ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 1 (2011). С. 16-30.

УДК 517.547+517.55+517.53

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ-ВИНЕРА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ОПТИМАЛЬНОМУ ВОССТАНОВЛЕНИЮ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Л.С. МАЕРГОЙЗ, Н.Н. ТАРХАНОВ

Аннотация. Для класса Винера W^p целых функций экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$, следы которых на вещественном подпространстве $\mathbb{R}^n$ принадлежат пространству $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p < \infty$, найдены в принципиально новой форме (на языке распределений) полные аналоги теоремы Пэли-Винера и, в многомерном случае, теоремы Планшереля-Пойа о структуре преобразования Фурье любой целой функции $f \in W^2$. Полученные результаты применены для решения задачи о наилучшем аналитическом продолжении с конечного множества функций класса Винера. Самостоятельный интерес представляет описание условий существования конструктивных алгебраических формул характеристик оптимального восстановления линейных функционалов.

Ключевые слова: класс Винера целых функций, преобразование Фурье, распределения, оптимальный линейный алгоритм, многочлен Чебышева.

1. Введение

Основным объектом исследования данной статьи является класс Винера целых функций в $\mathbb{C}^n$ экспоненциального типа, следы которых на вещественном подпространстве принадлежат $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p < \infty$. В одномерном случае это класс W^p_σ таких функций типа $\leqslant \sigma$, где $\sigma > 0$. Теорема Пэли-Винера об описании преобразований Фурье функций класса W^2_σ [1] и ее многомерный вариант, принадлежащий М. Планшерелю и Д. Пойа [2], — популярные результаты теории интегралов Фурье, имеющие многочисленные приложения. В этой работе найден в принципиально новой форме (на языке распределений) аналог теоремы Пэли-Винера для функций класса W^p_σ, $1 < p < \infty$, допускающий и многомерное обобщение. Кроме того, в качестве приложения в классах Винера были изучены основные характеристики оптимального восстановления с конечного множества функций класса Винера. Статья непосредственно примыкает к работам [3], где подобные вопросы рассматривались для класса W^p_σ, $1 < p < 2$, и [4], где исследовались показатели наилучшего аналитического продолжения в случае $p = 2$, $n > 1$. Она представляет собой переработанный вариант препринта авторов [5].

2. Аналог теоремы Пэли-Винера

1°. Предварительные замечания. Пусть $\sigma > 0$. Классическая теорема Пэли-Винера утверждает, что пространство W^2_σ эквивалентно пространству $\mathcal{F}^{-1}L^2[-\sigma,\sigma]$, где $L^2[-\sigma,\sigma]$

L.S. Maergoiz, N.N. Tarkhanov, An analogue of the Paley-Wiener theorem and its applications to optimal recovery of entire functions.

Работа поддержана Немецким научно-исследовательским обществом (the Deutsche Forschungsgemeinschaft).

Поступила 24 августа 2010 г.

рассматривается как подпространство $L^2(\mathbb{R})$, состоящее из всех функций с носителем в $[-\sigma,\sigma]$, а $\mathcal{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье

$$f(x) := \mathcal{F}^{-1}F\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{\imath x\xi}F(\xi)d\xi, \quad x\in\mathbb{R}; \quad F\in L^2[-\sigma,\sigma].$$

Элемент $F = \hat{f} := \mathfrak{F}f$ определяется единственным образом функцией f, аналитическое продолжение которой в $\mathbb{C}$ принадлежит W^2_σ, причем по теореме Планшереля норма f в W^2_σ, т. е. в $L^2(\mathbb{R})$, совпадает с нормой F в $L^2[-\sigma,\sigma]$.

По теореме Хаусдорфа-Юнга преобразование Фурье функции $f\in L^p(\mathbb{R})$ принадлежит $L^q(\mathbb{R})$, если $1\leqslant p\leqslant 2$. Здесь $1/p+1/q=1$. Кроме того,

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})} \leqslant (2\pi)^{1/q-1/2}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

При $p>2$ преобразование Фурье $\hat{f}$ функции f пространства $L^p(\mathbb{R})$ может быть распределением положительного порядка. Точнее, если $p>2$ и целое число o удовлетворяет неравенству $o>1/2-1/p$, тогда $\hat{f}$ — распределение в $\mathbb{R}$ порядка $\leqslant o$ (см. [6], теорема 7.6.6).

Итак, приходим к заключению: любая функция $f\in W^p_\sigma$, $1<p<\infty$ допускает интегральное представление

$$f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}, \tag{1}$$

где $\hat{f}\in\mathcal{E}'_{[-\sigma,\sigma]}$ — преобразование Фурье f, а $\mathcal{E}'_{[-\sigma,\sigma]}$ — стандартное пространство распределений с носителями в $[-\sigma,\sigma]$. Однако, множество $\mathcal{F}[W^p_\sigma]$ (пространство преобразований Фурье функций класса Винера W^p_σ) лишь частично характеризуется пространством $\mathcal{E}'_{[-\sigma,\sigma]}$. Как показано в [3], $\mathcal{F}[W^p_\sigma]$, где $1<p<2$, — собственное подпространство $L^q[-\sigma,\sigma]$ при условии $1/p+1/q=1$.

2°. Распределения, ассоциированные с элементами $l^p(\mathbb{Z})$. Чтобы охарактеризовать пространство $\mathcal{F}[W^p_\sigma]$, $p>1$, рассмотрим банахово пространство $l^p(\mathbb{Z})$, т. е. множество всех двусторонних последовательностей $c=(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ комплексных чисел таких, что

$$\|c\|_{l^p(\mathbb{Z})} := \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^p\Big)^{1/p}<\infty.$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\sigma=\pi$, так как $f(z)\in W^p_\sigma$ в том и лишь в том случае, если $f(\pi z/\sigma)\in W^p_\pi$. Чтобы мотивировать другое определение преобразования Фурье для функций класса Винера, отличное от традиционного, понадобится

Лемма 1. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа $\leqslant\pi$ такая, что $\hat{f}=\mathcal{F}f\in L^q[-\pi,\pi]$, где $1<q<\infty$. Тогда для любой гладкой функции $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$ справедливо соотношение*

$$\langle\mathcal{F}f,\varphi\rangle := \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}f(t)\varphi(t)dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}}f(k)\hat{\varphi}(k),\ \hat{\varphi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-\imath tx}\varphi(t)dt,\ x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

◀ Из обобщенного равенства Парсеваля (см., например, [7], с. 255) получаем, используя обозначения леммы:

$$\langle\mathcal{F}f,\varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\hat{\varphi}(k) \tag{3}$$

Здесь $c := \{c_k=\sqrt{2\pi}d_{-k},\ k\in\mathbb{Z}\}$, $\{d_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ — коэффициенты Фурье функции $\hat{f}$. Для доказательства (2), остается применить формулу обращения преобразования Фурье ▶

Замечания. 1. Близкий к лемме 1 результат имеется в [8, с. 115].

2. В частности, равенства (2), (3) справедливы для $f\in W^p_\pi$ при условии $1/p+1/q=1$, $1<p<2$. В этом случае $c\in l^p(\mathbb{Z})$ (см. [3]).

Каждая последовательность $c \in l^p(\mathbb{Z}), 1 < p < \infty$ определяет линейный функционал T_c на пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$ с помощью следующей формулы (в обозначениях соотношения (3))

$$\langle T_c, \varphi\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \hat{\varphi}(k), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{4}$$

Лемма 1 означает, что преобразование Фурье (в смысле теории распределений) следа на $\mathbb{R}$ целой функции $f \in W^p_\pi$ при $1 < p < 2$ совпадает с функционалом $T_{c(f)}$, где $c(f) := \{f(k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Лемма 2. *Пусть $1 < p < \infty$. Функционал T_c, определенный формулой (3), является распределением на действительной оси с носителем на отрезке $[-\pi, \pi]$ порядка $\leqslant 1$.*[1]

◀ Учитывая, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, и интегрируя по частям, получаем

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{-\imath k\sqrt{2\pi}}\Big[(-1)^k\left(\varphi(\pi) - \varphi(-\pi)\right) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\imath kt}\varphi'(t)dx.\Big]$$

Поэтому

$$|\hat{\varphi}(k)| \leqslant [4\pi \sup\{|\varphi'(t)|,\ t \in [-\pi, \pi]\}]/(\sqrt{2\pi}|k|),\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Отсюда, из (3) и неравенства Гельдера приходим к оценке модуля функционала T_c:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}|\langle T_c, \varphi\rangle| &\leqslant |c_0|\Big(2\pi \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|\varphi(t)|\Big) + \sum_{k\neq 0}\frac{|c_k|}{|k|}\Big(4\pi \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|\varphi'(t)|\Big)\\ &\leqslant \|c\|_{l^p(\mathbb{Z})}\Big(2\pi \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|\varphi(t)| + \Big(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|^q}\Big)^{1/q} 4\pi \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|\varphi'(t)|\Big).\end{aligned}$$

Это неравенство означает, что T_c — распределение порядка $\leqslant 1$ на $\mathbb{R}$ с носителем в $[-\pi, \pi]$ ▶

3°. Аналог теоремы Пэли-Винера. Докажем аналог теоремы Винера-Пэли для класса Винера W^p_σ. В отличие от работы [3], введем в пространстве $\mathcal{F}[W^p_\sigma]$ преобразований Фурье функций этого класса другую норму. Такой подход позволил получить желаемый результат не только в одномерной ситуации при любом $p \in (1, \infty)$, но и найти его полный аналог в многомерном случае, т. е. аналог теоремы Планшереля-Пойа для W^2_σ в $\mathbb{C}^n,\ n > 1$ (см. [2]).

Обозначим символом $\mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$ пространство всех распределений вида T_c на $\mathbb{R}$, где $c \in l^p(\mathbb{Z})$, а $1 < p < \infty$ (см. (3)). Чтобы найти связь между $\mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$ и пространством $\mathcal{F}[W^p_\sigma]$, нам понадобится классическая теорема Планшереля-Пойа [8], [9, с. 152].

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$.*

1) *Для любой последовательности $\{c_k,\ \ k \in \mathbb{Z} \in l^p(\mathbb{Z})\}$ ряд*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^n c_k \frac{\sin \pi z}{\pi(z-k)}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{5}$$

сходится по норме $L^p(\mathbb{R})$ (и равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}$) к функции $f \in W^p_\pi$, являющейся единственным решением интерполяционной проблемы $f(k) = c_k,\ k \in \mathbb{Z}$.

2) *Обратно, для любой функции $f \in W^p_\pi$ последовательность*

$$c(f) := \{f(k),\ k \in \mathbb{Z}\} \tag{6}$$

принадлежит $l^p(\mathbb{Z})$.

3) *Нормы $f \mapsto \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ и $f \mapsto \|c(f)\|_{l^p(\mathbb{Z})}$, введенные в пространстве W^p_π, эквивалентны.*

---

[1] Используется терминология из [6, определение 2.1.1].

Лемма 3. *В обозначениях формул* (3), (4), (6) *справедливо соотношение* $\mathcal{F}f = T_c$*, где* $c = c(f)$*, а* $f \in W^p_\pi$*, равносильное равенству*

$$f = \mathcal{F}^{-1}T_{c(f)}. \tag{7}$$

◀ Лемма 2 утверждает, что $T_c \in \mathcal{E}'_{[-\pi,\pi]}$, поэтому обратное преобразование Фурье функционала T_c — элемент $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. В действительности, это целая функция экспоненциального типа $\leqslant \pi$, определяемая формулой

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}T_c &= \frac{1}{2\pi}\langle T_c, e^{\imath z\xi}\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath(z-k)\xi}d\xi \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(z-k)\xi\,d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(-1)^k\frac{\sin\pi z}{\pi(z-k)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 1 вытекает (7) ▶

Теорема 2. *При* $p > 1$ *преобразование Фурье определяет топологический изоморфизм пространств* W^p_π *и* $\mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$.

◀ Из теоремы 1 следует, что если $f \in W^p_\pi$, тогда последовательность $c(f)$ (см. (6)) принадлежит $l^p(\mathbb{Z})$, а функция f допускает представление (5). Отсюда и леммы 3 вытекает, что $\mathcal{F}f = T_{c(f)}$ — элемент $\mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$, т.е. преобразование Фурье отображает W^p_π в $\mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$. Поскольку $W^p_\pi \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$,[1] это отображение инъективно. Остается доказать, что оно сюръективно. Зафиксируем отображение $T_c \in \mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$, где $c \in l^p(\mathbb{Z})$. Определим f формулой (5), тогда по теореме 1 $f \in W^p_\pi$ и $c(f) = c$ (см. (6)). Из (7) имеем $\mathcal{F}f = T_c$, следовательно, имеет место алгебраический изоморфизм пространства W^p_π на $\mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$.

По теореме 1 можно ввести две эквивалентные нормы в W^p_π, где $p > 1$, одна из которых определяется вложением в $L^p(\mathbb{R})$, а другая индуцируется из $l^p(\mathbb{Z})$. Они превращают W^p_π в банахово пространство. Благодаря алгебраическому изоморфизму $f \mapsto \mathcal{F}f = T_{c(f)}$ это равносильно утверждению о топологическом изоморфизме пространств W^p_π и $\mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$ ▶

Теорема 2 близка к теореме Пэли-Винера-Шварца (см. [6], теорема 7.3.1) и ее обобщениям [10].

4°. **Контрпример.** Если $1 < p \leqslant 2$, то распределения $\mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$ — функции класса $L^q[-\pi,\pi]$ при условии $1/p + 1/q = 1$, причем при $1 < p < 2$ они не исчерпывают пространство $L^q[-\pi,\pi]$ (см. [3]). При $p > 2$ распределения $\mathcal{E}'^p_{[-\pi,\pi]}$ могут быть не функциями и даже не мерами, заданными на $[-\pi,\pi]$. Покажем, что оценка сверху на порядок распределения T_c, данная в лемме 2, является точной, если $p > 2$.

Воспользуемся следующей известной теоремой (см., например, теорему 6.4 на с. 326 в [7]).

Теорема 3. *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(n_k t) + b_k\sin(n_k t), \quad t \in [-\pi,\pi],$$

— лакунарный тригонометрический ряд, где $n_{k+1}/n_k \geqslant q > 1$*. Если он суммируем каким-либо линейным методом суммирования* [2] *на множестве положительной меры, тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < \infty$.

---

[1] $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ — пространство распределений медленного роста.

[2] Например, методом Абеля-Пуассона [7, с.135].

Рассмотрим целую функцию

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sin \pi z)/[\pi \sqrt{k}(z - 2^k)], \quad z \in \mathbb{C}.$$

По теореме 3 $f \in W_\pi^p$ для каждого $p > 2$. Ряд Фурье преобразования Фурье $\hat{f}$ функции f, заданный на $[-\pi, \pi]$, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left(\cos(2^k t) - \imath \sin(2^k t) \right), \tag{8}$$

как легко увидеть. Теорема 3 показывает, что этот ряд не может быть суммируем методом Абеля-Пуассона почти нигде на $[-\pi, \pi]$. Но ряд Фурье меры, заданной на $[-\pi, \pi]$, суммируем этим методом почти везде (см., например, [11, с. 52]). Поэтому ряд (5) не может быть рядом Фурье любой меры.

Итак, последовательность $c(f)$ принадлежит всем пространствам $l^p(\mathbb{Z})$ при $p > 2$. Однако, распределение $T_{c(f)}$ не является мерой.[1] Наконец, из леммы 2 заключаем, что порядок $T_{c(f)}$ равен 1.

5°. Многомерные обобщения. Пусть $\sigma_j > 0$, $j = 1, ..., n$; $W_\sigma^p = \{f\}$ — пространство целых функций экспоненциального типа, удовлетворяющих для любого $\varepsilon > 0$ неравенству

$$|f(z)| \leqslant C_f(\varepsilon) \exp\{\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon)|z_j|\} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^n \tag{9}$$

и таких, что $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p < \infty$. Методом индукции, применяя теорему 1 по каждой переменной, получим ее полный аналог для класса W_σ^p в $\mathbb{C}^n$ (см. [8]). Многомерные варианты других изложенных результатов также справедливы. Опускаем их очевидные формулировки и доказательства.

3. Оптимальное восстановление с конечного множества в классе Винера W_σ^p, $1 < p < \infty$

1°. Схема оптимального восстановления. Теорема 3 будет применена в дальнейшем для получения характеристик наилучшего аналитического продолжения с конечного множества целых функций из W_σ^p при $p > 2$. Это задача восстановления функционалов типа дельта-функций. Известна схема оптимального восстановления линейного функционала (см., например, [12]-[14]). Учитывая специфику случая, когда информационное пространство конечномерно, рассмотрим модификацию этой схемы, использованную в [3] для оптимальной экстраполяции в W_σ^p при $1 < p \leqslant 2$.

Пусть V — векторное пространство; $T : V \to B$ — алгебраический изоморфизм пространства V в банахово пространство B, причем и V, и B рассматриваются над одним и тем же полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Определим норму в V, полагая $\|f\|_V := \|Tf\|_B$ для $f \in V$, превращая таким образом V тоже в нормированное пространство. Легко проверить, что $\|L\|_{V'} = \|L \circ T^{-1}\|_{B'}$ для каждого непрерывного линейного функционала L на V. Здесь B' — сопряженное пространство по отношению к пространству B, причем оно является банаховым в стандартной топологии, определяемой нормой функционала. Пусть $U = \{f \in V : \|f\|_V \leqslant R\}$; $L_1, \dots, L_N$ — линейно независимые линейные функционалы, заданные на U. Рассмотрим проблему восстановления любого фиксированного линейного функционала L на U исходя из информации о $L_1, \dots, L_N$.

[1] Этот пример — небольшая модификация примера, рассмотренного в [8, с. 142-143].

Напомним основные характеристики оптимального восстановления. Любое отображение вида $A : U \to \mathbb{C}$ называется *алгоритмом.* Ограничимся линейными алгоритмами, т. е. алгоритмами A вида

$$A(f) = \ell(a; L_1, \ldots, L_N) := \sum_{k=1}^{N} a_k L_k(f), \quad f \in U, \quad a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{K}^N. \tag{10}$$

Величина

$$E(a; L, U) = \sup\{|L(f) - A(f)|, \ f \in U\}$$

называется *ошибкой алгоритма* A. Величина

$$\Omega(L, U) = \inf\{E(a; L, U), \ a \in \mathbb{K}^N\}^1$$

называется *оптимальной (неустранимой) ошибкой восстановления* функционала L. Если $\Omega(L, U) = E(\alpha; L, U)$ при некотором $a = \alpha \in \mathbb{K}^N$, тогда алгоритм

$$A_0 = \ell(\alpha; L_1, \ldots, L_N) \tag{11}$$

(см. (10)) называется *оптимальным линейным алгоритмом восстановления* функционала L. Элемент $f_0 \in U$ называется *экстремальным,* если верно равенство

$$E(\alpha; L, U) = |L(f_0) - A_0(f_0)|.$$

Нам понадобится фундаментальный результат теории аппроксимации в нормированных пространствах (см., например, [15], с. 17–20),

Лемма 4. *Пусть $\{e_1, \ldots, e_N\}$ — линейно независимая система в B'. Тогда для каждого элемента $v \in B'$ существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ в $\mathbb{K}^N$, такой, что*

$$\Big\| v - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \Big\| = \inf_{a \in \mathbb{K}^N} \Big\| v - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \Big\|.$$

Если, кроме того B' — строго выпуклое пространство,[2] *тогда существует только один вектор $\alpha \in \mathbb{K}^N$ с упомянутым свойством.*

Элемент $\ell(\alpha; e_1, \ldots, e_N) = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k$ называют *наименее отклоняющимся* от v элементом линейной оболочки множества $\{e_1, \ldots, e_N\}$, или *многочленом Чебышева.* Для простоты будем обозначать его $\ell(\alpha)$, если понятно, о каком элементе идет речь.

Пусть $\mathcal{L}_0 \in B'$ — ненулевой функционал. Рассмотрим множество

$$\partial \|\mathcal{L}_0\|_{B'} = \{F \in B : \ \|F\|_B = 1, \, \mathcal{L}_0(F) = \|\mathcal{L}_0\|_{B'}\},$$

которое имеет простой геометрический смысл. А именно это грань замкнутого единичного шара S в B, расположенная в его опорной гиперплоскости $\{F \in B : \ \mathcal{L}_0(F) = \|\mathcal{L}_0\|_{B'}\}$. Множество $\partial \|\mathcal{L}_0\|_{B'}$ может быть пустым. Это невозможно, если, например, шар $S \subset B$ — компакт в слабой топологии. В частности, это имеет место, если B — рефлексивное банахово пространство (см., например, [16, с. 241]. В этом случае множество $\partial \|\mathcal{L}_0\|_{B'}$ называют субдифференциалом нормы $\mathcal{L} \mapsto \|\mathcal{L}\|_{B'}$ в $\mathcal{L}_0$ [17]. Пусть G — группа элементов в $\mathbb{K}$, модуль каждого из которых равен 1 в $\mathbb{K}$. В общем случае совокупность всех экстремальных элементов определяет множество

$$G \, \partial \|\mathcal{L}_0\|_{B'} = \{\lambda F \in B : \quad \lambda \in G, \ F \in \partial \|\mathcal{L}_0\|_{B'}\}$$

для некоторого функционала $\mathcal{L}_0$, зависящего от A_0.

---

[1]Более общее определение см. в § 4, 2°

[2]Иногда такое пространство называют строго нормированным.

Теорема 4. *Пусть в предыдущих обозначениях*

$$\ell(\alpha) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, L_k \circ T^{-1} \tag{12}$$

— наименее отклоняющийся от $L \circ T^{-1}$ *элемент линейной оболочки множества* $\{L_1 \circ T^{-1}, \dots, L_N \circ T^{-1}\}$. *Тогда*

1) *оптимальная ошибка* $\Omega(L,U)$ *восстановления функционала* L *с помощью информации о функционалах* $L_1, \dots, L_N$, *заданных на* U, *равна*

$$\Omega(L,U) = R \, \| L \circ T^{-1} - \ell(\alpha) \|_{B'}; \tag{13}$$

2) *оптимальный линейный алгоритм восстановления функционала* L *на* U *определяется формулой* $A_0 = \ell(\alpha; L_1, \dots, L_N)$ (см. (11)), *причем он является единственным при условии строгой выпуклости пространства* B';

3) *если* $\mathcal{L}_0 = L \circ T^{-1} - \ell(\alpha)$ *— ненулевой функционал и* $\partial \, \|\mathcal{L}_0\|_{B'} \neq \varnothing$, *тогда* $\{RT^{-1}F_0 : \; F_0 \in G \, \partial \|\mathcal{L}_0\|_{B'}\}$ *— множество всех экстремальных элементов.*

◀ Зафиксируем $a \in \mathbb{K}^N$. Рассмотрим разность

$$\Delta_a(f) = L(f) - \sum_{k=1}^{N} a_k L_k(f), \quad f \in V.$$

Используя формулу $f = RT^{-1}F$, где $F = T(f/R) \in B$, и определение нормы непрерывного линейного функционала, выводим

$$E(a; L, U) = \sup_{f \in U} |\Delta_a(f)| = R \sup_{\|F\|_B \leqslant 1} \left| \Delta_a \circ T^{-1}(F) \right| = R \, \left\| \Delta_a \circ T^{-1} \right\|_{B'},$$

учитывая, что $f \in U$ в том и лишь в том случае, если $\|T(f/R)\|_B \leqslant 1$.

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \Omega(L,U) &= R \inf_{a \in \mathbb{K}^N} \| L \circ T^{-1} - \ell(a; L_1 \circ T^{-1}, \dots, L_N \circ T^{-1}) \|_{B'} \\ &= R \, \| L \circ T^{-1} - \ell(\alpha; L_1 \circ T^{-1}, \dots, L_N \circ T^{-1}) \|_{B'}, \end{aligned} \tag{14}$$

поскольку нижняя грань достигается при некотором $\alpha \in \mathbb{K}^N$ по лемме 4. Кроме того, из этой леммы заключаем, что оптимальный линейный алгоритм A_0 единственный, если B' — строго выпуклое пространство.

Из (14) выводим: оптимальная ошибка $\Omega(L,U)$ равна 0 тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_0 = L \circ T^{-1} - \ell(\alpha)$ — нулевой функционал. Тогда $L = \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_N L_N$ — искомый элемент V'. В этом случае коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ однозначно определяются функционалом L, так как $L_1, \dots, L_N$ — система линейно независимых элементов V'.

Итак, утверждения 1) и 2) теоремы верны. Остается рассмотреть случай, когда $\mathcal{L}_0$ — ненулевой функционал. Если $\partial \|\mathcal{L}_0\|_{B'} \neq \varnothing$, тогда из определения субдифференциала нормы получаем: $\Omega(L,U) = R \, \|\mathcal{L}_0\|_{B'} = |\mathcal{L}_0(RF)|$ для всех $F \in G \, \partial \|\mathcal{L}_0\|_{B'}$. Символом $\mathcal{E}$ обозначим множество всех элементов $f \in U$ таких, что $f = RT^{-1}F$ для некоторого элемента $F \in G \, \partial \|\mathcal{L}_0\|_{B'}$. Тогда $\Omega(L,U) = |L(f) - A_0 \circ I(f)|, \quad f \in \mathcal{E}$, т. е. $\mathcal{E}$ — множество всех экстремальных элементов, принадлежащих U. Поэтому утверждение 3) теоремы доказано ▶

2°. Пример реализации схемы оптимального восстановления. Теорема 4 выполняет роль схемы, которой можно придерживаться для нахождения характеристик оптимального восстановления линейного функционалов. При этом возникают трудности, связанные как с вычислением коэффициентов многочлена Чебышева, наименее отклоняющегося от искомого линейного функционала, так и с описанием общего вида таких функционалов, а также с выяснением структуры субдифференциала рассматриваемой нормы.

Для широкого класса пространств целых функций, содержащих, в частности, класс Винера W^p_σ, где $1 < p < 2$, эти трудности в значительной степени преодолеваются, как показывает следующий пример.

Пусть $B = B_q = L^q[-\sigma, \sigma]$, где $1 < q < \infty$ и $\sigma > 0$. Отождествим B_q с подпространством пространства $L^q(\mathbb{R})$, состоящего из всех функций с носителем в $[-\sigma, \sigma]$. Символом $V = V_q$ обозначим векторное пространство распределений медленного роста на $\mathbb{R}$, преобразование Фурье каждого из которых принадлежит V_q. Оно эквивалентно пространству всех целых функций $\{f\}$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ таких, что

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} F(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{15}$$

где F — произвольно фиксированный элемент $L^q[-\sigma, \sigma]$. Заметим, что здесь

$$F(t) = \hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx, \quad t \in [-\sigma, \sigma] \tag{16}$$

— преобразование Фурье функции $f|_{\mathbb{R}}$. Поэтому преобразование Фурье $T = \mathcal{F}$ следа $f|_{\mathbb{R}}$ на $\mathbb{R}$ каждой функции $f \in V_q$ определяет алгебраический изоморфизм V_q на B_q. Введем топологию в пространстве V_q с помощью нормы $\|f\|_V := \|\tilde{f}\|_B$, где $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции $f|_{\mathbb{R}}$. Тогда V_q становится банаховым пространством. По теореме Хаусдорфа-Юнга пространство V_q содержит W^p_σ при условии $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < 2$. Топология в W^p_σ, индуцированная нормой пространства V_q, слабее топологии, индуцированной вложением W^p_σ в $L^p(\mathbb{R})$. И наоборот, из теоремы Хаусдорфа-Юнга выводим: $W^p_\sigma \supset V_q$, если $2 < p < \infty$.

Обратимся к задаче наилучшего аналитического продолжения (или оптимальной экстраполяции) функций $f \in U$, где $U = \{f \in V_q : \|f\| \leqslant R\}$, с конечного множества $S = \{z_1, \ldots, z_N\} \subset \mathbb{C}$ в точку $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S$. В данном случае линейные функционалы являются дельтаобразными:

$$L_k(f) = f(z_k), \; f \in U, \; k = 0, 1, ..., N; \tag{17}$$

Учитывая, что пространства $\{L^q(\mathbb{R}), \; 1 < q < \infty\}$ являются строго выпуклыми (см. [15]), применяя теорему 4, в обозначениях которой $L = L_0$, и опираясь на план доказательства теоремы 5 из [3], убеждаемся в том, что все ее утверждения верны и для рассматриваемого пространства V_q при любом $q \in (1, \infty)$. А именно справедлива

Теорема 5. *Пусть $q \in (1, \infty)$. Пусть в упомянутых обозначениях*

$$P_N(t; \alpha) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{iz_k t}, \quad t \in [-\sigma, \sigma] \tag{18}$$

— элемент линейной оболочки множества $\{e^{iz_j t}, \; j = 1, ..., N\}$, наименее отклоняющийся от $e^{iz_0 t}$ в метрике $L^p(-\sigma, \sigma)$ при условии $1/p + 1/q = 1$. Тогда

1) *оптимальная ошибка экстраполяции любой функции $f \in U$ в точку z_0 равна* (см. (13), (17), (18))

$$\Omega_N(z_0) := \Omega(L_0, U) = \frac{R}{\sqrt{2\pi}} ||e^{iz_0 t} - P_N(t; \alpha)||_p,$$

где $\| \cdot \|_p$ — стандартная норма в $L^p(-\sigma, \sigma)$;

2) *существует единственный оптимальный линейный алгоритм аналитического продолжения в точку z_0 с множества S, определяемый в обозначениях формул* (12), (17) *равенством*

$$\omega(f) := [\ell(\alpha)](f) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(z_j), \quad f \in U; \tag{19}$$

3) *любая экстремальная функция* $\{f_0\} \subset U$ *, т. е. функция, удовлетворяющая условию* $\Omega_N(z_0) = |f_0(z_0) - w(f_0)|$ (см. (19), (15), (16)), *обладает следующим свойством: ее преобразование Фурье* $\hat{f}_0 \in L^q(-\sigma, \sigma)$ *имеет вид*

$$\hat{f}_0(t) = \frac{Re^{i\theta}|h(t)|^{p-1}}{\exp\{i \arg h(t)\}||h||_p^{p-1}}, \quad t \in [-\sigma, \sigma],\ \theta \in \mathbb{R},\ h(t) = \frac{e^{iz_0t} - P_N(t; \alpha)}{\sqrt{2\pi}}.$$

3°. Вариант теоремы 4 для класса Винера W^p_σ, $1 < p < \infty$. Применим схему, изложенную в теореме 4, к проблеме оптимальной экстраполяции с конечного множества в классе Винера W^p_σ, $1 < p < \infty$. Как оказывается, существенно легче (см. [3]) решить эту задачу, если ввести топологию в этом пространстве с помощью нормы $f \mapsto \|c(f)\|_{l^p(\mathbb{Z})}$, эквивалентной стандартной норме в W^p_σ (см. доказательство теоремы 2). При этом удается получить желаемый результат не только в одномерной ситуации при любом $p \in (1, \infty)$, но и найти его полный аналог в многомерном случае (см. (9), [4]). Учитывая рассуждения в § 2, 2°, 5°, для простоты изложения ограничимся рассмотрением пространства W^p_σ в одномерном случае и при $\sigma = \pi$.

Возьмем конечное множество $S = \{z_1, \ldots, z_N\}$ попарно различных точек в $\mathbb{C}$ и точку $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S$. Используя терминологию п. 7°, рассмотрим проблему наилучшего аналитического продолжения функции $f \in W^p_\pi$ с множества S в точку z_0. Такая задача эквивалентна вопросу об оптимальном восстановлении функционала $L_0(f) = f(z_0)$, $f \in W^p_\pi$, опираясь на информацию о функционалах $\{L_k(f) = f(z_k), f \in W^p_\pi;\ k = 1, ..., N\}$ (ср. (17)).

Для дальнейшего изложения понадобится известное утверждение функционального анализа (см., например, [16]).

Лемма 5. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Линейный непрерывный функционал* L *на пространстве* $l^p(\mathbb{Z})$ *имеет вид*

$$L(c) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_n,\ c \in l^p(\mathbb{Z}),$$

где $\delta = \{\delta_n,\ n \in\ \mathbb{Z}\} \in l^q(\mathbb{Z})$ *и* $1/p + 1/q = 1$. *Кроме того, справедливо неравенство*

$$|L(c)| \leqslant \|\delta\|_{l^q(\mathbb{Z})} \cdot \|c\|_{l^p(\mathbb{Z})} \quad \forall\ c \in l^p(\mathbb{Z}),$$

причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда

$$c_n = \lambda e^{-\imath \arg \delta_n} \Big(\frac{|\delta_n|}{\|\delta\|_{l^q(\mathbb{Z})}}\Big)^{q-1} \quad \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1.$$

Заметим, что лемма позволяет найти субдифференциал нормы $\| \cdot \|_{l^q(\mathbb{Z})}$ в точке δ. Следующий результат обобщает теорему 5.

Теорема 6. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Полагаем*

$$s_n(z) = (-1)^n \frac{\sin \pi z}{\pi(z - n)},\ n \in \mathbb{Z}; \quad s(z_k) = \{s_n(z_k),\ n \in \mathbb{Z}\},\ k = 0, 1, ..., N; \tag{20}$$

$$\ell(\alpha) = \{\ell_n(\alpha),\ n \in \mathbb{Z}\} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, s(z_k)$$

— *последовательность, наименее отклоняющаяся от последовательности* $s(z_0)$ *в метрике* $l^q(\mathbb{Z})$, *где* $1/p + 1/q = 1$ (см. лемму 3 и замечание к ней). *Для* $U = \{f \in W^p_\pi : \|c(f)\|_{l^p(\mathbb{Z})} \leqslant R\}$ *при* $R > 0$ *следующие утверждения справедливы в обозначениях теоремы 5:*

1) *неустранимая ошибка* $\Omega_N(z_0)$ *оптимальной экстраполяции любой функции* $f \in U$ *с конечного множества* $S = \{z_1, \ldots, z_N\}$ *в точку* z_0 *равна*

$$\Omega_N(z_0) = R\,\|s(z_0) - \ell(\alpha)\|_{l^q(\mathbb{Z})};$$

2) *существует единственный оптимальный линейный алгоритм аналитического продолжения функции* $f \in U$ *с множества* S *в точку* z_0, *определяемый соотношением* $\omega(f) = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k f(z_k)$;

3) *любая экстремальная функция* $f_0 \in U$ *обладает свойством: ее значения в узлах целочисленной решетки определяются формулой*

$$f_0(n) = \lambda e^{-\imath \arg \delta_n} \Big(\frac{|\delta_n|}{\|\delta\|_{l^q(\mathbb{Z})}} \Big)^{q-1}, \quad n \in \mathbb{Z},\ \delta_n = s_n(z_0) - \ell_n(\alpha),\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = R.$$

◀ Рассмотрим линейный оператор (см. (6)) $T : W_\pi^p \to l^p(\mathbb{Z}),\ \ Tf = c(f)$. По теоремам 1, 2 он определяет топологический изоморфизм. Поэтому выбор нормы $f \mapsto \|c(f)\|_{l^p(\mathbb{Z})}$ в пространстве W_π^p означает переход от стандартной топологии в W_π^p к эквивалентной. Представление (5) для любой функции $f \in U$ позволяет описать общий вид рассматриваемых линейных функционалов:

$$L_k(f) = f(z_k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n s_n(z_k),\ f \in U; \quad k = 0, 1, ..., N.$$

В самом деле, из формулы (5) с помощью неравенства Гельдера получаем оценку

$$|f(z)| \leqslant \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s_n(z)|^q \Big)^{1/q} \cdot \|c(f)\|_{l^p(\mathbb{Z})}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда и из леммы 5 вытекает, что упомянутые функционалы являются непрерывными. Итак, все условия теоремы 4 выполняются. Из нее непосредственно убеждаемся в справедливости утверждений 1) и 2) теоремы 6, учитывая, что пространства $\{l^q(\mathbb{Z}),\ 1 < q < \infty\}$ являются строго выпуклыми (см. [15]). Утверждение 3) следует из утверждения 3) теоремы 3 и леммы 5 ▶

4. Конструктивное построение оптимальных линейных алгоритмов и многочленов Чебышева

Теорема 6 (так же, как и теорема 4) утверждает лишь о существовании оптимального линейного алгоритма при экстраполяции с конечного множества в W_π^p. Исключение составляет случай $p = 2$, как показывает теорема 1 в [4], дающая достаточно простые алгебраические формулы всех характеристик наилучшего аналитического продолжения функций класса Винера W_σ^2. Покажем, что подобные формулы верны для определенного класса подмножеств $\{U\}$ линейного пространства V над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, в частности, среди оптимальных алгоритмов существует *конструктивно* определяемый линейный алгоритм

$$A_0 = \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_N L_N\ . \tag{21}$$

Здесь $\{L_1, \ldots, L_N\}$ — линейно независимая система линейных функционалов на V.

1°. Некоторые алгебраические свойства линейных функционалов $\{L_1, \ldots, L_N\}$**.** Полагаем

$$Z := \ker L_1 \cap \ldots \cap \ker L_N. \tag{22}$$

Это линейное подпространство коразмерности N в V, обладающее алгебраическим дополнением S таким, что $V = S \oplus Z$ (см., например, [18], с. 16–17).

Нам понадобится следующий элементарный факт линейной алгебры.

Лемма 6. *Пусть* $\{f_1, \ldots, f_N\}$ — *базис в* S. *Матрица Грама*

$$G = \begin{pmatrix} L_1(f_1) & \ldots & L_N(f_1) \\ & \ldots & \\ L_1(f_N) & \ldots & L_N(f_N) \end{pmatrix}$$

обратима, т.е. определитель матрицы G отличен от 0.

Следующие формулы позволяют сделать разложение $V = C \oplus Z$ явным. Они известны в случае гильбертова пространства [19, с.228].

Лемма 7. *Пусть $\{f_1, \dots, f_N\}$ — базис в S. Тогда в обозначениях леммы 6 любой элемент $f \in V$ допускает единственное представление в виде*

$$f = \frac{-1}{\det G} \det \begin{pmatrix} 0 & L_1(f) & \dots & L_N(f) \\ f_1 & & & \\ \dots & & G & \\ f_N & & & \end{pmatrix} + \pi_Z(f), \tag{23}$$

где $\pi_Z(f) \in Z$, причем справедливо равенство

$$\pi_Z(f) = \frac{1}{\det G} \det \begin{pmatrix} f & L_1(f) & \dots & L_N(f) \\ f_1 & & & \\ \dots & & G & \\ f_N & & & \end{pmatrix} \quad \forall\, f \in V. \tag{24}$$

◀ В самом деле, существует единственный набор постоянных $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{K}$ и элемент $\pi_Z(f) \in Z$, такой, что $f = c_1 f_1 + \ldots + c_N f_N + \pi_Z(f)$. Применяя функционалы $L_1, \dots, L_N$ к этому равенству, получаем линейную систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $c_1, \dots, c_N$. Точнее,

$$L_j(f) = c_1 L_j(f_1) + \ldots + c_N L_j(f_N), \quad j = 1, ..., N$$

Решая эту систему по правилу Крамера и используя теорему разложения для определителей, находим (23). Отсюда легко выводим соотношение (24) ▶

2°. Конструкция оптимальных линейных алгоритмов. По аналогии с работами [12]-[13], [4] рассмотрим теперь другой подход к проблеме оптимального восстановления линейного функционала L на подмножестве $U \subset V$ по информации о $L_1, \dots, L_N$. Символом $\mathcal{A}$ обозначим множество всех алгоритмов $A : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$, восстанавливающих L на U с помощью $L_1, \dots, L_N$. Ошибка $E(A; L, U)$ алгоритма A — супремум функционала $|L(f) - A \circ I(f)|$ для всех $f \in U$, где

$$I(f) = (L_1(f), \dots, L_N(f)).$$

Величина

$$\Omega(L, U) = \inf\{E(A; L, U),\ A \in \mathcal{A}\}$$

— оптимальная ошибка восстановления функционала L. Как известно [13], этот показатель совпадает с подобной характеристикой оптимального восстановления, рассмотренной, в частности, в §3, 1°, для случая U — выпуклое и *круговое* множество, т. е. обладающее свойством: для любого $f \in U$ элемент $\lambda f \in U$ для всех $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$. Эта величины не требуют введения топологии в пространстве V. Такая операция необходима при применении методов функционального анализа.

Для упомянутой проблемы восстановления фиксированного линейного функционала L на U двойственной является задача вычисления величины (см. (22)) $\sup\{|L(f)|,\ f \in U \cap Z\}$ при условии ограниченности L на U. Исследуем эту задачу для класса круговых множеств, инвариантных относительно отображения $\pi_Z :\ V \to Z$ (см. (22)-(24)),[1] среди оптимальных алгоритмов существует *конструктивно* определяемый линейный алгоритм (многочлен Чебышева) вида (21). При дополнительном предположении о наличии экстремального элемента подобная задача рассматривалась в [12]. Об исследованиях *существования* таких алгоритмов см. монографию [13].

[1] Т. е. $\pi_Z(f) \in U$ для всех $f \in U$.

Теорема 7. *Пусть U — круговое множество, инвариантное относительно отображения π_Z, а G — матрица Грама $(L_j(f_i))_{\substack{i=1,\dots,N\\ j=1,\dots,N}}$, рассмотренная в лемме 6. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *оптимальная ошибка $\Omega(L,U)$ восстановления линейного функционала L с помощью линейных функционалов $L_1,\dots,L_N$ определяется формулой*

$$\Omega(L,U)=\sup_{f\in U\cap Z}|L(f)|=\sup_{f\in U}|L(\pi_Z(f))|;$$

2) *линейный алгоритм $A_0=\ell(\alpha;L_1,\dots,L_N)$* (см. (21)) *такой, что*

$$A_0\circ I(f)=\frac{-1}{\det G}\ \det\begin{pmatrix} 0 & L_1(f) & \dots & L_N(f)\\ L(f_1) & & & \\ \dots & & G & \\ L(f_N) & & & \end{pmatrix}, \tag{25}$$

является оптимальным, причем справедливо неравенство

$$|L(f)-A_0\circ I(f)|\leqslant\Omega(L,U)\quad\forall\ f\in U.$$

◀ 1. Сначала докажем, что

$$M:=\sup_{f\in U\cap Z}|L(f)|=\inf_{c\in\mathbb{K}}\sup_{f\in U\cap Z}|L(f)-c|. \tag{26}$$

Обозначим символом B правую часть этого равенства. Очевидно $B\leqslant M$. Для доказательства обратного неравенства зафиксируем $f\in U\cap Z$ такое, что $L(f)\neq 0$, и число $c\in\mathbb{K}$, отличное от 0. Так как $L_1,\dots,L_N$ — линейные функционалы, то множество $U\cap Z$ тоже является круговым. Отсюда следует, что элемент

$$f_c=-f\ \exp\imath(\arg c-\arg L(f))$$

принадлежит $U\cap Z$. После элементарных преобразований получаем

$$|L(f)-c|\leqslant|L(f)|+|c|=|L(f_c)-c|.$$

Отсюда выводим соотношение

$$\sup\{|L(f)-c|,\ f\in U\cap Z\}=\sup\{|L(f)|+|c|,\ f\in U\cap Z\}.$$

Поэтому $M\leqslant B$, т. е. формула (26) верна.

2. Если $A:\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}$ — алгоритм, восстанавливающий L на U по информации о $L_1,\dots,L_N$, тогда

$$|L(f)-A\circ I(f)|=|L(f)-A(L_1(f),\dots,L_N(f))|=|L(f)-A(0,\dots,0)|$$

для всех $f\in U\cap Z$. Отсюда и из (26) имеем

$$\Omega(L,U)\geqslant\inf_{A\in\mathcal{A}}\sup_{f\in U\cap Z}|L(f)-A(0,\dots,0)|=\inf_{c\in\mathbb{K}}\sup_{f\in U\cap Z}|L(f)-c|=\sup_{f\in U\cap Z}|L(f)|,$$

где $\Omega(L,U)$ — оптимальная ошибка восстановления (см. § 3, 1°). Здесь первое равенство объясняется тем, что для любого заданного $c\in\mathbb{K}$ среди всех элементов множества $\mathcal{A}$ существует алгоритм A такой, что $A(0,\dots,0)=c$.

3. Докажем теперь обратное неравенство. Пусть $\mathcal{A}_0$ — множество всех линейных алгоритмов вида $A=\ell(a;L_1,\dots,L_N)$ (см. (21)), где $a\in\mathbb{K}^N$. Оценим отклонение функционала L от произвольно фиксированного линейного алгоритма $A\in\mathcal{A}_0$. Представляя любой элемент $f\in U$ в виде (см. (22), (24))

$$f=c_1f_1+\ldots+c_Nf_N+\pi_Z(f),$$

находим

$$\Big|L(f) - \sum_{k=1}^{N} a_k L_k(f)\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{N} c_j \Big(L(f_j) - \sum_{k=1}^{N} a_k L_k(f_j)\Big) + L(\pi_Z(f))\Big|,$$

поскольку $L_k(\pi_Z(f)) = 0$ при любом $k = 1, \ldots, N$. Отсюда находим:

$$\Big|L(f) - \sum_{k=1}^{N} a_k L_k(f)\Big| \leqslant \Big|\sum_{j=1}^{N} c_j \Big(L(f_j) - \sum_{k=1}^{N} a_k L_k(f_j)\Big)\Big| + |L(\pi_Z(f))|, \ f \in U. \qquad (27)$$

Для нахождения оптимального линейного алгоритма, выберем $a_1, \ldots, a_N$ так, чтобы исключить влияние элемента $f - \pi_Z(f) \in S$ на оценку "остаточного" функционала в (27). А именно определим $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{K}^N$ из системы уравнений

$$L(f_j) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k L_k(f_j) = 0, \quad j = 1, 2, ..., N. \qquad (28)$$

По лемме 6 эта система имеет единственное решение $\alpha \in \mathbb{K}^N$. Этому элементу соответствует линейный алгоритм (см. (21)) $A_0 = \ell(\alpha; L_1, \ldots, L_N)$. Теперь непосредственно из (27) и (28) выводим

$$\Omega(L, U) \leqslant \inf_{A \in \mathcal{A}_0} \sup_{f \in U} |L(f) - A \circ I(f)| \leqslant E(A_0; L, U)$$

$$= \sup_{f \in U} |L(f) - A_0 \circ I(f)| \leqslant \sup_{f \in U} |L(\pi_Z(f))| \leqslant \sup_{f \in U \cap Z} |L(f)|, \qquad (29)$$

так как $\pi_Z(f) \in U \cap Z$ для всех $f \in U$. Обратное неравенство доказано в п. 2, поэтому утверждение 1) теоремы 7 справедливо.

4. Из неравенства в п. 2 заключаем также, что

$$\Omega(L, U) = E(A_0; L, U), \qquad (30)$$

т. е. алгоритм $A_0 = \ell(\alpha; L_1, \ldots, L_N)$ (см. (21)) является оптимальным. Его представление (см. (25)) получаем, находя из (28) вектор $\alpha \in \mathbb{K}^N$ по правилу Крамера. Наконец, искомое неравенство следует из (30) ►

Замечания. 1. Формула (25) оптимального линейного алгоритма *не зависит* от множества U с описанными свойствами.

2. Если V — гильбертово пространство и $V = S \oplus Z$ — ортогональное разложение, тогда по теореме Пифагора любой замкнутый шар с центром в нулевом элементе $\Theta \in V$ инвариантен относительно отображения π_Z. Это свойство может не выполняться, если V — банахово пространство. Однако, линейное пространство V можно наделить топологией с помощью эквивалентной нормы, в которой любой замкнутый шар с центром в Θ является π_Z-инвариантным. Для этого норму любого элемента $f = s + z \in V = S \oplus Z$ можно определить так: $||f||_V = \|s\|_V + \|z\|_V$. Эта норма эквивалентна исходной по теореме Банаха об открытом отображении. Поэтому требование инвариантности множества U относительно отображения π_Z в теореме 7 не является слишком ограничительным в этом случае.

Пример. Пусть $V = W^p_\pi$, $1 < p < \infty$. Полагаем в обозначениях теоремы 6 $L_k(f) = f(z_k)$, $f \in W^p_\pi$, $k = 0, 1, ..., N$. Пусть $Z := \ker L_1 \cap \ldots \cap \ker L_N$, S — его алгебраическое дополнение такое, что $V = S \oplus Z$. Множество

$$f_k(t) = \frac{\sin \pi(\overline{z_k} - t)}{\pi(\overline{z_k} - t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau(\overline{z_k} - t)} d\tau, \quad t \in \mathbb{C}; \ k = 1, ..., N \qquad (31)$$

— линейно независимая система элементов в W^p_π при любом $p \in (1, \infty)$, поскольку таковой является конечная система экспонент с различными показателями. Непосредственная проверка показывает, что $L_k(f_k) \neq 0$, $k = 1, ..., N$, поэтому $F = \{f_k, \ k = 1, ..., N\} \subset S$. Отсюда, учитывая, что S — линейное подпространство размерности N в V, заключаем, что система F — базис в S. Для множества U, удовлетворяющего условиям теоремы 7, формула (25) позволяет найти оптимальный линейный алгоритм.

3°. Конструкция многочленов Чебышева. Для определенного класса случаев можно конструктивно построить многочлены Чебышева (в терминологии §3, 1°) тогда, когда связанные друг с другом оптимальный линейный алгоритм и многочлен Чебышева являются *единственными*. Из теоремы 7 вытекает следующее дополнение к теореме 4.

Теорема 8. *Пусть в обозначениях теорем* 4 *и* 7 $T : V \to B$ *— алгебраический изоморфизм векторного пространства* V *в нормированное пространство* B*, причем и* V*, и* B *рассматриваются над одним и тем же полем* $\mathbb{K}$*, где* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$*. Кроме того, полагаем* S *— алгебраическое дополнение множества* Z (см. (22)) *в разложении* $V = S \oplus Z$*;* $\{f_1, \dots, f_N\}$ *— базис в* S*, а шар* $U = \{f \in V : \ \|f\|_V \leqslant R\}$ *— множество, инвариантное относительно отображения* π_Z (см. (23), (24))*. Если сопряженное пространство* B' *является строго выпуклым, то существует единственный оптимальный линейный алгоритм* A_0 *вида* (21)*, определяемый формулой* (25)*, а* $A_0 \circ T^{-1}$ *— единственный многочлен Чебышева.*

Теорема 8 дает критерий нахождения конструктивных формул оптимального линейного алгоритма и многочлена Чебышева, в частности, для пространств V_q, W^p_π, $1 < p < \infty$ (см. теоремы 5, 6). В первом случае базисом является, например, система функций (31), а во втором — система двусторонних интерполяционных последовательностей $c(f_k)$, $k = 1, ..., N$ тех же функций (см. (6)).

Авторы искренне признательны П. Кусису, поддержавшему одну из целей этой статьи – для пространства $W^p_\sigma, p \neq 2$ найти полный аналог теоремы Пэли-Винера, В.П. Хавину, В.Л. Левину – за конструктивные замечания, связанные с некоторыми ее результатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винер Н., Пэли Р. *Преобразование Фурье в комплексной области.* Наука. М. 1964. 268 с.
2. M/ Plancherel, G. Pólya *Fonctions entiéres et intégrales de Fourier multiples I* // Commentarii mathematici Helvetici. V. 9. 1937. P. 224–248.
3. L.S. Maergoiz *An Analogue of the Paley-Wiener Theorem for Entire Functions of Class* $W^p_\sigma, 1 < p < 2$ *and Some Applications* // Computational Methods and Function Theory. V. 6, № 2. 2006. P. 459–469.
4. Маергойз Л.С. *Оптимальная ошибка экстраполяции с конечного множества в классе Винера* // Сиб. мат. журн. Т. 41, № 6. 2000. С. 1363–1375.
5. L. Maergoiz, N. Tarkhanov *Recovery from a Finite Set in Banach Spaces of Entire Functions* Preprint 2006/19 ISSN 1437-739X. Institut für Mathematik Uni Potsdam. 2006. 16 p.
6. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, I.* Мир. М. 1986. 464 с.
7. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды, I.* Мир. М. 1965. 616 с.
8. M. Plancherel, G. Pólya *Fonctions entiéres et intégrales de Fourier multiples, II* // Commentarii mathematici Helvetici. V. 10. 1938. P. 110–163.
9. B.Ya. Levin. *Lectures on Entire Functions.* Translation of mathematical monographs. V. 150. AMS, Providence, R.I. 1996. 248 p.
10. Абанин А.В., Налбандян Ю.С., Шабаршина И.С. *Продолжение бесконечно дифференцируемых функций до целых функций с заданными оценками роста и теоремы типа Пэли-Винера-Шварца* // Владикавказский мат. журн. Т. 6, № 2. 2004. С. 3–9.
11. Привалов А.А. *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, М.-Л. 1950. 336 с.
12. C.A. Micchelli, T.J. Rivlin *Lectures on optimal recovery* // Lect. Notes Math. V. 1129. 1985. P. 21–93.
13. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. *Выпуклый анализ и его приложения* Эдиториал УРСС. Москва. 2000. 176 с. [G. G. Magaril-Il'yaev, V.M. Tikhomirov *Convex analysis: Theory*

and Applications Translations of Mathematical Monographs. V. 222. AMS. Providence. R.I. 2003. 184 p.]
14. K.Yu. Osipenko *Optimal Recovery of Analytic Functions.* Nova Science Publishers. Inc. Huntington. New York. 2000. 185 p.
15. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* Наука. М. 1965. 408 с.
16. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* Наука. М. 1977. 744 с.
17. R.R. Phelps *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability.* Lecture Notes in Mathematics. V. 1364. Springer-Verlag. New York-Berlin. 1988. 121 p.
18. Дэй М.М. *Нормированные линейные пространства.* ИИЛ. М. 1961. 235 с.
19. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* Наука. М. 1966. 576 с.

Лев Сергеевич Маергойз,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 82
660036, г. Красноярск, Россия
E-mail: bear.lion@mail.ru

Николай Николаевич Тарханов,
Institute for Mathematics University of Potsdam,
Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam, Germany
E-mail: tarkhanov@math.uni-potsdam.de