ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 1 (2011). С. 31-42.

УДК 517.5

ОБ ОРТОПОДОБНЫХ СИСТЕМАХ РАЗЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЗАДАЧЕ ОПИСАНИЯ СОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

В.В. НАПАЛКОВ (МЛ.)

Аннотация. В гильбертовых пространствах аналитических функций мы изучаем ортоподобные системы разложения. Доказано, что система воспроизводящих ядер $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in G}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ в гильбертовом пространстве аналитических функций H тогда и только тогда, когда пространство H есть пространство $B_2(G,\mu)$. В работе рассмотрена задача об описании сопряженного пространства к гильбертову пространству аналитических функций $B_2(G,\mu)$ в терминах преобразования Гильберта. Доказано, что эта задача сводится к вопросу существования в пространстве $B_2(G,\mu)$ специальной ортоподобной системы разложения. Также доказано, что пространство $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ – это единственное пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных в области $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, в котором система $\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\}_{\xi\in G}$ есть ортоподобная система разложения с мерой μ.

Ключевые слова: пространство Бергмана, гильбертовы пространства, воспроизводящее ядро, ортоподобные системы разложения, преобразование Гильберта.

1. Введение

Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$ и μ — неотрицательная борелевская мера на G. Через $B_2(G,\mu)$ обозначим пространство голоморфных в G функций, для которых

$$\|f\|^2_{B_2(G,\mu)} = \int_G |f(z)|^2\, d\mu(z) < \infty.$$

На меру μ наложим условие, чтобы пространство $B_2(G,\mu)$ было гильбертовым, то есть чтобы пространство $B_2(G,\mu)$ с нормой $\|\cdot\|_{B_2(G,\mu)}$ было полным.

Скалярное произведение в пространстве $B_2(G,\mu)$ имеет вид:

$$(f,g)_{B_2(G,\mu)} = \int_G f(z)\cdot\overline{g(z)}\, d\mu(z).$$

Дополнительно потребуем, чтобы система функций $\{\frac{1}{(z-\xi)^2},\ \xi\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}\}$ была полна в пространстве $B_2(G,\mu)$.

Замечание. *Мы не требуем сепарабельности пространства $B_2(G,\mu)$. Подробное изложение теории несепарабельных гильбертовых пространств можно найти в* [1], [2].

V.V. Napalkov(Jr.), On orthosimilar systems in a space of analytical functions and the problem of describing the dual space.

Поступила 17 января 2011 г.

Каждому линейному непрерывному функционалу f^* на $B_2(G,\mu)$, порожденному функцией $f \in B_2(G,\mu)$, поставим в соответствие функцию:

$$\widetilde{f}(\xi) \stackrel{def}{=} f^*\left(\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\right) = (\tfrac{1}{(z-\xi)^2}, f(z))_{B_2(G,\mu)} = \int_G \overline{f(z)} \cdot \frac{1}{(z-\xi)^2}\, d\mu(z), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

Определение 1. *Функция $\widetilde{f}$ называется преобразованием Гильберта функционала, порожденного функцией $f \in B_2(G,\mu)$.*

В силу полноты системы функций $\{\frac{1}{(z-\xi)^2}, \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}\}$ в пространстве $B_2(G,\mu)$ отображение $f^* \to \widetilde{f}$ инъективно. Совокупность функций $\widetilde{f}$ образует пространство

$$\{\widetilde{f}:\ \widetilde{f}(\xi) = (\tfrac{1}{(z-\xi)^2}, f(z))_{B_2(G,\mu)}\} \stackrel{\text{об}}{=} \widetilde{B}_2(G,\mu),$$

в котором мы рассматриваем наведенную структуру гильбертова пространства, то есть

$$(\widetilde{f},\widetilde{g})_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \stackrel{def}{=} (g,f)_{B_2(G,\mu)}$$

и

$$\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} = \|f\|_{B_2(G,\mu)}.$$

В этой работе мы изучаем вопрос: когда в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести норму вида

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\backslash G} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi)},$$

где ν — неотрицательная мера на $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, эквивалентную наведенной норме $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)}$? Более подробно, существует ли неотрицательная борелевская мера ν в $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ и постоянные $A_1, A_2 > 0$ такие, что выполняются соотношения

$$A_1\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \leq \|\widetilde{f}\| \leq A_2\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \quad , \quad \forall \widetilde{f} \in \widetilde{B}_2(G,\mu)?$$

Тем самым мы рассматриваем задачу об описании сопряженного к $B_2(G,\mu)$ пространства в терминах преобразования Гильберта.

Задачи об описании сопряженного к различным пространствам аналитических функций в терминах преобразования Коши, Гильберта, Фурье–Лапласа рассматривались ранее в работах многих авторов. Мы отметим здесь лишь наиболее близкие к теме данной статьи работы [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] и др.

2. Вспомогательные сведения

Определение 2. *(см.* [10]*) Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а Ω — пространство со счетно аддитивной мерой μ (см.* [15]*, с.109–116) Система элементов $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется ортоподобной (подобной ортогональной) системой разложения в H с мерой μ, если любой элемент $y \in H$ представляется в виде:*

$$y = \int_\Omega (y,e_\omega)_H e_\omega\, d\mu(\omega),$$

где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H, причем в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Ω_k измеримы по мере μ, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_K = \Omega$, быть может, зависящее от y и называемое подходящим для y, что функция $(y,e_\omega)_H \cdot e_\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$y = \int_\Omega (y,e_\omega)_H e_\omega\, d\mu(\omega) = \lim_{k\to\infty} (L) \int_{\Omega_k} (y,e_\omega)_H e_\omega\, d\mu(\omega).$$

Примеры:

1. Любой ортогональный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ в произвольном гильбертовом пространстве H является ортоподобной системой разложения; любой элемент $y \in H$ может быть представлен в виде:
$$y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k.$$
Здесь в качестве Ω можно взять множество $\mathbb{N}$, а в качестве меры μ считающую меру, т.е. мера множества из $\mathbb{N}$ есть количество различных натуральных чисел, попавших в это множество.
2. Пусть H гильбертово пространство, H_1 —подпространство H, а P —оператор ортогонального проектирования элементов из H на H_1. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ — ортогональный базис в H. Тогда система элементов $\{P(e_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset H_1$ будет ортоподобной системой разложения в H_1.(см. [10], теорема 9). Заметим, что если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональный базис в H, то система $\{P(e_k)\}_{k=1}^{\infty}$, вообще говоря, не будет ортогональным базисом в H_1.
3. Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$. Функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, $\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$. Система вейвлетов Морле $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, $\quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $L_2(\mathbb{R})$; любая функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ может быть представлена в виде:
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}\backslash 0} \int_{\mathbb{R}} (f(\tau), \psi_{a,b}(\tau))_{L_2(\mathbb{R})} \psi_{a,b}(x) \, \frac{dbda}{C_\psi |a|^2},$$
где $C_\psi > 0$ — некоторая постоянная. В качестве пространства Ω здесь берется множество $(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}$ с мерой $\frac{dbda}{C_\psi |a|^2}$.(см. [11],[10]).

Разложение элементов гильбертова пространства по ортоподобным системам может быть не единственным. В то же время ортоподобные системы разложения обладают многими свойствами ортогональных систем, например, для них выполняется аналог равенства Парсеваля и имеет место экстремальное свойство коэффициентов для ортоподобных систем разложения.

Определение 3. *([10]) Ортоподобную систему будем называть неотрицательной, если мера μ — неотрицательная.*

Нам понадобятся следующие две теоремы из работы [10] — теоремы 1 и 3.

Теорема A. (Аналог равенства Парсеваля) *Пусть $\{e_\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$ — неотрицательная ортоподобная система разложения с мерой μ в H.*

Тогда для любого элемента $y \in H$
$$\|y\|_H^2 = \int_\Omega |(y, e_\omega)|^2 \, d\mu(\omega),$$
и для любых двух элементов $x, y \in H$ имеем
$$(x, y)_H = \int_\Omega (x, e_\omega) \cdot \overline{(y, e_\omega)} \, d\mu(\omega).$$

Теорема B. (Экстремальное свойство коэффициентов разложения) *Пусть $\{e_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в H, а $c(\omega)$ — функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем рассматривается H) и*
$$y = \int_\Omega c(\omega) e_\omega \, d\mu(\omega).$$
где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H, причем в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$

пространства Ω *(все* Ω_k *измеримы по мере* μ, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ *для* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_K = \Omega$, *что функция* $c(\omega) \cdot e_\omega$ *интегрируема по Лебегу на* Ω_k *и*

$$y = \int_\Omega c(\omega) \cdot e_\omega \, d\mu(\omega) = \lim_{k\to\infty} (L) \int_{\Omega_k} c(\omega) \cdot e_\omega \, d\mu(\omega).$$

Тогда

$$\|y\|_H^2 \leq \int_\Omega |c(\omega)|^2 \, d\mu(\omega),$$

причем равенство имеет место лишь в случае, если $c(\omega) = (y, e_\omega)_H$ *почти всюду на* Ω *по мере* μ.

В этой работе мы изучаем функциональные гильбертовы пространства, состоящие из функций в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 4. *Гильбертово пространство* H, *состоящее из функций* $f(z) : E \to \mathbb{C}$, *заданных на некотором множестве* E, *называется функциональным, если для любого* $z_0 \in E$ *функционал* $\delta_{z_0} : f \to f(z_0)$ *является линейным и непрерывным функционалом над* H.

По теореме Рисса–Фишера всякий линейный непрерывный функционал над H порождается некоторым элементом из H. Отсюда найдется функция $K_H(z, z_0) \in H$ такая, что выполнено равенство $f(z_0) = (f(z), K_H(z, z_0))_H$.

Таким образом определяется функция $K_H(z, \xi)$, $z, \xi \in E$, которая называется воспроизводящим ядром пространства H(см., например, [12]). Основные свойства функциональных пространств и воспроизводящих ядер описаны в [12].

3. Основные результаты

В этой работе мы докажем утверждение:

Теорема 1. *Пусть* H *— функциональное гильбертово пространство функций в области* $G \subset \mathbb{C}$. *Норма в пространстве* H *будет иметь интегральный вид*

$$\|f\|_H = \sqrt{\int_G |f(\xi)|^2 \, d\nu(\xi)} \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда система функций $\{K_H(\xi, t)\}_{t\in G}$ *будет неотрицательной ортоподобной системой разложения с мерой* ν *в пространстве* H.

Замечание. *Очевидно, что если норма в пространстве* H *определена как в (1), то*

$$(f, g)_H = \int_G f(\xi) \cdot \overline{g(\xi)} \, d\nu(\xi).$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть система функций $\{K_H(\xi, t)\}_{t\in G}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения с мерой ν в пространстве H. Это означает, что любой элемент $f \in H$ может быть представлен в виде:

$$f(\xi) = \int_G (f(\tau), K_H(\tau, t))_H K_H(\xi, t) \, d\nu(t), \quad \xi \in G.$$

В силу теоремы А

$$\|f\|_H^2 = \int_G |(f(\tau), K_H(\tau, t))_H|^2 \, dv(t) = \int_G |f(t)|^2 \, d\nu(t).$$

Необходимость. Пусть для любого $f \in H$ верно

$$\|f\|_H^2 = \int_G |f(\xi)|^2 \, d\nu(\xi).$$

Тогда
$$f(\xi) = (f(t), K_H(t,\xi))_H = \int_G f(t) \cdot \overline{K_H(t,\xi)}\, d\nu(t).$$
По свойству воспроизводящих ядер (см. [12]) $\overline{K_H(t,\xi)} = K_H(\xi,t)$, поэтому
$$f(\xi) = \int_G f(t) \cdot K_H(\xi,t)\, d\nu(t) =$$
$$= \int_G (f(\tau), K_H(\tau,t))_H \cdot K_H(\xi,t)\, d\nu(t),\ \xi \in G. \tag{2}$$
Таким образом, система функций $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in G}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в пространстве H с мерой ν.

Теорема доказана.

Следствие. *Функциональное гильбертово пространство H, состоящее из аналитических в области G функций, совпадает с пространством $B_2(G,\mu)$ для некоторой меры μ тогда и только тогда, когда семейство воспроизводящих ядер $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in G}$ пространства H есть неотрицательная ортоподобная система разложения в H с мерой μ, т.е. любая функция $g \in H$ представляется в виде:*
$$g(\xi) = \int_G (g(\tau), K_H(\tau,t))_H K_H(\xi,t)\, d\mu(t), \quad \xi \in G.$$

Теорема 2. *Функциональное гильбертово пространство H, состоящее из функций от переменной $\xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}$, совпадает с пространством $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ тогда и только тогда, когда семейство функций $\{\frac{1}{(\xi-t)^2}\}_{t\in G}$ есть ортоподобная система разложения в H с мерой μ, т.е. любая функция $g \in H$ представляется в виде:*
$$g(\xi) = \int_G (g(\tau), \tfrac{1}{(\tau-t)^2})_H \tfrac{1}{(\xi-t)^2}\, d\mu(t), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}. \tag{3}$$

Необходимость. Пусть пространство H совпадает с $\widetilde{B}_2(G,\mu)$. Пространство $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ состоит из функций, представимых в виде:
$$\widetilde{f}(\xi) = (\tfrac{1}{(\xi-t)^2}, f(t))_{B_2(G,\mu)} = \int_G \overline{f(t)} \tfrac{1}{(\xi-t)^2}\, d\mu(t), \quad f \in B_2(G,\mu). \tag{4}$$
При этом мы рассматриваем в $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ наведенную структуру гильбертова пространства
$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} = (g,f)_{B_2(G,\mu)}.$$
Рассмотрим функцию $K_{B_2(G,\mu)}(\xi,t)$ от переменной ξ при фиксированном t. В наших обозначениях
$$\widetilde{K}_{B_2(G,\mu)}(\xi,t) = (\tfrac{1}{(\tau-t)^2}, K_{B_2(G,\mu)}(\tau,\xi))_{B_2(G,\mu)} = \frac{1}{(\xi-t)^2}$$
Поэтому для любого $f \in B_2(G,\mu)$
$$\overline{f(t)} = \overline{(f(\tau), K_{B_2(G,\mu)}(\tau,t))}_{B_2(G,\mu)} =$$
$$= (K_{B_2(G,\mu)}(\tau,t), f(\tau))_{B_2(G,\mu)} = (\widetilde{f}(\tau), \tfrac{1}{(\tau-t)^2})_{\widetilde{B}_2(G,\mu)}.$$
Отсюда и из (4) вытекает, что для любого $g \in \widetilde{B}_2(G,\mu)$
$$g(\xi) = \int_G (g(\tau), \tfrac{1}{(\tau-t)^2})_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \tfrac{1}{(\xi-t)^2}\, d\mu(t), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash G,\ g \in \widetilde{B}_2(G,\mu).$$
Таким образом, система функций $\{\frac{1}{(\xi-t)^2}\}_{t\in G}$ есть ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$.

Достаточность. Пусть система функций $\{\frac{1}{(\xi-t)^2}\}_{t\in G}$ есть ортоподобная система разложения в пространстве H с мерой μ. Это означает, что любой элемент пространства H может быть представлен в виде:

$$f(\xi)=\int_G (f(\tau),\tfrac{1}{(\tau-t)^2})_H \tfrac{1}{(\xi-t)^2}\,d\mu(t),\quad \xi\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

Вычислим воспроизводящее ядро пространства H:

$$K_H(\xi,\eta)=\int_G (K_H(\tau,\eta),\tfrac{1}{(\tau-t)^2})_H \tfrac{1}{(\xi-t)^2}\,d\mu(t)=$$

$$=\int_G \overline{\tfrac{1}{(\eta-t)^2}}\cdot\tfrac{1}{(\xi-t)^2}\,d\mu(t)=(\tfrac{1}{(\xi-t)^2},\tfrac{1}{(\eta-t)^2})_{B_2(G,\mu)},\quad \xi\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}. \tag{5}$$

С другой стороны, из (3) вытекает, что

$$K_{\widetilde{B}_2(G,\mu)}(\xi,\eta)=(\tfrac{1}{(\xi-t)^2},\tfrac{1}{(\eta-t)^2})_{B_2(G,\mu)}=K_H(\xi,\eta).$$

По теореме Мура–Ароншайна (см. [13],[12]) пространство H совпадает с $\widetilde{B}_2(G,\mu)$.

Теорема 2 доказана.

Определение 5. *(*[14]*, стр. 280) Линейный непрерывный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется положительным, если величина $(x,Ax)_H$ положительна для любого $x\in H$, $x\neq 0$.*

Определение 6. *(*[14]*, стр. 281). Числа*

$$C_1=\inf_{\substack{x\in H\\ x\neq 0}}\frac{(x,Ax)}{\|x\|^2},\quad C_2=\sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0}}\frac{(x,Ax)}{\|x\|^2}$$

называются нижней и верхней гранью самосопряженного оператора A.

Очевидно, что выполнены неравенства

$$C_1\|x\|^2\leq (x,Ax)\leq C_2\|x\|^2,\forall x\in H.$$

Лемма 1. *Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x,y) и предположим, что в H определено еще одно скалярное произведение $(x,y)_1$.*

Следующие условия эквивалентны:

1. *Нормы, определяемые скалярными произведениями (x,y), $(x,y)_1$, эквивалентны, т.е. найдутся постоянные $C_1,C_2>0$ такие, что для любого элемента $x\in H$ выполнены неравенства:*
$$C_1\|x\|\leq\|x\|_1\leq C_2\|x\|.$$
2. *Существует линейный непрерывный самосопряженный оператор A, являющийся автоморфизмом банахова пространства H с нормой $\|\cdot\|$, такой, что*
$$\|x\|_1^2=(x,Ax),\quad \forall x\in H. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем, что из 1 следует 2. Для некоторого элемента $x\in H$ в гильбертовом пространстве H рассмотрим линейный функционал

$$h\to(h,x)_1,\quad \forall h\in H.$$

Поскольку

$$|(h,x)_1|\leq\|h\|_1\cdot\|x\|_1\leq C_2\cdot\|h\|_1\cdot\|x\|,$$

функционал $h\to(h,x)_1$ будет линейным и непрерывным функционалом на гильбертовом пространстве H. По теореме Рисса — Фишера найдется единственный элемент $y_x\in H$ такой, что выполнено тождество:

$$(h,x)_1=(h,y_x),\quad \forall h\in H. \tag{7}$$

Определим отображение $A : H \to H$ по формуле $A(x) = y_x$. Очевидно, что A — линейный оператор. Кроме того,

$$\|y_x\| = \sup_{\substack{h \in H \\ h \neq 0}} \frac{(h, y_x)}{\|h\|} \leq C_2 \sup_{\substack{h \in H \\ h \neq 0}} \frac{(h, x)_1}{\|h\|_1} = C_2 \|x\|_1 \leq C_2^2 \|x\|.$$

Аналогично,

$$\|y_x\| = \sup_{\substack{h \in H \\ h \neq 0}} \frac{(h, y_x)}{\|h\|} \geq C_1 \sup_{\substack{h \in H \\ h \neq 0}} \frac{(h, x)_1}{\|h\|_1} = C_1 \|x\|_1 \geq C_1^2 \|x\|.$$

Из последних двух оценок следует, что

$$C_1^2 \|x\| \leq \|Ax\| \leq C_2^2 \|x\|.$$

В частности A — инъективный линейный ограниченный оператор. Из того, что в наших рассуждениях нормы $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ равноправны, следует сюръективность оператора A. Таким образом, A — автоморфизм банахова пространства H (как и пространства H с нормой $\|\cdot\|_1$).

Тогда из определения (7)

$$(h, x)_1 = (h, Ax)$$

и

$$C_1^2 \|x\|^2 \leq \|x\|_1^2 = (x, x)_1 = (x, Ax).$$

Значит, оператор A имеет положительную нижнюю грань и, тем самым, A — положительный самосопряженный оператор (см. [14], стр. 247).

Докажем, что из условия 2 вытекает условие 1. Если A — самосопряженный оператор такой, что выполнено равенство (6), то A есть положительный оператор и существует единственный положительный квадратный корень из оператора A, т.е. такой оператор S, что $A = S \circ S$ (см., например, [14], стр. 282). Оператор S также будет взаимнооднозначным самосопряженным (см. [14], стр. 247). Воспользуемся теоремой из [14], стр. 285.

Теорема C. *Для того чтобы линейный оператор T в гильбертовом пространстве имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная $C_1 > 0$ такая, что выполняются неравенства*

$$(T^* \circ Tx, x) \geq C_1 \|x\|^2, \quad (T \circ T^* x, x) \geq C_1 \|x\|^2,$$

где T^* — сопряженный оператор к оператору T.

Применим теорему C к оператору S. В качестве оператора T возьмем самосопряженный линейный непрерывный взаимнооднозначный оператор S. Применяя теорему C и учитывая, что оператор A ограничен, получим, что оператор $S \circ S^* = S \circ S = A$ имеет положительную нижнюю и верхнюю грань, т.е. найдутся постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что выполнены неравенства

$$C_1 \|x\|^2 \leq (x, x)_1 = (x, Ax) \leq \|A\| \|x\|^2 = C_2 \|x\|^2, \ \forall x \in H.$$

Последнее означает, что выполнено условие 1. Лемма доказана.

Следующая теорема конкретизирует теорему 1 в случае, когда гильбертово пространство H есть пространство $\widetilde{B}_2(G, \mu)$.

Теорема 3. *Для того чтобы в пространстве $\widetilde{B}_2(G, \mu)$ можно было ввести эквивалентную исходной норму*

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int_{\mathbb{C} \setminus G} |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, d\nu(\xi)},$$

где ν — неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{C}\backslash G$, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный непрерывный оператор S, задающий автоморфизм банахова пространства $B_2(G,\mu)$, такой, что система $\{S\left(\frac{1}{(z-\xi)^2}\right)\}_{\xi\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}}$ является ортоподобной системой разложения с мерой ν в пространстве $B_2(G,\mu)$, т.е. любой элемент $f\in B_2(G,\mu)$ можно представить в виде:

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}(f(\tau),S_\tau\tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}S_z\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\,d\nu(\xi),\quad z\in\mathbb{C}\backslash G.$$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму вида

$$\|\widetilde{f}\|_\nu=\sqrt{\int_{\mathbb{C}\backslash G}|\widetilde{f}(\xi)|^2\,d\nu(\xi)},$$

т.е. банаховы пространства $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ и $B_2(\mathbb{C}\backslash G,\nu)$ изоморфны. На функциях $f\in B_2(G,\mu)$ рассмотрим следующий оператор:

$$Tf(\xi)\stackrel{def}{=}(f(z),\tfrac{1}{(z-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}.$$

Обозначим

$$J_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G},\nu)=\{f,\quad \overline{f}\in B_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G},\nu)\},$$

где черта над f означает комплексное сопряжение.

Гильбертово пространство $J_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G},\nu)$ можно рассматривать как банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\nu$.

Функция $\widetilde{f}(\xi)=(\frac{1}{(\xi-z)^2},f(z))_{B_2(G,\mu)}$ принадлежит пространству $\widetilde{B}_2(G,\mu)$. По условию нормы $\|\cdot\|_{B_2(G,\mu)}$ и $\|\cdot\|_\nu$ эквивалентны, поэтому пространства $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ и $B_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G},\nu)$ изоморфны. Это означает, что $\widetilde{f}(\xi)$ принадлежит пространству $B_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G},\nu)$ и, следовательно, $\overline{\widetilde{f}(\xi)}$ принадлежит пространству $J_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G},\nu)$.

Из равенства

$$Tf(\xi)=(f(z),\tfrac{1}{(z-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}=\overline{(\tfrac{1}{(z-\xi)^2},f(z))}_{B_2(G,\mu)}=\overline{\widetilde{f}(\xi)},$$

вытекает, что оператор T действует из пространства $B_2(G,\mu)$ в пространство $J_2(\mathbb{C}\backslash G,\nu)$ и является линейным непрерывным взаимнооднозначным оператором.

Сопряженный оператор T^* к оператору T определяется из равенства

$$(Tf(\xi),h(\xi))_\nu=(f(z),T^*h(z))_{B_2(G,\mu)},\quad f\in B_2(G,\mu),\ h\in J_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G},\nu).$$

Найдем явный вид оператора T^*

$$\begin{gathered}(Tf(\xi),h(\xi))_\nu=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}Tf(\xi)\cdot\overline{h(\xi)}\,d\nu(\xi)=\\
=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}\int_G f(z)\frac{1}{\overline{(z-\xi)^2}}\,d\mu(z)\cdot\overline{h(\xi)}\,d\nu(\xi)=\\
=\int_G f(z)\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}\frac{1}{\overline{(z-\xi)^2}}\cdot\overline{h(\xi)}\,d\nu(\xi)\,d\mu(z)=\\
=\int_G f(z)\overline{\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}\frac{1}{(z-\xi)^2}\cdot h(\xi)\,d\nu(\xi)}\,d\mu(z)=\\
=\int_G f(z)\cdot\overline{T^*h(z)},\,d\mu(z)=(f(z),T^*h(z))_{B_2(G,\mu)}.\end{gathered}\tag{8}$$

Таким образом, сопряженный к T оператор T^* действует из пространства $J_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G},\nu)$ на пространство $B_2(G,\mu)$ и имеет вид:

$$T^*h(z)=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}} h(\xi)\frac{1}{(z-\xi)^2}\,d\nu(\xi),\quad h\in J_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G},\nu).$$

В частности это значит, что оператор $T^*\circ T\overset{def}{=}\mathcal{E}$ есть (см, например, [2], стр. 222) самосопряженный оператор, действующий в пространстве $B_2(G)$:

$$\mathcal{E}f(z)=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}(f(\tau),\tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\,d\nu(\xi).$$

Кроме того, оператор $\mathcal{E}$ — автоморфизм пространства $B_2(G,\mu)$. Оператор $\mathcal{E}$ как самосопряженный оператор имеет единственный положительный квадратный корень $R:B_2(G,\mu)\to B_2(G,\mu)$ (см., например, [14], стр.281, 282) такой, что $\mathcal{E}=R\circ R$. Оператор R — также автоморфизм пространства $B_2(G,\mu)$.

Тогда

$$R\circ Rf(z)=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}(f(\tau),\tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G)}\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\,d\nu(\xi).$$

Используя взаимооднозначность оператора $\mathcal{E}$ и рассуждения, как в ([15], стр. 128), можно показать, что

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}(f(\tau),\tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}S\circ S\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\,d\nu(\xi)=$$
$$=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}(f(\tau),S\tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}S\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\,d\nu(\xi),\tag{9}$$

где оператор S есть обратный оператор к оператору R, т.е. $R^{-1}\overset{\text{об}}{=}S$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть система $\{S\frac{1}{(z-\xi)^2}\}_{\xi\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $B_2(G,\mu)$. Это означает, что любой элемент $f\in B_2(G,\mu)$ может быть записан в виде:

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}(f(\tau),S_\tau\tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}S_z\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\,d\nu(\xi),\quad z\in G.$$

Используя ([15], стр. 128), можно показать, что

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}(f(\tau),S_\tau\tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}S_z\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\,d\nu(\xi)=$$
$$=\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}}(S\circ Sf(\tau),\tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\,d\nu(\xi),\quad z\in G.\tag{10}$$

Обозначим $S\circ S\overset{\text{об}}{=}A$. Поскольку оператор S имеет непрерывный обратный оператор, то по теореме С оператор A имеет положительную нижнюю грань, и, следовательно, в пространстве $B_2(G,\mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму

$$\|f\|_1=\sqrt{(Af,f)_{B_2(G,\mu)}},\tag{11}$$

которая порождает скалярное произведение

$$(f,g)_1=(Af,g)_{B_2(G,\mu)},\quad f,g\in B_2(G,\mu).$$

Заметим, что

$$(A^{-1}f,g)_1=(f,g)_{B_2(G,\mu)}.$$

Для любого $f \in B_2(G,\mu)$ имеем

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\tau), \tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_1 \tfrac{1}{(z-\xi)^2}\, d\nu(\xi), \quad z \in G.$$

Последнее означает, что система функций $\{\frac{1}{(\tau-\xi)^2}\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$ является ортоподобной системой разложения по мере ν в пространстве $B_2(G,\mu)$ с нормой $\|\cdot\|_1$. По теореме А

$$\|A^{-1}f\|_1^2 = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |(A^{-1}f(\tau), \tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_1|^2\, d\nu(\xi) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |(f(\tau), \tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)}|^2\, d\nu(\xi) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi) = \|\widetilde{f}\|_\nu^2. \tag{12}$$

Далее $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} = \|f\|_{B_2(G,\mu)}$. По лемме 1 (см. равенство 11) нормы $\|\cdot\|_{B_2(G,\mu)}$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны. Очевидно, найдутся постоянные $C_3, C_4 > 0$ такие, что

$$C_3\|f\|_1 \le \|A^{-1}f\|_1 \le C_4\|f\|_1, \quad f \in B_2(G,\mu).$$

Из равенства (12) следует, что нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)}$ и $\|\cdot\|_\nu$ эквивалентны. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть существует оператор S, осуществляющий автоморфизм пространства $B_2(G,\mu)$, который переводит семейство воспроизводящих ядер $\{K_H(z,t)\}_{t\in G}$ на семейство ядер Гильберта $\{\frac{1}{(z-\tau)^2}\}_{\tau\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$. Тогда в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму вида*

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi)},$$

где мера ν определяется следующим образом: оператор S определяет отображение

$$\tau = \rho(t);\ \rho : G \to \mathbb{C}\setminus\overline{G}$$

из равенства

$$SK_H(z,t) = \tfrac{1}{(z-\rho(t))^2}, \quad t \in G.$$

Пусть P — множество в G. Тогда $Q \overset{def}{=} \rho(P)$ есть множество в $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$, и мера $\nu(Q) \overset{def}{=} \mu(P)$.

Доказательство. Система элементов $\{K_H(z,t)\}_{t\in G}$ есть ортоподобная система разложения в пространстве $B_2(G,\mu)$ с мерой μ (см. следствие к теореме 1). Это означает, что любая функция $f \in B_2(G,\mu)$ может быть представлена в виде:

$$f(z) = \int_G (f(\tau), K_H(\tau,t))_H K_H(z,t)\, d\mu(t), \quad z \in G.$$

По условию теоремы оператор S осуществляет автоморфизм пространства $B_2(G,\mu)$ и переводит семейство воспроизводящих ядер $\{K_H(z,t)\}_{t\in G}$ на семейство ядер Гильберта $\{\frac{1}{(z-\tau)^2}\}_{\tau\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$. Тогда

$$K_H(z,t) = S_z^{-1}\tfrac{1}{(z-\rho(t))^2}, \quad t \in G$$

и

$$f(z) = \int_G (f(\tau), S_\tau^{-1}\tfrac{1}{(\tau-\rho(t))^2})_H S_z^{-1}\tfrac{1}{(z-\rho(t))^2}\, d\mu(t), \quad z \in G.$$

Сделав замену переменной в последнем интеграле $\xi = \rho(t)$ и учитывая, что $d\mu(\rho^{-1}(\xi)) = d\nu(\xi)$, приходим к выражению

$$f(z) = \int_G (f(\tau), S_\tau^{-1}\tfrac{1}{(\tau-\xi)^2})_H S_z^{-1}\tfrac{1}{(z-\xi)^2}\, d\nu(\xi), \quad z \in G.$$

Последнее по теореме 2 означает, что в гильбертовом пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму вида

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi)}.$$

Теорема 4 доказана.

4. Пример

В качестве области G возьмем верхнюю полуплоскость $U = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, в качестве меры μ плоскую меру Лебега v.

Рассмотрим пространство $B_2(U,v)$, состоящее из функций голоморфных в U и суммируемых с квадратом модуля по плоской мере Лебега, т.е.

$$\|f\|^2_{B_2(U,v)} = \int_U |f(z)|^2\, dv(z) < \infty.$$

В пространстве $B_2(U,v)$ полна система функций $\frac{1}{(z-\xi)^2}$ (см. [7]). Известно (см., например, [16]), что если G произвольная односвязная область и $\varphi : G \to D$ — конформное отображение области G на единичный круг D, то воспроизводящее ядро пространства $B_2(G,v)$ имеет вид:

$$K_{B_2(G,v)}(z,\xi) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varphi'(z)\overline{\varphi'(\xi)}}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(\xi)})^2}, \quad z,\xi \in G.$$

Функция $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ конформно отображает верхнюю полуплоскость U на единичный круг D. Отсюда нетрудно показать, что

$$K_{B_2(U,v)}(z,\xi) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(z-\overline{\xi})^2}, \quad z,\xi \in U. \tag{13}$$

По теореме 1 любую функцию $f \in B_2(U,v)$ можно представить в виде:

$$f(z) = \int_G (f(\tau), K_{B_2(U,v)}(\tau,t))_{B_2(U,v)} K_{B_2(U,v)}(\xi,t)\, dv(t), \quad \xi \in U.$$

На функциях f из $B_2(U,v)$ рассмотрим оператор S

$$Sf(z) = -\pi \cdot f(z), \quad z \in U.$$

Очевидно, что S есть автоморфизм пространства $B_2(U,v)$. Далее из (13) следует, что

$$SK_{B_2(U,v)}(z,\xi) = (-\pi) \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cdot \frac{1}{(z-\overline{\xi})^2} = \frac{1}{(z-\overline{\xi})^2}, \quad z,\xi \in U.$$

Если $\xi \in U$, то $\overline{\xi} \in \mathbb{C}\backslash\overline{U}$. Таким образом, оператор S удовлетворяет условию теоремы 4; переводит семейство функций $\{K_{B_2(U,v)}(z,\xi)\}_{\xi\in U}$ на семейство функций $\{\frac{1}{(z-\tau)^2}\}_{\tau\in\mathbb{C}\backslash\overline{U}}$. Очевидно, что $\rho(\xi) = \overline{\xi}$ (см. формулировку теоремы 4). По теореме 4 в пространстве $B_2(U,v)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму вида

$$\|\widetilde{f}\| = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\backslash U} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, dv(\overline{\xi})} = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\backslash U} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, dv(\xi)}.$$

Последнее означает, что пространства $B_2^*(U,v)$ и $B_2(\mathbb{C}\backslash\overline{U},v)$ изоморфны.

Автор выражает глубокую благодарность Р.С. Юлмухаметову за полезное обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука. 1966. 544 с.
2. Канторович Л.В., Акилов А.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1984. 752 с.
3. G. Köthe *Dualität in der Funktionentheorie* // J.Reine Angew. Math.,191. 1953. P. 30–49.
4. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 39:3. 1975. С. 657—702.
5. Любарский Ю.И. *Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 52:3,1988. С. 559–580.
6. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова* // Труды МИАН, 200. Наука, М., 1991. С. 245–254.
7. Напалков В.В. (мл.), Юлмухаметов Р.С. *О преобразовании Гильберта в пространстве Бергмана* // Математ. заметки. Т.70, вып 1. 2001. С. 68–78.
8. Напалков В.В. (мл.), *Различные представления пространства аналитических функций и задача описания сопряженного пространства* // Доклады РАН. 2002. С. 164–167.
9. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана* // Изв. РАН. Сер. матем., 68:1, 2004. С. 5–42.
10. Лукашенко Т.П. *О свойствах систем разложения подобных ортогональным* // Известия РАН, серия математическая. Т.62, №5. 1998. С. 187–206.
11. A. Grossmann, J. Morlet *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape* // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 723–736.
12. N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the AMS. 1950. V. 68, № 3. P. 337-–404.
13. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces.* Springer-Verlag, New York, Inc. 2000. 289 p.
14. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* М.: Мир. 1979. 588 с.
15. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* М.: ИЛ. 1962. 896 с.
16. Гайер Д. *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области.* М.: Мир. 1986. 216 с.

Валерий Валентинович Напалков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `vnap@mail.ru`