ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 1 (2011). С. 103-112.

УДК 517.968

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С НЕКОМПАКТНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

Х.А. ХАЧАТРЯН

Аннотация. В настоящей заметке исследуется вопрос разрешимости в пространстве Соболева $W_\infty^N(0,+\infty)$ одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений N-го порядка с некомпактным интегральным оператором типа Гаммерштейна на полуоси. Доказывается существование положительного решения в пространстве $W_\infty^N(0,+\infty)$ и вычисляется предел этого решения в бесконечности. Полученные результаты обобщаются для более общих нелинейных уравнений с суммарно-разностными ядрами.

Ключевые слова: Факторизация, многочлен, предел итераций, пространство Соболева.

1. Постановка задачи и введение

В настоящей работе рассматривается следующий класс нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^N f}{dx^N}+\sum_{j=1}^{N} a_j \frac{d^{N-j} f}{dx^{N-j}}+\lambda(x)\int\limits_0^\infty K(x-t)G(f(t))dt=0, \quad x\in\mathbb{R}^+,\ N\geq 2 \tag{1}$$

относительно искомой вещественной функции $f(x)$, где $a_j (j=1,2,3,\dots,N)$ вещественные коэффициенты, причем

$$a_N<0, \tag{2}$$

а соответствующий многочлен $P(x)\equiv x^N+\sum\limits_{j=1}^N a_j x^{N-j}$ имеет только действительные корни.

В (1) $\lambda(x)$ и $K(x)$ — измеримые функции на множествах $(0,+\infty)$ и $(-\infty,+\infty)$, соответственно, причем

$$\begin{aligned} a)\quad &\lambda(x)\uparrow \text{ по } x \text{ на } (0,+\infty),\quad 0\leqslant\lambda(x)\leqslant 1,\quad x\in(0,+\infty),\\ &1-\lambda\in L_1(0,+\infty),\quad \lambda\in W_\infty^N(0,+\infty)\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} b)\quad &K(x)\geq 0,\quad x\in(-\infty,+\infty),\quad a_N+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\tau)d\tau=0,\\ &K\in C(\mathbb{R}),\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tau|K(\tau)d\tau<+\infty.\end{aligned} \tag{4}$$

Kh.A. Khachatryan, On solvability of one class high-order nonlinear integro-differential equations with Hammerstein type noncompact integral operator.

Поступила 03 сентября 2010 г.

$G(x)$ — определенная на $(-\infty,+\infty)$ измеримая функция, причем предполагается, что существует число $\eta>0$, такое, что

$$c) \qquad \begin{array}{l} G\in C[0,\eta], \quad G\uparrow \text{ по } x \text{ на отрезке } [0,\eta], \\ G(x)\geq x, \quad x\in[0,\eta], \quad G(\eta)=\eta. \end{array} \tag{5}$$

Искомое решение уравнения (1) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$f(0)=0, \quad f\in W_\infty^N(0,+\infty)=\{\varphi(x):\varphi^{(k)}\in L_\infty(0,+\infty), \quad k=0,1,\ldots,N\}, \tag{6}$$

где через $\varphi^{(k)}$ — обозначена k-тая производная функции $\varphi(x)$.

Первые результаты исследования нелинейных интегральных уравнений с компактными операторами Урысона и Гаммерштейна были получены в работах М.А.Красносельского и его учеников ([1-5]). В этих работах даны различные необходимые и достаточные условия, обеспечивающие полную непрерывность операторов Урысона и Гаммерштейна. В работах ([6-8]) были доказаны теоремы существования решения в предположении полной непрерывности соответствующего нелинейного интегрального оператора.

В том частном случае, когда $G(x)\equiv x, \quad \lambda(x)\equiv 1, \quad N=2$, уравнение (1) ранее было исследовано в работе [9]. Сравнительно недавно автором настоящей работы доказаны структуральные теоремы существования в том случае, когда $N=2$, $\lambda(x)\equiv 1$, а $G(x)$ удовлетворяет условиям (5) (см. [10]).

В настоящей работе с использованием методов классической теории функций вещественной переменной, с помощью некоторых результатов из теории линейных интегральных уравнений типа свертки, удается доказать существование нетривиального решения задачи (1),(6) и описать его структуру. Более того, вычисляется предел построенного решения в бесконечности. Полученные результаты обобщаются для следующего класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^Nf}{dx^N}+\sum_{j=1}^N a_j\frac{d^{N-j}f}{dx^{N-j}}+\lambda(x)\int_0^\infty K(x-t)G(f(t))dt+\int_0^\infty \mathring{K}(x+t)G_0(f(t))dt=0, \ N\geq 2, \tag{7}$$

где

$$0\leqslant \mathring{K}\in L_1(0,+\infty) \text{ и } \int_x^\infty \mathring{K}(\tau)d\tau\leqslant\int_x^\infty K(\tau)d\tau, \quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{8}$$

а G_0 — определенная на $(-\infty,+\infty)$ измеримая функция, причем

$$\begin{array}{c} G_0\in C[0,\eta], \quad G_0(x)\geq 0, \quad x\in[0,\eta], \quad G_0\uparrow \text{ по } x \text{ на } [0,\eta] \\ G_0(\eta)=\eta. \end{array} \tag{8'}$$

2. Задача факторизации. Сведение к основному нелинейному интегральному уравнению

Введем следующий класс нелинейных интегральных операторов: $\mathcal{K}_G\in\Omega$, если существует измеримая функция $K^*(x,t), \quad ((x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$, такая, что

$$\begin{array}{c} (\mathcal{K}_Gf)(x)=\displaystyle\int_0^\infty K^*(x,t)G(f(t))dt, \quad f\in L_\infty(\mathbb{R}^+), \\ G:L_\infty(\mathbb{R}^+)\to L_\infty(\mathbb{R}^+), \end{array} \tag{9}$$

причем ядро $K^*(x,t)\geq 0$ — удовлетворяет следующим оценкам: существуют функции $0\leqslant K\in L_1(\mathbb{R}), \quad 0\leqslant\lambda(x)\leqslant 1$, такие, что

$$K^*(x,t)\geq\lambda(x)K(x-t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+. \tag{9'}$$

$$\sup_{x>0}\int_0^\infty K^*(x,t)dt < +\infty. \tag{9''}$$

Из условий (9), (9'') следует, что $\mathcal{K}_G : L_\infty(\mathbb{R}^+) \to L_\infty(\mathbb{R}^+)$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (n \in N)$ — положительные корни многочлена $P(x)$. Из условия (2), с учетом теоремы Виета, следует, что n — нечетное число. Обозначим через $-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_m$ — отрицательные корни $P(x) \quad (m+n=N)$.

Введем дифференциальный оператор

$$P(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + a_2 D^{N-2} + \ldots + a_{N-1}D + a_N I,$$

действующий из пространства $W_\infty^N(0,+\infty)$ в $L_\infty(0,+\infty)$, где D — оператор дифференцирования, а I — единичный оператор.

Из выше сказанного следует,что

$$P(D) = (D-\alpha_1 I)(D-\alpha_2 I)\ldots(D-\alpha_n I)(D+\beta_1 I)(D+\beta_2 I)\ldots(D+\beta_m I). \tag{10}$$

Обозначим через $\mathcal{J}_{\alpha_j} \quad (j=1,2,\dots,n)$ обратные операторы операторов $(\alpha_j I - D)$ в пространстве $W_\infty^1(0,+\infty)$.

Тогда легко можно убедиться, что

$$(\mathcal{J}_{\alpha_j} f)(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha_j(t-x)} f(t)dt, \quad f \in L_\infty(\mathbb{R}^+), \qquad j=1,2,\dots,n. \tag{11}$$

Справедлива

Лемма 1. *Если $\mathcal{K}_G \in \Omega$ и $\lambda(x) \uparrow$ по x, то $\mathcal{J}_{\alpha_j}\mathcal{K}_G \in \Omega, \quad j=1,2,\dots,n$.*

Доказательство. Пусть $f \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$ — произвольная функция. Тогда будем иметь:

$$(J_{\alpha_j}\mathcal{K}_G f)(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha_j(t-x)} \int_0^\infty K^*(t,\tau)G(f(\tau))d\tau dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty e^{-\alpha_j(t-x)} K^*(t,\tau)dt\right) G(f(\tau))dt = \int_0^\infty T^*(x,\tau)G(f(\tau))d\tau,$$

где $T^*(x,\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha_j z} K^*(x+z,\tau)dz$.

Заметим также, что $\int\limits_0^\infty T^*(x,\tau)d\tau \leqslant \frac{1}{\alpha_j}\sup\limits_{x>0}\int\limits_0^\infty K^*(x,\tau)d\tau < +\infty$. С использованием оценки (9') и монотонность функции λ получим:

$$T^*(x,\tau) \geq \int_0^\infty e^{-\alpha_j z}\lambda(x+z)K(x+z-\tau)dz \geq \lambda(x)\int_0^\infty e^{-\alpha_j z}K(x+z-\tau)dz \equiv \lambda(x)T(x-\tau),$$

причем $T \in L_1(\mathbb{R})$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} T(x)dx \leqslant \frac{1}{\alpha_j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx$. Лемма доказана.

Уравнение (1) запишем в операторной форме

$$(P(D) + \mathcal{K}_G)f = 0, \tag{12}$$

где

$$(\mathcal{K}_G f)(x) = \lambda(x) \int\limits_0^\infty K(x-t)G(f(t))dt,$$

а функции λ, K и G удовлетворяют условиям $a), b), c)$.

Рассмотрим следующую задачу факторизации: для заданных операторов $P(D)$ и $\mathcal{K}_G \in \Omega$ найти такой интегральный оператор $T_G \in \Omega$, чтобы

$$P(D) + \mathcal{K}_G = \prod_{j=1}^{n}(D-\alpha_j I)\left(\prod_{j=1}^{m}(D+\beta_j I) - T_G\right). \tag{13}$$

Для решения этой задачи сначала рассмотрим произведение операторов $\mathcal{J}_{\alpha_1}$ и $\mathcal{K}_G : T_{1,G} \equiv \mathcal{J}_{\alpha_1}\mathcal{K}_G$.

Имеем

$$\begin{gathered}(T_{1,G}f)(x) = \int\limits_x^\infty e^{-\alpha_1(t-x)}\lambda(t) \int\limits_0^\infty K(t-\tau)G(f(\tau))d\tau dt = \\ = \int\limits_0^\infty G(f(\tau)) \int\limits_0^\infty e^{-\alpha_1 z_1}K(x+z_1-\tau)\lambda(z_1+x)dz_1 d\tau = \int\limits_0^\infty T_1(x,\tau)G(f(\tau))d\tau, \text{ где}\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}T_1(x,\tau) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-\alpha_1 z_1}K(x+z_1-\tau)\lambda(x+z_1)dz_1 \geq \\ \geq \lambda(x)\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_1 z_1}K(x+z_1-\tau)dz_1 \equiv \lambda(x)T_1^*(x-\tau),\end{gathered} \tag{15}$$

$$T_1^*(x) = \int\limits_0^\infty K(x+z_1)e^{-\alpha_1 z_1}dz_1. \tag{16}$$

Из леммы 1 следует также, что $T_{2,G} \equiv \mathcal{J}_{\alpha_2}\mathcal{K}_G \in \Omega$. Построим его ядро также:

$$(T_{2,G}f)(x) = \int\limits_x^\infty e^{-\alpha_2(t-x)} \int\limits_0^\infty T_1(t,\tau)G(f(\tau))d\tau dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty G(f(\tau)) \int\limits_x^\infty e^{-\alpha_2(t-x)}T_1(t,\tau)dt d\tau = \int\limits_0^\infty T_2(x,\tau)G(f(\tau))d\tau, \text{ где}$$

$$T_2(x,\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha_2 z_2}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_1 z_1}K(x+z_1+z_2-\tau)\lambda(x+z_1+z_2)dz_1 dz_2 \geq \lambda(x)T_2^*(x-\tau),$$

где

$$T_2^*(x) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha_2 z_2}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_1 z_1}K(x+z_1+z_2)dz_1 dz_2.$$

Индукцией по n нетрудно убедиться, что $T_{n,G} \equiv \mathcal{J}_{\alpha_n}T_{n-1,G} = \prod\limits_{j=1}^{n}\mathcal{J}_{\alpha_j}\mathcal{K}_G \in \Omega$ и задается посредством следующих формул:

$$(T_{n,G}f)(x)=\int\limits_0^\infty T_n(x,\tau)G(f(\tau))d\tau,\quad f\in M(\mathbb{R}^+),$$

$$\begin{gathered}T_n(x,\tau)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_n z_n}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_{n-1}z_{n-1}}\int\limits_0^\infty\ldots\\ \ldots\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_1 z_1}K(x+z_1+\ldots+z_n-\tau)\lambda(x+z_1+\ldots+z_n)dz_1\ldots dz_n\geq\\ \geq\lambda(x)T_n^*(x-\tau),\end{gathered}\tag{17}$$

где

$$T_n^*(x)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_n z_n}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_{n-1}z_{n-1}}\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty e^{-\alpha_1 z_1}K(x+z_1+\ldots+z_n)dz_1\ldots dz_n\tag{18}$$

Следовательно, так как n — нечетное число, то в качестве оператора T_G можно взять: $T_G\equiv T_{n,G}$. Таким образом установлена следующая

Лемма 2. *Пусть функции* λ, K *и* G *удовлетворяют условиям* $a), b), c)$ *и* $G:L_\infty(\mathbb{R}^+)\to L_\infty(\mathbb{R}^+)$. *Тогда оператор* $P(D)+\mathcal{K}_G$ *допускает факторизацию* (13), *где* $T_G\equiv T_{n,G}\in\Omega$ *задается согласно формуле* (17).

С учетом факторизации (13) решение задачи (1),(6) равносильно последовательному решению следующих связанных уравнений:

$$\prod_{j=1}^n(D-\alpha_jI)\varphi=0,\tag{19}$$

$$\left(\prod_{j=1}^m(D+\beta_jI)-T_G\right)f=\varphi.\tag{20}$$

Рассмотрим уравнение (19):

$$(D-\alpha_1I)(D-\alpha_2I)\ldots(D-\alpha_nI)\varphi=0.\tag{21}$$

Так как $f\in W_\infty^N(0,+\infty)$, то $\varphi\in W_\infty^n(0,+\infty)$. Следовательно нетрудно заметить, что $\varphi(x)\equiv 0$. Таким образом, решение задачи (1), (6) сводится к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\prod_{j=1}^m(D+\beta_jI)f-\int\limits_0^\infty T_n(x,\tau)G(f(\tau))d\tau=0,\tag{22}$$

с граничными условиями

$$f(0)=0,\quad f\in W_\infty^N(0,+\infty).\tag{23}$$

Обозначим через

$$F(x)\equiv(D+\beta_mI)(D+\beta_{m-1}I)\ldots(D+\beta_1I)f(x).$$

Тогда, с учетом (23) нетрудно убедиться, что

$$F\in W_\infty^n(0,+\infty)$$

и

$$f(x)=\int\limits_0^x e^{-\beta_1(x-\tau_1)}\int\limits_0^{\tau_1}e^{-\beta_2(\tau_1-\tau_2)}\ldots\int\limits_0^{\tau_{m-1}}e^{-\beta_m(\tau_{m-1}-\tau_m)}F(\tau_m)d\tau_m\ldots d\tau_1.\tag{24}$$

Следовательно уравнение (22) примет вид:

$$F(x)=\int\limits_0^\infty T_n(x,\tau)G\Big(\int\limits_0^\tau e^{-\beta_1(\tau-\tau_1)}\int\limits_0^{\tau_1} e^{-\beta_2(\tau_1-\tau_2)}\dots \cdot\int\limits_0^{\tau_{m-1}} e^{-\beta_m(\tau_{m-1}-\tau_m)}F(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}\dots d\tau_1\Big)d\tau,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{25}$$

В следующем параграфе мы займемся вопросами разрешимости уравнения (25). Вычислим также предел функции $F(x)$ на бесконечности.

3. Решение уравнения (25)

Рассмотрим следующие итерации:

$$F_{(p+1)}(x)=\int\limits_0^\infty T_n(x,\tau)G\Big(\int\limits_0^\tau e^{-\beta_1(\tau-\tau_1)}\int\limits_0^{\tau_1} e^{-\beta_2(\tau_1-\tau_2)}\dots \cdot\int\limits_0^{\tau_{m-1}} e^{-\beta_m(\tau_{m-1}-\tau_m)}F_{(p)}(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}\dots d\tau_1\Big)d\tau,$$
$$F_{(0)}(x)=\prod_{j=1}^m\beta_j\eta,\quad p=0,1,2,\dots,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{26}$$

Индукцией по p сначала убедимся, что

$$F_{(p)}(x)\downarrow \text{ по } p \tag{27}$$

В случае $p=1$ имеем:

$$F_{(1)}(x)=\int\limits_0^\infty T_n(x,\tau)G\left(\int\limits_0^\tau e^{-\beta_1(\tau-\tau_1)}\int\limits_0^{\tau_1} e^{-\beta_2(\tau_1-\tau_2)}\dots\int\limits_0^{\tau_{m-1}} e^{-\beta_m(\tau_{m-1}-\tau_m)}\eta\prod_{j=1}^m\beta_j d\tau_m d\tau_{m-1}\dots d\tau_1\right)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^\infty T_n(x,\tau)G\left(\prod_{j=1}^{m-1}\beta_j\int\limits_0^\tau e^{-\beta_1(\tau-\tau_1)}\int\limits_0^{\tau_1} e^{-\beta_2(\tau_1-\tau_2)}\dots\int\limits_0^{\tau_{m-2}} e^{-\beta_{m-1}(\tau_{m-2}-\tau_{m-1})}\eta d\tau_{m-1}d\tau_{m-2}\dots d\tau_1\right)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^\infty T_n(x,\tau)G(\eta)d\tau=\eta\int\limits_0^\infty T_n(x,\tau)d\tau\leqslant\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}T_n^*(z)dz=-\frac{a_N\eta}{\prod\limits_{j=1}^n\alpha_j}\equiv æ \tag{28}$$

Из теоремы Виетта сразу следует, что

$$(-1)^{N-m}\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\beta_1\beta_2\dots\beta_m=a_N<0,$$

или

$$\prod_{j=1}^n\alpha_j\prod_{j=1}^m\beta_j=-a_N,$$

следовательно,

$$æ\equiv\eta\prod_{j=1}^m\beta_j\equiv F_{(0)}(x),\ \text{т.е. } F_{(1)}(x)\leqslant F_{(0)}(x).$$

Далее предполагая, что

$$F_{(p)}(x)\leqslant F_{(p-1)}(x)$$

и используя свойства функции G, получим

$$F_{(p+1)}(x) \leqslant F_{(p)}(x).$$

Таким образом (27) доказано.

Теперь, наряду с уравнением (25), рассмотрим следующее линейное интегральное уравнение:

$$\begin{gathered} S(x) = \lambda(x) \int\limits_0^\infty T_n^*(x-\tau) \int\limits_0^\tau e^{-\beta_1(\tau-\tau_1)} \int\limits_0^{\tau_1} e^{-\beta_2(\tau_1-\tau_2)} \ldots \\ \ldots \int\limits_0^{\tau_{m-1}} e^{-\beta_m(\tau_{m-1}-\tau_m)} S(\tau_m) d\tau_m d\tau_{m-1} \ldots d\tau_1 d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{29}$$

Это уравнение легко сводится к следующему интегральному уравнению:

$$S(x) = \lambda(x) \int\limits_0^\infty W_m(x-\tau_m) S(\tau_m) d\tau_m, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{30}$$

где

$$0 \leqslant W_m \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_m(\tau) d\tau = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^m \beta_j} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T_n^*(z) dz = 1 \tag{31}$$

(см. цепочку неравенств (28)).

Вид ядер $W_j(x)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ получается с использованием теоремы Фубини с помощью следующих рекурентных соотношений:

$$\begin{gathered} W_j(x) = \int\limits_0^\infty W_{j-1}(x-z_j) e^{-\beta_j z_j} dz_j, \; j = 2, 3, \ldots, m, \\ W_1(x) = \int\limits_0^\infty T_n^*(x-z_1) e^{-\beta_1 z_1} dz_1. \end{gathered} \tag{32}$$

Предположим, что

$$\nu(W_m) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau W_m(\tau) d\tau < 0. \tag{33}$$

Абсолютная сходимость последнего интеграла следует из (4) и теоремы Фубини.

Из результатов работ [11, 12] следует, что при выполнении условий (31) и (33), уравнение (30) имеет монотонно возрастающее нетривиальное ограниченное решение $0 \leqslant S(x)$. Обозначим через

$$S^*(x) = \frac{\prod\limits_{j=1}^m \beta_j \eta S(x)}{c}, \quad c = \sup_{x>0} S(x). \tag{34}$$

Ниже по индукции докажем, что последовательность $\{F_{(p)}(x)\}_0^\infty$ снизу удовлетворяет следующей оценке:

$$F_{(p)}(x) \geq S^*(x), \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{35}$$

В случае $p = 0$ — это очевидно, ибо

$$F_{(0)}(x) = \eta \prod_{j=1}^m \beta_j = \sup_{x>0} S^*(x) \geq S^*(x) \geq 0. \tag{36}$$

Предположим, что
$$F_{(p-1)}(x)\geq S^*(x).$$
Тогда из (26), с учетом (29), (30), (34), (5), (17) будем иметь:
$$F_{(p)}(x)\geq\int\limits_0^\infty T_n(x,\tau)G\Bigg(\int\limits_0^\tau e^{-\beta_1(\tau-\tau_1)}\int\limits_0^{\tau_1}e^{-\beta_2(\tau_1-\tau_2)}\dots$$
$$\dots\int\limits_0^{\tau_{m-1}}e^{-\beta_m(\tau_{m-1}-\tau_m)}S^*(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}\dots d\tau_1\Bigg)d\tau\geq$$
$$\geq\lambda(x)\int\limits_0^\infty T_n^*(x-\tau)\int\limits_0^\tau e^{-\beta_1(\tau-\tau_1)}\int\limits_0^{\tau_1}e^{-\beta_2(\tau_1-\tau_2)}\dots\int\limits_0^{\tau_{m-1}}e^{-\beta_m(\tau_{m-1}-\tau_m)}S^*(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}\dots d\tau_1 d\tau=$$
$$=\lambda(x)\int\limits_0^\infty W_m(x-\tau_m)S^*(\tau_m)d\tau_m=S^*(x).$$
Итак, из (27) и (35) следует, что последовательность функций $\{F_{(p)}(x)\}_0^\infty$ имеет точечный предел:
$$\lim_{p\to\infty}F_{(p)}(x)\equiv F(x),$$
а из теоремы Б.Леви (см.[13]) следует, что этот предел удовлетворяет уравнению (25). Теперь докажем, что $F\in W_\infty^n(0,+\infty)$. Действительно, поскольку $h_j(x,\tau)=\frac{\partial^j T_n(x,\tau)}{\partial x^j}$, $(j=1,2,\dots,n)$ — непрерывная на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ и суммируемая функция при каждом фиксированном $\tau\in(0,+\infty)$, причем интегралы
$$\int\limits_0^\infty h_j(x,\tau)G\Bigg(\int\limits_0^\tau e^{-\beta_1(\tau-\tau_1)}\int\limits_0^{\tau_1}e^{-\beta_2(\tau_1-\tau_2)}\dots$$
$$\dots\int\limits_0^{\tau_{m-1}}e^{-\beta_m(\tau_{m-1}-\tau_m)}F(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}\dots d\tau_1\Bigg)d\tau,\quad j=1,2,\dots,n$$
равномерно сходятся, а $F\in M(\mathbb{R}^+)$, то с учетом теоремы о дифференцировании под знаком интеграла (см.[14]), из (25) следует, что $\dfrac{d^jF}{dx^j}\in M(0,+\infty)$, $j=0,1,2,\dots,n$, т.е. $F\in W_\infty^n(0,+\infty)$.

С другой стороны, так как $S^*(x)\uparrow\eta\prod\limits_{j=1}^m\beta_j$ (см. (34) и работу [12]), то из следующего неравенства $S^*(x)\leqslant F(x)\leqslant\eta\prod\limits_{j=1}^m\beta_j$ сразу следует, что $\exists\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\eta\prod\limits_{j=1}^m\beta_j$.

Из (24), с учетом известных операций свертки (см.[15]), следует существование предела
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\eta.$$
Так как $F\in W_\infty^n(0,+\infty)$, то из (24) следует, что $f\in W_\infty^N(0,+\infty)$.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. *Пусть многочлен $P(x)$ имеет лишь действительные корни и $a_N<0$. Тогда, при условии (3)-(5) и $\nu(W_m)<0$, задача (1), (6) имеет ненулевое, неотрицательное решение с пределом η в бесконечности.*

Аналогичными рассуждениями можно убедиться в достоверности следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы1. Тогда, если функции K_0 и G_0 удовлетворяют условиями* (8) *и* (8′), *то задача* (7), (6) *имеет ненулевое, неотрицательное решение с пределом:* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \eta$.

4. Примеры функций G и G_0

Ниже приведем несколько примеров функции G :
a) $G(x) = x^\alpha, \quad \eta = 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x \in \mathbb{R}^+,$
b) $G(x) = x + \sin x, \quad \eta = \pi, \quad x \in \mathbb{R}^+,$
c) $G(x) = \sqrt{xe^{x-1}}, \quad \eta = 1, \quad x \in \mathbb{R}^+.$
d) $G(x) = x + sin^2 x,\ x \in \mathbb{R}^+,\ \eta = \pi k,\ k = 1, 2, 3, \ldots.$

Докажем, что $G(x) = \sqrt{xe^{x-1}}$ удовлетворяет всем требованием теоремы1. Действительно,

$$G(0) = 0, \quad G(1) = 1, \quad G(x) \uparrow \text{ по } x, \text{ ибо}$$

$$G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{xe^{x-1}}}(e^{x-1} + xe^{x-1}) > 0, \quad x > 0.$$

С другой стороны,

$$e^{x-1} \geq x, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

следовательно,

$$G(x) \geq x.$$

Поскольку условия, накладываемые на функцию G_0, более слабые по сравнению с условиями на G, то в качестве G_0 можно взять функцию G. Однако мы приведем также несколько примеров G_0 :
d) $G_0(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq 1, \quad \alpha > 0, \quad \eta = 1,$
e) $G_0 = \eta \sin x, \quad \eta = \dfrac{\pi}{2},$
f) $G_0(x) = \eta \ln(x + 1), \quad \eta = e - 1.$

Замечание . *В линейном случае, когда* $G(x) \equiv x$, *в качестве числа* η *можно выбрать любое положительное число, а из теоремы 1 следует , что в этом случае (в силу линейности) получаем однопараметрическое семейство положительных решений* $f_\eta(x)$, $(\eta \in (0, +\infty))$ *с пределом* η *из пространства Соболева* $W^N_\infty(0, +\infty)$, $(N \geq 2)$. *Если же* η *однозначно не определяется из условия, накладываемого на функцию* G *(например, если* $G(x) = x + \sin^2 x$, *то* $\eta = \pi k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$), *то в этом уже нелинейном случае мы также получаем однопараметрическое семейство неотрицательных ненулевых решений, причем предел каждой функции* $f_k(x)$ *из этого семейства равен числу* $\pi k\, (k = 1, 2, 3, \ldots)$ *соответственно, когда* $x \to +\infty$.

В конце работы выражаю благодарность рецензенту за полезные замечания, а также проф. Н.Б.Енгибаряну за обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А., Любарский Г.А. *О переходных решениях нелинейных уравнений* // Изв. Вузов, Математика, КГУ. № 4. 1962. С. 81–85.
2. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* Москва. 1966. 500 с.
3. Красносельский М.А.*Положительные решения операторных уравнений.* Москва. Изд. физ.мат.лит. 1962. 394 с.
4. Забрейко П.П. *О непрерывности нелинейного оператора* // Сибирский. мат. журнал. Т. 5, № 4. 1964. С. 958–960.

5. Забрейко П.П. *О непрерывности и полной непрерывности операторов П.С. Урысона* // Доклады АН СССР. Т. 161, № 5. 1965. С. 1007–1010.
6. J. Banas *Integhrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations* // J.Austral. Math. Soc. (A). V. 46. 1989. P. 61–68.
7. H. Brezis, F.E. Browder *Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type* // Bull. Amer. Math. Soc. V. 81, № 1. 1975. P. 73–78.
8. G. Emmanuele *An existense theorem for Hammershtein integral equations. Portugal Mathem* // V. 51, № 4. 1994. P. 607–611.
9. Хачатрян Х.А. *Некоторые достаточные условия для разрешимости одного класса векторных интегродифференциальных уравнений типа свертки на полупрямой* // Известия НАН Армении, Математика. Т. 4, № 5. 2008. С. 57–72.
10. Хачатрян Х.А. *Построение нетривиального решения одной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений* // Известия НАН Армении, математика. Т. 45, № 2. 2010. С. 67–76.
11. Арабаджян Л.Г. *Об одном интегральном уравнении переноса в неоднородной среде* // Дифф. уравнения. Т. 23, № 9. 1987. С. 1618–1622.
12. Хачатрян Х.А. *Разрешимость одного класса интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с монотонной нелинейностью на полуоси* // Известия РАН, сер. математическая. Т. 74, № 5. 2010. С. 191–204.
13. Колмогоров А.Н., Фомин В.С. *Элементы теории функций и функционального анализа.* "Наука Москва. 1981.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* "Наука Москва. 1977.
15. Геворкян Г.Г., Енгибарян Н.Б. *Новые теоремы для интегрального уравнения восстановления* // Известия НАН Армении, математика. Т. 32. № 1. 1997. С. 5–20.

Хачатур Агавардович Хачатрян,
Институт математики НАН Армении,
пр. Баграмяна 24^b ,
0019, г. Ереван, Армения
E-mail: Khach82@rambler.ru