ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 1 (2011). С. 94-102.

УДК 517.53

О РОСТЕ МАКСИМУМА МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РОСТА ЕЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНДЕКСА

П.В. ФИЛЕВИЧ

Аннотация. Пусть h — положительная непрерывная на $(0,+\infty)$ функция, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция, а $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n : n\ge 0\}$ и $\nu_f(r) = \max\{n \ge 0 : |a_n|r^n = \mu_f(r)\}$ — максимум модуля, максимальный член и центральный индекс функции f соответственно. Получены необходимые и достаточные условия на рост $\nu_f(r)$, при которых $M_f(r)=O(\mu_f(r)h(\ln\mu_f(r)))$, $r\to+\infty$.

Ключевые слова: целая функция, максимум модуля, максимальный член, центральный индекс, порядок, нижний порядок.

1. Введение

Пусть I — класс непрерывных справа, неубывающих, неограниченных сверху на $(0,+\infty)$ функций, L — подкласс непрерывных на $(0,+\infty)$ функций из I, а C_+ — класс непрерывных, положительных на $(0,+\infty)$ функций.

Обозначим через $\mathcal{A}$ класс трансцендентных целых функций

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

Для целой функции (1) и любого $r>0$ определим $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n : n\ge 0\}$, $\nu_f(r) = \max\{n \ge 0 : |a_n|r^n = \mu_f(r)\}$ (соответственно максимум модуля, максимальный член и центральный индекс функции f). Пусть

$$\rho_f := \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r},\qquad \lambda_f := \varliminf_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$$

— соответственно порядок и нижний порядок функции f. Для любой функции $f\in\mathcal{A}$, как известно (см., например, [1], отдел IV), $\mu_f(r)\le M_f(r)$, $\nu_f\in I$, $\nu_f(r)=r(\ln\mu_f(r))'_+$, а в определении обоих порядков $\ln M_f(r)$ можно заменить на $\ln\mu_f(r)$ или $\nu_f(r)$. Положим $\mathcal{A}(\alpha)=\{f\in\mathcal{A}:\ \nu_f(r)\sim\alpha(r),\ r\to+\infty\}$, если $\alpha\in I$.

Согласно классической теореме Бореля, для любой $f\in\mathcal{A}$ такой, что $\rho_f<+\infty$, выполняется соотношение

$$\ln M_f(r)\sim\ln\mu_f(r),\quad r\to+\infty. \tag{2}$$

Воспользовавшись формулой Коши–Адамара

$$\rho_f=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{-\ln|a_n|}$$

P.V. Filevych, On the growth of the maximum modulus of an entire function depending on the growth of its central index.

Поступила 29 ноября 2010 г.

для вычисления порядка целой функции f через коэффициенты ее степенного разложения, теорему Бореля можно переформулировать следующим образом: если $\psi \in L$, и

$$\ln x = O(\psi(x)), \quad x \to +\infty, \tag{3}$$

то для любой функции $f \in \mathcal{A}$ вида (1), такой, что

$$|a_n| \leq \exp\{-n\psi(n)\}, \quad n \geq n_0(f), \tag{4}$$

выполняется соотношение (2). Из результатов работы М. М. Шереметы [2] следует, что условие (3) в последнем утверждении является также и необходимым: если $\psi \in L$ и (3) не выполняется, то существует целая функция $f \in \mathcal{A}$ вида (1), удовлетворяющая (4), для которой соотношение (2) не имеет места. Таким образом, существуют целые функции бесконечного порядка, коэффициенты которых как угодно быстро стремятся к нулю (т. е. функции, растущие как угодно медленно), для которых (2) не выполняется.

Тем не менее, класс целых функций, для которых (2) все же имеет место, гораздо шире класса целых функций конечного порядка. Дж. Клуни [3] доказал, что для любой выпуклой на $(0, +\infty)$ относительно $\ln r$ функции $l(r)$ такой, что $\ln r = o(l(r))$, $r \to +\infty$, существует целая функция $f \in \mathcal{A}$, для которой $\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$. Следовательно, существуют целые функции f с любым наперед заданным ростом для $\ln M_f(r)$, удовлетворяющие (2). В связи с этим в [4] рассмотрена задача об нахождении более гибких условий на рост целой функции, нежели условие $\rho_f < +\infty$, гарантирующих выполнение соотношения (2).

Теорема A [4]**.** *Если для целой функции $f \in \mathcal{A}$ выполняется условие*

$$\ln \nu_f(r) = o(\ln \mu_f(r)), \quad r \to +\infty, \tag{5}$$

то для нее имеет место соотношение (2).

Отметим, что для целой функции $f \in \mathcal{A}$ конечного порядка имеем $\ln \nu_f(r) < 2\rho_f \ln r = o(\ln \mu_f(r))$, $r \to +\infty$. С другой стороны, если, например, $\nu_f(r) \sim re^r$, $r \to +\infty$, то f — бесконечного порядка, но (5), а значит и (2), выполняется, поскольку, согласно правилу Лопиталя, $\ln \mu_f(r) \sim e^r$, $r \to +\infty$.

Пусть $\alpha \in I$ и $\hat{\alpha}$ — любая фиксированная функция, для которой $\alpha(r) = r\hat{\alpha}'_+(r)$ (т. е. $\hat{\alpha}(r)$, первообразная от $\alpha(r)$ по $\ln r$). Тогда, если $\nu_f(r) \sim \alpha(r)$, $r \to +\infty$, то $\ln \mu_f(r) \sim \hat{\alpha}(r)$, $r \to +\infty$. Следующая теорема показывает, что условие (5) в теореме A является в некотором смысле неулучшаемым.

Теорема B [4]**.** *Пусть $\alpha \in L$. Если $\ln \alpha(r) \neq o(\hat{\alpha}(r))$, $r \to +\infty$, то существует целая функция $f \in \mathcal{A}(h)$, для которой соотношение* (2) *не выполняется.*

Целью настоящей работы является получение условий на рост центрального индекса целой функции, при которых для нее выполняются более общие, нежели (2) соотношения.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in I$, $h \in C_+$. Следующие утверждения равносильны:*
a) $\exists \delta \in (0, 1)$: $\alpha(r) = O(h(\delta\hat{\alpha}(r)))$, $r \to +\infty$;
b) $\exists K_0 > 0$ $\forall f \in \mathcal{A}(\alpha)$: $M_f(r) \leq K_0\mu_f(r)h(\ln \mu_f(r))$, $r \geq r_0(f)$;
c) $\forall f \in \mathcal{A}(\alpha)$: $M_f(r) = O(\mu_f(r)h(\ln \mu_f(r)))$, $r \to +\infty$.

Замечание 1. Пусть $\alpha \in I$, $l \in L$, $h \in C_+$ и $\tilde{h}(x) := \inf\{h(t) : t \geq x\}$. Неравенство

$$\alpha(r) \leq h(l(r)), \quad r \geq r_0, \tag{6}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha(r) \leq \tilde{h}(l(r)), \quad r \geq r_0. \tag{7}$$

Действительно, то, что из (7) следует (6) — очевидно, поскольку $\tilde{h}(x) \leq h(x)$. Если имеет место (6), то $h(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, а поэтому в определении $\tilde{h}$ вместо inf можно поставить min. Отсюда, а также из непрерывности и монотонности функции l, следует, что для любого $r \geq r_0$ существует $r' \geq r$ такое, что $\tilde{h}(l(r)) = h(l(r'))$. Следовательно, $\alpha(r) \leq \alpha(r') \leq h(l(r')) = \tilde{h}(l(r))$, т.е. выполняется (7).

Замечание 2. Если $\beta, \alpha \in I$ и $\beta(r) \sim \alpha(r)$, $r \to +\infty$, то, согласно правилу Лопиталя, $\hat{\beta}(r) \sim \hat{\alpha}(r)$, $r \to +\infty$. Учитывая это и замечание 1, легко показать, что утверждение a) теоремы 1 останется в силе, если в нем α заменить на β.

В следующих теоремах, которые являются следствиями теоремы 1, указаны условия выполнения обобщенного соотношения Бореля

$$\varphi(\ln M_f(r)) \sim \varphi(\ln \mu_f(r)), \quad r \to +\infty. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in I$, $\varphi \in L$, причем*

$$\varphi(x+1) \sim \varphi(x), \quad x \to +\infty. \tag{9}$$

Для того чтобы для любой целой функции $f \in \mathcal{A}(\alpha)$ имело место соотношение (8), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0,1): \quad \varphi(\delta\hat{\alpha}(r) + \ln \alpha(r)) \leq (1+\varepsilon)\varphi(\delta\hat{\alpha}(r)), \quad r \geq r_0(\varepsilon). \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in L$. Для того чтобы существовала функция $\alpha \in I$ такая, что для любой целой функции $f \in \mathcal{A}(\alpha)$ было справедливо соотношение* (8), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (9).

Замечание 3. Теорема 3 указывает на существенность условия (9) в теореме 2.

Относительно теоремы 1 отметим следующее. Во-первых, эта теорема позволяет получать необходимые и достаточные условия на рост центрального индекса $\nu_f(r)$, обеспечивающие выполнение заданного соотношения между $M_f(r)$ и $\mu_f(r)$, например, как в теореме 2. Во-вторых, при заданных условиях на рост $\nu_f(r)$ из теоремы 1 можно получать точные соотношения между $M_f(r)$ и $\mu_f(r)$ в классе всех целых функций f, удовлетворяющих этим условиям; в частности, для целых функций f таких, что $0 < \lambda_f \leq \rho_f < +\infty$, имеет место следующая

Теорема 4. *Справедливы утверждения:*

a) Для любой целой функции f, удовлетворяющей условиям $0 < \lambda_f \leq \rho_f < +\infty$, существует функция $\varepsilon \in C_+$ такая, что $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to +\infty$, и

$$M_f(r) \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{\rho_f}{\lambda_f} + \varepsilon(\ln \mu_f(r))}, \quad r \geq r_0. \tag{11}$$

b) Если $0 < \lambda \leq \rho < +\infty$, $\varepsilon \in C_+$, $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$, то существуют целая функция f и возрастающая к $+\infty$ последовательность $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ такие, что $\lambda_f = \lambda$, $\rho_f = \rho$ и

$$M_f(r_n) > \mu_f(r_n)(\ln \mu_f(r_n))^{\frac{\rho}{\lambda} + \varepsilon(\ln \mu_f(r_n))}, \quad n \geq 0. \tag{12}$$

2. Доказательство теоремы 1

Докажем, что из a) следует b). Пусть $K_1 > 0$ и $\delta \in (0,1)$ — некоторые постоянные, для которых, согласно a), $\alpha(r) \leq K_1 h(\delta\hat{\alpha}(r))$, $r \geq r_1$. Ясно, что $h(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, а поэтому при всех $x \geq 0$ определена функция $\tilde{h}(x) = \min\{h(t) : t \geq x\}$, причем (см. замечание 1) $\tilde{h} \in L$ и

$$\alpha(r) \leq K_1\tilde{h}(\delta\hat{\alpha}(r)), \quad r \geq r_1. \tag{13}$$

Пусть $f \in \mathcal{A}(\alpha)$, а $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность всех точек разрыва $\nu_f(r)$ на $(0,+\infty)$. Тогда, если $n_k = \nu_f(c_k - 0)$, то $\nu_f(r) = n_0$ при $r \in (0, c_0)$, и $\nu_f(r) = n_{k+1}$, если $r \in [c_k, c_{k+1})$ и $k \geq 0$.

Поскольку $\ln \mu_f(r) \sim \hat{\alpha}(r)$, $r \to +\infty$, то при фиксированном $\delta' \in (\delta, 1)$ из (13) имеем

$$\nu_f(r) \le K_1 \tilde{h}(\delta' \ln \mu_f(r)), \quad r \ge r_2. \tag{14}$$

Рассмотрим последовательность (d_k) такую, что $d_0 \in (0, c_0)$, $d_{k+1} \in (c_k, c_{k+1})$,

$$n_{k+1}(\ln c_k - \ln d_k) < \frac{1}{2^k}, \quad k \ge 0. \tag{15}$$

Для $r > 0$ положим $\gamma(r) = \nu_f(r)$, если $r \notin \cup_{k=0}^{\infty}(d_k, c_k)$. Если же $r \in (d_k, c_k)$ для некоторого $k \ge 0$, то пусть

$$\gamma(r) = \min\left\{K_1 \tilde{h}(\delta' \ln \mu_f(r)),\ n_{k+1} - (c_k - r)\frac{n_{k+1} - n_k}{c_k - d_k}\right\}.$$

Поскольку $\gamma(d_k + 0) = n_k = \nu_f(d_k) = \gamma(d_k)$, $\gamma(c_k - 0) = n_{k+1} = \nu_f(c_k) = \gamma(c_k)$, то $\gamma \in L$. Кроме того, из (14) следует, что

$$\nu_f(r) \le \gamma(r) \le K_1 \tilde{h}(\delta' \ln \mu_f(r)), \quad r \ge r_2. \tag{16}$$

Пусть $\hat{\gamma}(r) = \int_1^r \frac{\gamma(t)}{t} dt$, $r > 0$. Поскольку при $r \ge 1$, согласно (15),

$$0 \le \int_1^r \frac{\gamma(t)}{t} dt - \int_1^r \frac{\nu_f(t)}{t} dt \le \sum_{k=0}^{\infty} \int_{c_k}^{d_k} \frac{\gamma(t) - \nu_f(t)}{t} dt \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} (n_{k+1} - n_k)(\ln c_k - \ln d_k) \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2,$$

то

$$\hat{\gamma}(r) \sim \ln \mu_f(r), \quad r \to +\infty. \tag{17}$$

Зафиксируем любое $r \ge r_2$ такое, что $\gamma(r) > 0$, и рассмотрим функцию $\xi(x) = \gamma(r(1+x))$, $x > 0$. Ясно, что ξ является положительной функцией из класса L. Поэтому уравнение $\xi(x) = \frac{1}{x}$ имеет единственное решение $x = x(r) > 0$, причем

$$0 \le \hat{\gamma}(r(1 + x(r))) - \hat{\gamma}(r) = \int_r^{r(1+x(r))} \frac{\gamma(t)}{t} dt \le$$
$$\le \gamma(r(1 + x(r))) \ln(1 + x(r)) \le \gamma(r(1 + x(r)))x(r) = 1.$$

Следовательно, $\hat{\gamma}(r(1 + x(r))) \sim \hat{\gamma}(r)$, $r \to +\infty$. Учитывая (16), (17) и последнее соотношение, получаем

$$\gamma(r(1 + x(r))) \le K_1 \tilde{h}(\delta' \ln \mu_f(r(1 + x(r)))) \le K_1 \tilde{h}(\ln \mu_f(r)), \quad r \ge r_3. \tag{18}$$

Оценим теперь максимум модуля функции f, считая ее заданной в виде (1). Из определений $\nu_f(r)$ и $\mu_f(r)$ для любых $r > 0$ и $x > 0$ имеем

$$|a_n|(r(1 + x))^n \le |a_{\nu_f(r(1+x))}|(r(1 + x))^{\nu_f(r(1+x))} \le \mu_f(r)(1 + x)^{\nu_f(r(1+x))}.$$

Отсюда получаем, что $|a_n| r^n \le \mu_f(r)(1 + x)^{\nu_f(r(1+x))-n}$. Воспользовавшись последним неравенством с $x = x(r)$, а также (16) и (18), имеем

$$M_f(r) \le \sum_{n<\nu_f(r(1+x))} |a_n| r^n + \sum_{n\ge\nu_f(r(1+x))} |a_n| r^n \le$$
$$\le \mu_f(r)\nu_f(r(1 + x)) + \mu_f(r) \sum_{n\ge\nu_f(r(1+x))} (1 + x)^{\nu_f(r(1+x))-n} =$$
$$= \mu_f(r)\left(\nu_f(r(1 + x)) + \frac{1}{x} + 1\right) \le \mu_f(r)\left(\gamma(r(1 + x)) + \frac{1}{x} + 1\right) \le$$
$$\le 3\mu_f(r)\gamma(r(1 + x)) \le 3K_1\mu_f(r)\tilde{h}(\ln \mu_f(r)) \le 3K_1\mu_f(r)h(\ln \mu_f(r))$$

для всех $r \geq r_0$. Утверждение b) доказано.

Импликация b) $\Rightarrow$ c) очевидна.

Докажем, что из b) следует a). Для этого предположим, что a) не выполняется, т. е.

$$\forall \delta \in (0,1): \qquad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\alpha(r)}{h(\delta\hat{\alpha}(r))} = +\infty, \tag{19}$$

и докажем, что существует целая функция $f \in \mathcal{A}(\alpha)$, для которой

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{M_f(r)}{\mu_f(r)h(\ln\mu_f(r))} = +\infty. \tag{20}$$

Можем считать, не умаляя общности, что $\alpha(r) = 0$ при $r \in [0,1)$ и $\hat{\alpha}(r) = \int_0^r \frac{\alpha(t)}{t}dt$ для всех $r \geq 0$ (см. замечание 2).

Пусть $\delta_p = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$, $p \geq 0$. Из (19) при фиксированном $p \geq 0$ получаем

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{[\delta_{p+1}\alpha(r)] - [\delta_p\alpha(r)] - 2}{h(\delta_p\hat{\alpha}(r))} = +\infty,$$

а поэтому существует возрастающая к $+\infty$ последовательность (d_p) такая, что $d_0 = 1$ и для всех $p \geq 0$

$$[\delta_{p+1}\alpha(d_p)] - [\delta_p\alpha(d_p)] - 2 > ph(\delta_p\hat{\alpha}(d_p)), \qquad \ln\frac{d_{p+1}}{d_p} > \hat{\alpha}(d_p). \tag{21}$$

Заметим, что если $\gamma \in I$, то и $[\gamma] \in I$, причем $+\infty$ является единственной точкой сгущения для множества точек разрыва функции $[\gamma]$ на интервале $(0,+\infty)$.

Рассмотрим при любом $p \geq 0$ функцию

$$\eta_p(x) = \delta_p\hat{\alpha}(d_p) + \int_{d_p}^{x} \frac{[\delta_{p+1}\alpha(t)]}{t}dt + \int_{x}^{d_{p+1}} \frac{[\delta_{p+1}\alpha(t)] + 2}{t}dt, \quad x > 0. \tag{22}$$

Ясно, что функция η_p является непрерывной на $[d_p, d_{p+1}]$. Воспользовавшись вторым из неравенств (21), имеем

$$\eta_p(d_p) = \delta_p\hat{\alpha}(d_p) + \int_{d_p}^{d_{p+1}} \frac{[\delta_{p+1}\alpha(t)] + 2}{t}dt \geq \delta_p\hat{\alpha}(d_p) + \int_{d_p}^{d_{p+1}} \frac{\delta_{p+1}\alpha(t) + 1}{t}dt =$$
$$= \delta_{p+1}\hat{\alpha}(d_{p+1}) + \ln\frac{d_{p+1}}{d_p} - (\delta_{p+1} - \delta_p)\hat{\alpha}(d_p) > \delta_{p+1}\hat{\alpha}(d_{p+1}).$$

С другой стороны,

$$\eta_p(d_{p+1}) \leq \delta_p\hat{\alpha}(d_p) + \int_{d_p}^{d_{p+1}} \frac{\delta_{p+1}\alpha(t)}{t}dt =$$
$$= \delta_{p+1}\hat{\alpha}(d_{p+1}) - (\delta_{p+1} - \delta_p)\hat{\alpha}(d_p) \leq \delta_{p+1}\hat{\alpha}(d_{p+1}).$$

Следовательно, на полуинтервале $(d_p, d_{p+1}]$ существует точка x_p, для которой

$$\eta_p(x_p) = \delta_{p+1}\hat{\alpha}(d_{p+1}). \tag{23}$$

Рассмотрим функцию β такую, что $\beta(r) = 0$ при $r \in (0,1)$ и для всех $p \geq 0$

$$\beta(r) = \begin{cases} [\delta_{p+1}\alpha(r)], & d_p \leq r < x_p; \\ [\delta_{p+1}\alpha(r)] + 2, & x_p \leq r < d_{p+1}. \end{cases}$$

Из (22) и (23) получаем

$$\delta_p\hat{\alpha}(d_p) + \int_{d_p}^{d_{p+1}} \frac{\beta(t)}{t}dt = \delta_{p+1}\hat{\alpha}(d_{p+1}). \tag{24}$$

Далее воспользуемся следующей леммой.

Лемма [5]. *Пусть (n_k) — возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, а (c_k) — возрастающая к $+\infty$ положительная последовательность. Если комплексная последовательность (a_n) такова, что $a_0 = \ldots = a_{n_0-1} = 0$, $a_{n_0} \neq 0$ и для любого $k \geq 0$*

$$|a_{n_{k+1}}| = |a_{n_0}| \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{c_j^{n_{j+1}-n_j}}; \tag{25}$$

$$|a_n| = |a_{n_k}| c_k^{n_k - n}, \quad \textit{если} \quad n \in (n_k, n_{k+1}), \tag{26}$$

то степенной ряд (1) с такими коэффициентами a_n задает целую функцию, для которой $\nu_f(r) = n_0$ при $r \in (0, c_0)$ и $\nu_f(r) = n_{k+1}$ при $r \in [c_k, c_{k+1})$ и $k \geq 0$.

Пусть (c_k) — возрастающая последовательность всех точек разрыва функции β на интервале $(0, +\infty)$, а $n_k = \beta(c_k - 0)$. Тогда $\beta(r) = n_0 = 0$ при $r \in (0, c_0)$ и $\beta(r) = n_{k+1}$, если $r \in [c_k, c_{k+1})$ и $k \geq 0$. Определим положительную последовательность (a_n) следующим образом. Положим $a_0 = a_{n_0} = 1$ и найдем a_n, $n \geq 1$, исходя из равенств (25) и (26). Согласно лемме, степенной ряд (1) с такими коэффициентами a_n задает целую функцию f, для которой $\nu_f(r) = \beta(r)$, $r > 0$. Поскольку $\beta(r) \sim \alpha(r)$, $r \to +\infty$, то $f \in \mathcal{A}(\alpha)$. Покажем, что для f имеет место соотношение (20).

Так как $\ln \mu_f(0) = \ln a_0 = 0$, то $\ln \mu_f(r) = \int_0^r \frac{\nu_f(t)}{t} dt = \int_0^r \frac{\beta(t)}{t} dt$. Индукцией по p, воспользовавшись последними равенствами и (24), легко показать, что $\ln \mu_f(d_p) = \delta_p \hat{\alpha}(d_p)$, $p \geq 0$. Поэтому, согласно первому из неравенств (21),

$$\begin{gathered} \beta(d_{p+1}) - \beta(d_{p+1} - 0) \geq [\delta_{p+2}\alpha(d_{p+1})] - [\delta_{p+1}\alpha(d_{p+1})] - 2 > \\ > (p+1)h(\delta_{p+1}\hat{\alpha}(d_{p+1})) = (p+1)h(\ln \mu_f(d_{p+1})) > 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Из (27) следует, в частности, существование последовательности (k_p) такой, что $c_{k_p} = d_{p+1}$, $p \geq 0$.

Далее, согласно соотношениям (25), (26) и лемме, имеем

$$M_f(c_k) \geq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_n c_k^n = \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_{n_{k+1}} c_k^{n_{k+1}} = (n_{k+1} - n_k + 1)\mu_f(c_k).$$

Поэтому, воспользовавшись (27), для всех $p \geq 0$ получаем

$$\begin{gathered} M_f(c_{k_p}) \geq \mu_f(c_{k_p})(n_{k_p+1} - n_{k_p}) = \mu_f(c_{k_p})(\beta(c_{k_p}) - \beta(c_{k_p} - 0)) = \\ = \mu_f(c_{k_p})(\beta(d_{p+1}) - \beta(d_{p+1} - 0)) > (p+1)\mu_f(c_{k_p})h(\ln \mu_f(c_{k_p})), \end{gathered}$$

откуда и следует (20). Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Не ограничивая общности, можем считать, что функция φ является возрастающей на $(0, +\infty)$. Тогда при фиксированном $\varepsilon > 0$ определена функция

$$h_\varepsilon(x) = \exp\{\varphi^{-1}((1+\varepsilon)\varphi(x)) - x\}, \tag{28}$$

причем $h_\varepsilon \in C_+$.

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (10) и (9). Рассмотрим целую функцию $f \in \mathcal{A}(\alpha)$ и покажем, что для этой функции имеет место соотношение (8).

Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно (10), существует $\delta \in (0, 1)$ такое, что

$$\alpha(r) \leq \exp\{\varphi^{-1}((1+\varepsilon)\varphi(\delta\hat{\alpha}(r))) - \delta\hat{\alpha}(r)\} = h_\varepsilon(\delta\hat{\alpha}(r)), \quad r \geq r_0,$$

т. е. при $h = h_\varepsilon$ справедливо утверждение a) теоремы 1. Поэтому, согласно утверждению b) теоремы 1,

$$M_f(r) \le K_0 \mu_f(r) h_\varepsilon(\ln \mu_f(r)), \quad r \ge r_1, \tag{29}$$

где K_0 — некоторая положительная постоянная. Воспользовавшись (28), перепишем (29) в виде

$$\varphi(\ln M_f(r) - \ln K_0) \le (1+\varepsilon)\varphi(\ln \mu_f(r)), \quad r \ge r_1,$$

откуда, учитывая неравенство Коши $\mu_f(r) \le M_f(r)$ и соотношение (9), получаем

$$1 \le \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\varphi(\ln M_f(r))}{\varphi(\ln \mu_f(r))} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(\ln M_f(r))}{\varphi(\ln \mu_f(r))} \le 1+\varepsilon. \tag{30}$$

В силу произвольности ε, из (30) имеем (8). Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что выполняется (9) и для любой целой функции $f \in \mathcal{A}(\alpha)$ верно соотношение (8). Докажем, что тогда имеет место (10).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\forall f \in \mathcal{A}(\alpha): \qquad \varphi(\ln M_f(r)) \le (1+\varepsilon_1)\varphi(\ln \mu_f(r)), \quad r \ge r_0(f). \tag{31}$$

Воспользовавшись (28), перепишем (31) в виде

$$\forall f \in \mathcal{A}(\alpha): \qquad M_f(r) \le \mu_f(r) h_{\varepsilon_1}(\ln \mu_f(r)), \quad r \ge r_0(f).$$

Согласно теореме 1, существуют постоянные $K_1 > 0$ и $\delta \in (0,1)$, для которых

$$\alpha(r) \le K_1 h_{\varepsilon_1}(\delta \hat{\alpha}(r)), \quad r \ge r_1. \tag{32}$$

Из (32) получаем $\varphi(\delta\hat{\alpha}(r) + \ln \alpha(r) - \ln K_1) \le (1+\varepsilon_1)\varphi(\delta\hat{\alpha}(r))$, $r \ge r_1$, откуда, согласно (9), $\varphi(\delta\hat{\alpha}(r) + \ln\alpha(r)) \le (1+\varepsilon)\varphi(\delta\hat{\alpha}(r))$, $r \ge r_2$, что и требовалось показать. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Необходимость. Как и выше, можем считать, что функция φ является возрастающей на $(0, +\infty)$.

Предположим существование функции $\alpha \in I$ такой, что для любой $f \in \mathcal{A}(\alpha)$ выполняется (8), и докажем, что имеет место (9).

Действительно, если условие (9) не выполняется, то существуют число $\varepsilon > 0$ и возрастающая к $+\infty$ последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ таковы, что $\varphi(x_n+1) > (1+\varepsilon)\varphi(x_n)$, $n \ge 0$. Но тогда, согласно (28), $e > h(x_n)$, $n \ge 0$. Следовательно, утверждение a) теоремы 1 неверно, а поэтому неверно и утверждение b) этой же теоремы. Таким образом, существуют целая функция $f \in \mathcal{A}(\alpha)$ и возрастающая к $+\infty$ последовательность $(r_n)_{n=0}^{\infty}$, для которых

$$M_f(r_n) > \mu_f(r_n) h_\varepsilon(\ln \mu_f(r_n)), \quad n \ge 0.$$

Отсюда, воспользовавшись (28), легко получаем

$$\varphi(\ln M_f(r_n)) > (1+\varepsilon)\varphi(\ln \mu_f(r_n)), \quad n \ge 0,$$

т. е. для f соотношение (8) не выполняется, что противоречит сделаному выше предположению. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие (9). Тогда, как легко видеть, существует такая функция $l \in L$, что

$$\varphi(x + l(x)) \sim \varphi(x), \quad x \to +\infty. \tag{33}$$

Рассмотрим какую-либо функцию $\alpha \in I$, для которой $\alpha(r) \le \exp\{l(\ln r)\}$, $r \ge r_0$. Поскольку $\ln r = o(\hat{\alpha}(r))$, $r \to +\infty$, то

$$\ln \alpha(r) \le l(\ln r) \le l\left(\frac{1}{2}\hat{\alpha}(r)\right), \quad r \ge r_1. \tag{34}$$

Воспользовавшись (33) с $x = \frac{1}{2}\hat{\alpha}(r)$ и (34), получаем

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\hat{\alpha}(r) + \ln\alpha(r)\right) \sim \varphi\left(\frac{1}{2}\hat{\alpha}(r)\right), \quad r \to +\infty,$$

откуда следует, что для функции α выполняется условие (10) из теоремы 2. Согласно этой теореме, для любой $f \in \mathcal{A}(\alpha)$ имеет место соотношение (8). Тем самым, теорема 3 полностью доказана.

5. Доказательство теоремы 4

a) Пусть f — целая функция, для которой $0 < \lambda_f \le \rho_f < +\infty$. Воспользовавшись тем фактом, что в определении порядка $\rho = \rho_f$ и нижнего порядка $\lambda = \lambda_f$ функции f вместо $\ln M_f(r)$ можно поставить $\ln\mu_f(r)$ или $\nu_f(r)$, для некоторой функции $\eta \in C_+$ такой, что $\eta(x) \to 0$, $x \to +\infty$, и всех $r \ge r_1$ получаем

$$\nu_f(r) \le r^{\rho+\eta(\ln\mu_f(r))}, \qquad \ln\mu_f(r) \ge r^{\lambda-\eta(\ln\mu_f(r))}.$$

Следовательно,

$$\nu_f(r) \le 2^{\frac{\rho+\eta(\ln\mu_f(r))}{\lambda-\eta(\ln\mu_f(r))}}\left(\frac{1}{2}\ln\mu_f(r)\right)^{\frac{\rho+\eta(\ln\mu_f(r))}{\lambda-\eta(\ln\mu_f(r))}} \le 4^{\frac{\rho}{\lambda}}\left(\frac{1}{2}\ln\mu_f(r)\right)^{\frac{\rho+\eta(\ln\mu_f(r))}{\lambda-\eta(\ln\mu_f(r))}}$$

для всех $r \ge r_2$. Тогда, по теореме 1 (при $\alpha(r) = \nu_f(r)$), существует постоянная $K_0 \ge 1$ такая, что

$$M_f(r) \le K_0\mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{\frac{\rho+\eta(\ln\mu_f(r))}{\lambda-\eta(\ln\mu_f(r))}} =$$
$$= \mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{\frac{\rho}{\lambda}+\frac{(\rho+\lambda)\eta(\ln\mu_f(r))}{\lambda(\lambda-\eta(\ln\mu_f(r)))}+\frac{\ln K_0}{\ln\ln\mu_f(r)}}, \quad r \ge r_3,$$

откуда, выбирая функцию $\varepsilon \in C_+$ так, что

$$\varepsilon(x) = \frac{(\rho+\lambda)\eta(x)}{\lambda(\lambda-\eta(x))} + \frac{\ln K_0}{\ln x}, \quad x \ge x_0,$$

непосредственно получаем (11) и легко убеждаемся в том, что $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

b) Пусть $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ — фиксированная последовательность, убывающая к нулю. Из условия $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ следует существование возрастающей последовательности $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ такой, что $c_0 > 1$ и для всех $n \ge 0$

$$\varepsilon_n > \varepsilon(c_n^{\lambda}), \qquad c_n^{\lambda\varepsilon_n} > n, \qquad c_{n+1} > c_n^{2\left(\frac{\rho}{\lambda}+\varepsilon_n\right)}. \tag{35}$$

Пусть $d_n = c_n^{\left(\frac{\rho}{\lambda}+2\varepsilon_n\right)}$, $n \ge 0$. Воспользовавшись третьим из неравенств (35), легко получаем $c_n < d_n < c_{n+1}$, $n \ge 0$. Положим $\alpha(r) = 0$ для всех $r \in [0, c_0)$ и пусть для каждого $n \ge 0$

$$\alpha(r) = \begin{cases} \lambda c_n^{\rho+2\lambda\varepsilon_n}, & c_n \le r \le d_n; \\ \lambda r^{\lambda}, & d_n \le r < c_{n+1}. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\alpha \in I$, и

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\alpha(r)}{\ln r} = \rho, \qquad \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\alpha(r)}{\ln r} = \lambda. \tag{36}$$

Положим $h(x) = x^{\frac{\rho}{\lambda}+\varepsilon(x)}$. Согласно первому и второму из неравенств (35),

$$\alpha(c_n) = \lambda c_n^{\rho+2\lambda\varepsilon_n} = \lambda c_n^{\lambda(2\varepsilon_n-\varepsilon(c_n^{\lambda}))}h(c_n^{\lambda}) \ge \lambda c_n^{\lambda\varepsilon_n}h(c_n^{\lambda}) > \lambda(n+1)h(c_n^{\lambda}), \quad n \ge 0. \tag{37}$$

Далее, рассмотрим такую первообразную от $\alpha(r)$ по $\ln r$:

$$\hat{\alpha}(r) = \int_0^r \frac{\alpha(t)}{t} dt.$$

Для функции $\hat{\alpha}$ при любом $n \geq 0$ имеем

$$\hat{\alpha}(c_{n+1}) = \int_{c_0}^{d_n} \frac{\alpha(t)}{t} dt + \lambda \int_{d_n}^{c_{n+1}} t^{\lambda-1} dt \leq \alpha(d_n) \ln d_n + c_{n+1}^{\lambda} = (1+\eta_n) c_{n+1}^{\lambda}, \qquad (38)$$

где, согласно третьему из неравенств (35),

$$\eta_n = \frac{\alpha(d_n) \ln d_n}{c_{n+1}^{\lambda}} = \frac{(\rho + 2\lambda\varepsilon_n) c_n^{\rho+2\lambda\varepsilon_n} \ln c_n}{c_{n+1}^{\lambda}} \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (39)$$

Докажем, что для функций h и α утверждение a) теоремы 1 неверно. Действительно, если это утверждение справедливо, то существуют постоянные $\delta \in (0,1)$ и $K > 0$, для которых

$$\alpha(r) \leq K h(\delta \hat{\alpha}(r)), \quad r \geq 0.$$

Отсюда, учитывая замечание 1, (38) и (39), для всех $n \geq n_0$ получаем

$$\alpha(c_n) \leq K \tilde{h}(\delta \hat{\alpha}(c_n)) \leq K \tilde{h}(\delta(1+\eta_{n-1}) c_n^{\rho}) \leq K \tilde{h}(c_n^{\rho}) \leq K h(c_n^{\rho}),$$

что противоречит (37). Следовательно, утверждение a) теоремы 1, а значит и утверждение c) этой же теоремы не имеют места. Поэтому для некоторой целой функции $f \in \mathcal{A}(\alpha)$ выполняется равенство

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{M_f(r)}{\mu_f(r) h(\ln \mu_f(r))} = +\infty,$$

откуда немедленно следует существование последовательности $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ такой, что для f имеет место (12). Кроме того, согласно (36), $\lambda_f = \lambda$, $\rho_f = \rho$. Таким образом, теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа. Т. 2.* М.: Наука, 1978.
2. Шеремета М.Н. *О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле* // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 5. С. 141–148.
3. J. Clunie *On integral functions having prescribed asymptotic growth* // Can. J. Math. 1965. V. 17, № 3. P. 396–404.
4. Філевич П.В. *Асимптотична поведінка цілих функцій з винятковими значеннями у співвідношенні Бореля* // Укр. мат. журн. 2001. Т. 45, № 4. С. 522–530.
5. P.V. Filevych *On the slow growth of power series convergent in the unit disk* // Mat. Studii. 2001. V. 16, № 2. P. 217–221.

Петр Васильевич Филевич,
Львовский национальный университет
ветеринарной медицины
и биотехнологий им. С.З. Гжицкого,
ул. Пекарская, 50,
29010, г. Львов, Украина
E-mail: `filevych@mail.ru`