B. Taylor *Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields* // *Phys. Rev. Letters*. 1974. V. 33. P. 1139-1141.
15. D. Montgomery, L. Turner, G. Vahala *Three-dimentional magnetohydrodynamic turbulence in cylindrical geometry*// *Phys. Fluids*. 1978. V. 21. № 5. P. 757-764.
16. Козлов В.В. *Общая теория вихрей*. Ижевск: Изд.Дом «Удмурдский университет». 1998. 240 с.
17. Пухначев В.В. *Симметрии в уравнениях Навье-Стокса* // *Успехи механики*. 2006. № 1.
18. Махалов А.С., Николаенко В.П. *Глобальная разрешимость трехмерных уравнений Навье-Стокса с равномерно большой начальной завихренностью*// *Успехи математических наук*. 2003. V. 58. № 2. С. 79-93.
19. Ладыженская О.А. *О различных уравнениях для вязких несжимаемых жидкостей и их исследованиях*. // *Методы функционального анализа и теории функций в различных задачах математической физики II* (Труды семинара с тем же назв. под руководством ак. РАН Ладыженской О.А. и проф. Сакса Р.С., Уфа 2000). Уфа: БГУ, ИМВЦ УНЦ РАН. 2002. С. 89-100.
20. Сакс Р.С., Поляков Ю.Н. *О спектральной задаче для оператора вихря в классе периодических функций* // *Методы функционального анализа и теории функций в различных задачах математической физики II* (Труды семинара с тем же назв. под руководством ак. РАН Ладыженской О.А. и проф. Сакса Р.С., Уфа 2000). Уфа: БГУ, ИМВЦ УНЦ РАН. 2002, С. 175-194.
21. Ладыженская О.А. *О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей* // *Записки Науч. семинаров ПОМИ*. 2003. Т. 306. С. 71 -85.
22. Сакс Р.С. *Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиями* // *Зап. Науч. семинаров ПОМИ*. 2004. Т. 318. С. 246-276.
23. Сакс Р.С. *Спектральные задачи для операторов ротора и Стокса* // *Доклады Акад. Наук*. 2007. Т. 416, № 4, С. 446-450.
24. R.S. Saks *The solution of spectral problems for curl and Stokes operators with periodic boundary conditions and some classes of explicit solutions of Navier-Stokes equations*// *More progress in*

- Analysis (Proc. V International ISAAC Congress. Italy. 2005). Berlin: World Scientific. 2009. P. 1195-1207.
25. Сакс Р.С. *Глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве* // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 162. № 2. С. 196-215.
 26. Сакс Р.С. *Явные глобальные решения уравнений Навье-Стокса и периодические собственные функции оператора ротор* // Доклады Акад. Наук. 2009. Т. 424. № 2. С. 171-176.
 27. Сакс Р.С., Хайбуллин А.Г. *Об одном методе численного решения задачи Коши для уравнений Навье-Стокса и рядах Фурье оператора ротор* // Доклады Акад. Наук. 2009. Т. 429, № 1, С. 22-27.
 28. Титов С.С. *Решение уравнений с особенностями в аналитических шкалах банаховых пространств*. Екатеринбург: Изд. Урал. ГАХА. 1999. 266 с.
 29. Сакс Р.С. *О краевых задачах для системы $rot u + \lambda u = h$* // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. № 1. С. 126-140.
 30. Сакс Р.С. *Нормально разрешимые и нетеровые краевые задачи для некоторых систем уравнений математической физики* // Применение функционального анализа к уравнениям с частными производными (Труды семинара академика Соболева С.Л.) Новосибирск: ИМ СОАН СССР. 1983. № 2. С. 129-158.
 31. Сакс Р.С. *Нетерово разрешимые краевые задачи для системы уравнений Соболева в случае установившихся процессов* // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 813-817.
 32. Хайбуллин А.Г., Сакс Р.С. *О программе нахождения коэффициентов ряда Фурье и применении при исследовании системы Навье-Стокса* // Сб. трудов IX-го международного семинара-совещания «Кубатурные формулы и их приложения». Уфа: ИМ ВЦ УНЦ РАН. 2007. С. 175-181.

Ромэн Семенович Сакс,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: romen-saks@yandex.ru