ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 1 (2011). С. 47-52.

УДК 517.5

БАЗИСЫ РИССА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.А. ПУТИНЦЕВА

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о существовании базисов Рисса в весовых гильбертовых пространствах с выпуклым весом. Пусть h — выпуклая функция на ограниченном интервале I вещественной оси, $L_2(I,h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\,dt} < \infty.$$

В случае, когда $I = (-\pi;\pi)$, $h(t) \equiv 1$, пространство $L_2(I,h)$ совпадает с классическим пространством $L_2(-\pi;\pi)$ и тригонометрическая система Фурье является базисом Рисса в этом пространстве. Негармонические базисы Рисса в $L_2(-\pi;\pi)$, как показано в работах Б.Я. Левина, можно конструировать с помощью системы нулей целой функции типа синуса. В данной работе доказано, что если в пространстве $L^2(I,h)$ существует базис Рисса из экспонент, то это пространство изоморфно (как нормированное пространство) классическому пространству $L_2(I)$. Таким образом, существование базисов Рисса из экспонент является исключительным свойством классического пространства $L_2(-\pi;\pi)$.

Ключевые слова: Базисы Рисса, весовые гильбертовы пространства, воспроизводящие ядра, преобразование Фурье-Лапласа, функции типа синуса.

Пусть I — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и $L^2(I,h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\,dt} < \infty.$$

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_I f(t)\overline{g}(t)e^{-2h(t)}\,dt.$$

В данной работе мы изучаем вопрос о существовании базисов Рисса из экспонент в пространствах $L_2(I,h)$. В классическом случае, когда $I = (-\pi;\pi)$, $h(t) \equiv 1$, система Фурье $e^{\pi n i}$ образует ортонормированный базис. Очевидно, что в других случаях ортнормированных базисов из экспонент в пространствах $L_2(I,h)$ не может быть. Понятие базиса Рисса введено в [10] Н.К. Бари и обозначает образ ортонормированного базиса при ограниченном обратимом операторе. Изучение неортонормированных базисов из экспонент в пространстве $L_2(-\pi;\pi)$ имеет длительную историю, является актуальной и ныне, в литературе за этой темой закрепилось название негармонический анализ Фурье. Первоначально показатели базиса из экспонент $(e^{\lambda_n t})$, $n = 1, 2, ...$, рассматривались как некоторое возмущение целых чисел, то есть в виде $\lambda_n = n + \alpha_n$. В работе [11] Б.Я. Левин впервые предложил характеризовать последовательность показателей как множество нулей целой функции

A.A. Putintseva, Riesz bases in weighted spaces.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 10-01-00233-а, 11-01-97009-р_поволжье_а.
Поступила 3 февраля 2011 г.

с теми или иными свойствами. Эти целые функции позднее в работе [12] были названы целыми функциями типа синуса. А именно, целой функцией типа синуса названы целые функции экспоненциального типа, которые вне некоторой вертикальной полосы удовлетворяют оценке

$$0 < c \leq |L(z)|e^{-\pi \mathrm{Re}\, z} \leq C < \infty.$$

В [11] показано, что система экспонент, последовательность показателей которой совпадает с множеством всех нулей целой функции типа синуса, образует обобщенный базис в $L_2(-\pi;\pi)$. Вскоре В.Д. Головин в работе [13] показал, что если нули функции типа синуса обладают свойством отделимости, то есть

$$\inf_{n\neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0,$$

то соответствующая система экспонент образует базис Рисса в пространстве $L_2(-\pi;\pi)$.

В данной работе мы докажем, что в неклассических случаях не существует базисов Рисса из экспонент.

Основным инструментом исследований в данной работе является преобразование Фурье-Лапласа функционалов. Преобразованием Фурье-Лапласа функционала S на пространстве $L_2(I,h)$ будем называть функцию

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda t}),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Если функционал S порождается элементом $g \in L_2(I,h)$, то

$$\widehat{S}(\lambda) = \int_I e^{\lambda t - 2h(t)}\overline{g(t)}dt,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, что отображение $\mathcal{L} : S \longrightarrow \widehat{S}$ вкладывает сопряженное пространство $L_2^*(I,h)$ в пространство целых функций. Для сокращения записи пространство $L_2(I,h)$ будем обозначать через H. Образ отображения обозначим через $\widehat{H} = \widehat{L}_2(I,h)$. В силу полноты системы всех экспонент $\{e^{\lambda t}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, отображение $\mathcal{L} : H^* \longrightarrow \widehat{H}$ будет взаимно однозначным. В пространстве $\widehat{H}$ можно ввести наведенную структуру гильбертового пространства по формуле

$$(\widehat{S}_1, \widehat{S}_2)_{\widehat{H}} = (S_1, S_2)_{H^*},\ S_1, S_2 \in H^*.$$

Отображение $\mathcal{L}$ является изоморфизмом пространств $\widehat{L}_2(I,h)$ и $L_2^*(I,h)$. Если пользоваться стандартным отождествлением линейных непрерывных функционалов на гильбертовом пространстве с элементом пространства, то получим сопряженно линейный изоморфизм пространств H и $\widehat{H}$ по формуле

$$f \longrightarrow (e^{\lambda t}, f)_H.$$

Такое отображение тоже будем обозначать через $\mathcal{L}$ и для $f \in L_2(I,h)$ образ $\mathcal{L}(f)$ будем обозначать через $\widehat{f}$. Итак,

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_I \overline{f(t)}e^{\lambda t - 2h(t)}dt,\ f \in L_2(I,h),$$

при этом

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\widehat{L}_2(I,h)} = (g, f)_{L_2(I,h)}.$$

Лемма 1. *Для $w \in \mathbb{C}$ через E_w обозначим функционал, порожденный функцией e^{wt}. Тогда функция $K(\lambda, w) = \widehat{E}_w(\lambda)$ является воспроизводящим ядром (см. [3]) в пространстве $\widehat{L}_2(I,h)$, то есть для любой функции $F \in \widehat{L}_2(I,h)$*

$$F(w) = (F(\lambda), K(\lambda, w)).$$

Доказательство. В самом деле, если $F = \widehat{f}$, то

$$(F(\lambda), K(\lambda, w)) = (\widehat{f}, \widehat{E}_w) = (e^{wt}, f)_{L_2(I,h)} = \widehat{f}(w) = F(w).$$

□

Если написать непосредственно, то

$$K(\lambda, w) = (e^{\lambda t}, e^{wt}) = \int_I e^{\lambda t + \overline{w}t - 2h(t)} dt.$$

Система элементов e_k, $k = 1, 2, ...$, в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [1]), если она полна и найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для для любого набора чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ выполняется соотношение

$$c \sum_{j=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2 \leq || \sum_{j=1}^{n} c_k e_k ||^2 \leq C \sum_{j=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2.$$

Известно (см. [2],[4]), что если система e_k, $k = 1, 2, ...$, — безусловный базис, то любой элемент пространства H единственным образом представляется в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

причем

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2 \leq ||x||^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2.$$

Безусловный базис e_k, $k = 1, 2, ...$, в гильбертовом пространстве называется базисом Рисса, если $||e_k|| \asymp 1$ (см. [4])

Лемма 2. *Система экспонент $\{e^{\lambda_k t}\}$, $k = 1, 2, ...$, является безусловным базисом в пространстве $L_2(I, h)$ тогда и только тогда, когда система $\{K(\lambda, \lambda_k)\}$, $k = 1, 2, ...$, образует безусловный базис в пространстве $\widehat{L}_2(I, h)$.*

Доказательство. В самом деле, если система экспонент образует безусловный базис, то любой элемент $f \in L_2(I, h)$ разлагается в ряд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k t}, \tag{1}$$

причем

$$||f||^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 ||e^{\lambda_k t}||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 K(\lambda_k, \lambda_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 ||K(\lambda, \lambda_k)||^2. \tag{2}$$

Если соотношение (1) умножим скалярно на $e^{\lambda t}$, то получим

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_k K(\lambda, \lambda_k),$$

а соотношение (2) означает

$$||\widehat{f}||^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} |\overline{c}_k|^2 ||K(\lambda, \lambda_k)||^2.$$

□

Следующие свойства безусловных базисов доказаны в [4] (стр. 374).

B1. Система $e_k,\ k=1,2,...$, является безусловным базисом в пространстве H тогда и только тогда, когда биортогональная система $h_n,\ n=1,2...$, является безусловным базисом в пространстве H.

B2. Если $e_k,\ k=1,2,...,$ — безусловный базис в пространстве H, $h_n,\ n=1,2...$ — биортогональная система, то $||e_k||\cdot||h_k||\asymp 1$.

Положим $K(z,z)=K(z)$.

Лемма 3. *Если система экспонент $\{e^{\lambda_k t}\},\ k=1,2,...$, является безусловным базисом в пространстве $L_2(I,h)$, то найдутся постоянные $c,C>0$ такие, что для любой функции $F\in\widehat{L}_2(I,h)$ выполняются оценки*

$$c||F||^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|F(\lambda_k)|^2}{K(\lambda_k)}\le C||F||^2. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть система экспонент $\{e^{\lambda_k t}\},\ k=1,2,...$, является безусловным базисом в пространстве $L_2(I,h)$. По лемме 2 система $\{K(\lambda,\lambda_k)\},\ k=1,2,...$, является безусловным базисом в пространстве $\widehat{L}_2(I,h)$. Пусть $E_n(\lambda),\ n=1,2,...,$ — биортогональный базис в $\widehat{L}_2(I,h)$. По свойству B1 система $E_n(\lambda),\ n=1,2,...$ является безусловным базисом, то есть каждый элемент $F\in\widehat{L}_2(I,h)$ представляется рядом

$$F(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}F_nE_n(\lambda),$$

причем

$$||F||^2\asymp\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|^2||E_n(\lambda)||^2.$$

В силу биортогональности имеем $F_n=(F(\lambda),K(\lambda,\lambda_n))=F(\lambda_n)$ и по свойству B2 $||E_n||K(\lambda_n)\asymp 1$. Таким образом, соотношение (3) выполнено.

□

В работах [7],[8] описано пространство $\widehat{L}_2(I,h)$.

Теорема A. *Пространство $\widehat{L}_2(I,h)$ изоморфно (как банахово пространство) пространству целых функций F, удовлетворяющих условиям*

$$|F(z)|\le C_F\sqrt{K(z)},\ z\in\mathbb{C},$$

$$||F||^2=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)}d\widetilde{h}'(x)dy<\infty,$$

где

$$K(z)=\int_I|e^{2zt}|e^{-2h(t)}dt,\ \widetilde{h}(x)=\sup_{t\in I}(xt-h(t)).$$

Теорема 1. *Если в пространстве $L_2(I,h)$ существует базис Рисса из экспонент, то $e^{h(t)}\asymp 1$, то есть пространство $L_2(I,h)$ изоморфно (как банахово пространство) классическому пространству $L_2(I)$.*

Доказательство. Если система $\{e^{\lambda_k t}\}$ — базис Рисса в $L_2(I,h)$, то показатели λ_k лежат в некоторой вертикальной полосе, то есть $|\mathrm{Re}\ \lambda_k|\le d$ для некоторого $d>0$.

Как показано в [5] (см. также [6]), показатели безусловного базиса $\{e^{\lambda_k t}\}$ удовлетворяют условию отделимости, то есть для некоторого $\delta>0$ верно $|\lambda_k-\lambda_m|\ge\delta$, когда $m\ne k$. Возьмем число $T>0$ из условий $\widetilde{h}'(T)-\widetilde{h}'(-T)\ge\frac{|I|}{2}$ и $T\ge d+\delta$. Такое число можно найти, потому что $\widetilde{h}'(\infty)-\widetilde{h}'(-\infty)=|I|$.

Поскольку в полосе $|\mathrm{Re}\ z| \le d$ функция $K(z) = K(\mathrm{Re}\ z)$ отграничена от нуля и бесконечности, то по лемме 3 выполняется соотношение

$$c||F||^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |F(\lambda_k)|^2 \le C||F||^2,\ F = \widehat{f} \in \widehat{L}_2(I,h). \tag{4}$$

Из левого неравенства имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(\lambda_k)|^2 \ge c \int_{|x|\le T} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dy d\widetilde{h}'(x). \tag{5}$$

Из равенства

$$F(x+iy) = \int_I e^{iyt} e^{xt-2h(t)} \overline{f}(t) dt, \forall x \in \mathbb{R},$$

по формуле Планшереля получаем

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dy = \int_I |f(t)|^2 e^{2xt-4h(t)} dt.$$

Отсюда, если $max\{|t|, t \in I\} = a$, то для всех $x \in [-T;T]$ верна оценка

$$e^{-2aT} \int_I |f(t)|^2 e^{-4h(t)} dt \le \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dy \le e^{2aT} \int_I |f(t)|^2 e^{-4h(t)} dt. \tag{6}$$

Левое неравенство вместе с (5) означает

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(\lambda_k)|^2 \ge \frac{|I|c}{2} e^{-2aT} \int_I |f(t)|^2 e^{-4h(t)} dt. \tag{7}$$

По свойствам субгармонических функций имеем оценку

$$|F(\lambda_k)|^2 \le \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{B(\lambda_k,\delta)} |F(z)|^2 dm(z).$$

В силу отделимости показателей отсюда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(\lambda_k)|^2 \le \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{\bigcup_k B(\lambda_k,\delta)} |F(z)|^2 dm(z) \le \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{|x|\le T} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dy dx.$$

Учитывая правое неравенство в (6), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(\lambda_k)|^2 \le \frac{2T}{\pi\delta^2} e^{2aT} \int_I |f(t)|^2 e^{-4h(t)} dt.$$

Эта оценка вместе с (4) и (7) означает, что для некоторых постоянных b, B и для всех $f \in L_2(I,h)$ выполняются соотношения

$$b \int_I |f(t)|^2 e^{-4h(t)} dt \le \int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt \le B \int_I |f(t)|^2 e^{-4h(t)} dt,$$

из которого с помощью стандартных методов с использованием функций типа "шапочки"можно получить, что $b \le e^{-2h(t)} \le B$.

Теорема 1 доказана.

$\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I* // Препринт ЛОМИ. С. 8–80.
2. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* М.: Наука. 1980.
3. N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. 1950. V. 68. № 3. P. 337–404.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука. 1965. 448 с.
5. Башмаков Р.А. *Системы экспонент в весовых гильбертовх пространствах на R* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2006 г.
6. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах* // УМЖ. 2011. Т. 3. № 1. С. 3–15.
7. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 80–87.
8. Луценко В.И. *Теорема Пэли–Винера на неограниченном интервале* // Исследования по теории приближений. Уфа. 1989. С. 79–85.
9. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // Доклады Академии наук. 2007. Т. 413. № 1. С. 20–22.
10. Бари Н.К. *О базисах в гильбертовом пространстве* // Доклады Академии наук. 1946. Т. 54. С. 383–386.
11. Левин Б.Я. *О базисах показательных функций в L^2* // Зап. матем. отд. физ.-мат. фак-та ХГУ и ХМО. 1961. Сер. 4. № 27. С. 39–48.
12. Левин Б.Я. *Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа* // Матем. физика и функц. анализ. ФТИНТ АН УССР. 1969. Вып. 1. С. 136–146.
13. Головин В.Д. *О биортогональных разложениях в L^2 по линейным комбинациям показательных функций* // Зап. матем. отд. физ.-мат. фак-та ХГУ и ХМО. 1964. Сер. 4. № 30. С. 18–29.

Анастасия Андреевна Путинцева,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: PutinBSU@yandex.ru