ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 4 (2010). С. 39-51.

УДК 517.957

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА ЛИ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО ДАРБУ ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПОЧКИ

Н.А. ЖЕЛТУХИНА, А.У. САКИЕВА, И.Т. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Рассматривается дифференциально-разностное уравнение
$\frac{d}{dx}t(n+1,x) = f(x, t(n,x), t(n+1,x), \frac{d}{dx}t(n,x))$
с неизвестной функцией $t(n,x)$, зависящей от непрерывной переменной x и дискретной переменной n. Уравнение называется интегрируемым по Дарбу, если существуют функции F и I, зависящие от конечного числа аргументов x, $\{t(n+k,x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\left\{\frac{d^k}{dx^k}t(n,x)\right\}_{k=1}^{\infty}$, такие, что $D_xF = 0$ и $DI = I$, где D_x — оператор полного дифференцирования по x, а D — оператор сдвига: $Dp(n) = p(n+1)$. Доказано, что уравнение интегрируемо по Дарбу тогда и только тогда, когда его характеристические алгебры Ли по обоим направлениям конечномерны. Описана структура интегралов. Дано описание характеристических алгебр для некоторого класса интегрируемых уравнений.

Ключевые слова: интегрируемые цепочки, классификация, x-интеграл, n-интеграл, характеристическая алгебра Ли, условия интегрируемости.

1. Введение

В настоящей заметке рассматриваются дискретные уравнения (или цепочки) вида

$$\frac{d}{dx}t(n+1,x) = f(x, t(n,x), t(n+1,x), \frac{d}{dx}t(n,x)). \tag{1}$$

Искомая функция $t = t(n,x)$ зависит от дискретной переменной n и непрерывной переменной x. Предполагается, что функция $f = f(x, t, t_1, t_x)$ является локально аналитической, и $\frac{\partial f}{\partial t_x}$ не равна нулю тождественно. Отметим, что в последние два десятилетия дискретные модели вида (1) интенсивно изучаются благодаря приложениям в различных областях естествознания (см. [1]–[3] и ссылки в них). В статье рассматривается класс уравнений (1), допускающих в известном смысле явную формулу для общего решения.

Далее мы будем пользоваться нижним индексом для обозначения сдвига дискретного аргумента: $t_k = t(n+k,x)$, $k \in Z$, и производной по переменной x: $t_{[1]} = t_x = \dfrac{d}{dx}t(n,x)$, $t_{[2]} = t_{xx} = \dfrac{d^2}{dx^2}t(n,x)$, $t_{[m]} = \frac{d^m}{dx^m}t(n,x)$, $m \in N$.

Введем набор динамических переменных, состоящий из $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$; $\{t_{[m]}\}_{m=1}^{\infty}$. Обозначим через D и D_x оператор сдвига по n и оператор дифференцирования по x, соответственно. Например, $Dh(n,x) = h(n+1,x)$ и $D_xh(n,x) = \frac{d}{dx}h(n,x)$. Функции I и F, зависящие

N.A. Zheltukhina, A.U. Sakieva, I.T. Habibullin, Characteristic Lie algebra and Darboux Integrable Discrete Chains.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-31222 СТ-а, 09-01-92431КЕ-а, 10-01-00088-а, МК-8247.2010.1).
Поступила 1 июля 2010 г.

от x и конечного числа динамических переменных, называются, соответственно, n и x-интегралами (1), если $DI = I$ и $D_xF = 0$ (по поводу определения см. также [4]). Очевидно, что константа является x-интегралом, и любая функция, зависящая только от x – n-интегралом. Такие интегралы называются тривиальными интегралами. Заметим также, что любой n-интеграл I не зависит от переменных t_m, $m \in Z\backslash\{0\}$, и любой x-интеграл F не зависит от переменных $t_{[m]}$, $m \in N$.

Уравнение (1) называется интегрируемым по Дарбу, если оно допускает нетривиальный n-интеграл и нетривиальный x-интеграл. Для интегрируемого по Дарбу уравнения $t_{1x} = t_1t_x/t$ функции $F = \ln(t_1/t)$ и $I = t_x/t$ являются x- и n-интегралами.

Основные идеи интегрирования уравнений в частных производных гиперболического типа восходят к классическим работам Лапласа, Дарбу, Гурса, Вессио, Монжа, Ампера, Лежандра, Егорова и др. Первоначальное понимание интегрирования уравнения в частных производных как процедуры нахождения явной функции для его общего решения позднее было заменено другими, менее обременительными определениями. Например, интегрируемость по Дарбу уравнения гиперболического типа означает лишь существование интегралов по обоим характеристическим направлениям, что позволяет свести уравнение к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Другое, не менее известное определние интегрируемости предполагает наличие дифференциальной подстановки, сводящей заданное уравнение к уравнению $u_{xy} = 0$.

Для отыскания интегралов при условии, что они существуют, Дарбу использовал каскадный метод Лапласа. Альтернативный подход, более алгебраический, основанный на характеристических векторных полях, использовали Гурса и Вессио. Именно этот метод позволил Гурса получить список интегрируемых уравнений [5]. Важный вклад в развитие алгебраического метода исследования уравнений был сделан А.Б. Шабатом. Например, в работе [10] А.Б. Шабат и Р.И. Ямилов исследовали при помощи характеристической алгебры систему гиперболических уравнений специального вида, называемую экспоненциальной системой

$$u^i_{x,y} = \exp(a_{i1}u^1 + a_{i2}u^2 + ... + a_{iN}u^N)\,. \tag{2}$$

Было доказано, что система (2) интегрируема по Дарбу тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов системы $A = \{a_{ij}\}$ совпадает с матрицей Картана полупростой алгебры Ли. А.В. Жибер и Ф.Х. Мукминов исследовали структуру характеристических алгебр Ли для так называемых квадратичных систем, включающих в себя уравнение Лиувилля и уравнение синус-Гордон (см. [6]). В статьях [6] и [7] изучается глубокая связь между характеристическими алгебрами Ли и парами Лакса гиперболических S-интегрируемых уравнений, а также обсуждаются возможные способы адаптации характеристических алгебр Ли к задаче о классификации таких уравнений.

Недавно было введено понятие характеристической алгебры Ли дискретной модели. В наших статьях [8]-[9] был разработан эффективный метод классификации моделей, интегрируемых по Дарбу. С помощью этого метода были получены новые классификационные результаты. Характерная особенность дискретных моделей в том, что в характеристической алгебре имеется автоморфизм, порожденный оператором сдвига, выполняющий исключительно важную роль при классификации.

Согласно предположению, что $\frac{\partial}{\partial t_x} f(x, t, t_1, t_x) \neq 0$, мы можем записать (по крайней мере, локально) уравнение (1) в форме $t_x(n-1, x) = g(x, t(n, x), t(n-1, x), t_x(n, x))$. Так как x-интеграл F не зависит от переменных $t_{[k]}$, $k \in N$, то уравнение $D_xF = 0$ принимает вид $KF = 0$, где

$$K = \frac{\partial}{\partial x} + t_x\frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial t_1} + g\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + f_1\frac{\partial}{\partial t_2} + g_{-1}\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \dots\,. \tag{3}$$

Также $XF = 0$, где $X = \frac{\partial}{\partial t_x}$, ведь F не зависит от t_x. Следовательно, любое векторное поле из алгебры Ли, порожденной K и X, обращает в нуль F. Эта алгебра называется *характеристической алгеброй Ли L_x уравнения (1) в направлении x.* Следует иметь в виду, что L_x является алгеброй Ли над полем локально аналитических функций, зависящих от x и конечного числа динамических переменных, а не над числовым полем.

Связь между интегрируемостью по Дарбу уравнения (1) и его алгеброй Ли L_x сформулирована в следующем важном критерии.

Теорема 1. *Уравнение (1) допускает нетривиальный x-интеграл тогда и только тогда, когда его алгебра Ли L_x конечномерна.*

Перепишем равенство $DI = I$, определяющее n-интеграл I, в развернутом виде

$$I(x, t_1, f, f_x, ...) = I(x, t, t_x, t_{xx}, ...). \tag{4}$$

Очевидно левая часть этого равенства содержит переменную t_1, а его правая часть – не содержит. Следовательно, $D^{-1}\frac{d}{dt_1}DI = 0$, т.е. n-интеграл содержится в ядре оператора

$$Y_1 = D^{-1}Y_0D,$$

где

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t} + D^{-1}(Y_0 f)\frac{\partial}{\partial t_x} + D^{-1}Y_0(f_x)\frac{\partial}{\partial t_{xx}} + D^{-1}Y_0(f_{xx})\frac{\partial}{\partial t_{xxx}} + ... \tag{5}$$

и

$$Y_0 = \frac{d}{dt_1}\,. \tag{6}$$

Можно показать, что $D^{-j}Y_0D^jI = 0$ для любого натурального j. Непосредственные вычисления показывают, что

$$D^{-j}Y_0D^j = X_{j-1} + Y_j, \qquad j \geq 2,$$

где

$$Y_{j+1} = D^{-1}(Y_j f)\frac{\partial}{\partial t_x} + D^{-1}Y_j(f_x)\frac{\partial}{\partial t_{xx}} + D^{-1}Y_j(f_{xx})\frac{\partial}{\partial t_{xxx}} + ..., \quad j \geq 1\,, \tag{7}$$

$$X_j = \frac{\partial}{\partial_{t_{-j}}}, \qquad j \geq 1. \tag{8}$$

Обозначим N^* размерность линейного пространства, порожденного операторами $\{Y_j\}_1^\infty$. Алгебра Ли над полем локально аналитических функций, порожденная операторами $\{Y_j\}_1^{N^*} \cup \{X_j\}_1^{N^*}$, называется *характеристической алгеброй L_n уравнения (1) в направлении n.*

Теорема 2. *Если уравнение (1) допускает нетривиальный n-интеграл, то его алгебра Ли L_n конечномерна.*

Статья построена следующим образом. В разделе 2 описана структура n-интегралов и x-интегралов для интегрируемых по Дарбу уравнений. В частности, показано, что можно выбрать n-интеграл минимального порядка и x-интеграл минимального порядка в специальной канонической форме, удобной для классификации.

В разделе 3 условие интегрируемости уравнений по Дарбу переформулировано в терминах характеристических алгебр Ли. Доказано, что необходимым условием существования нетривиальных x- и n-интегралов является конечномерность соответствующих характеристических алгебр. В случае x-интеграла это условие является и достаточным. Утверждения, рассматриваемые в разделах 2 и 3, являются основой для дальнейших исследований классификационной задачи для уравнения (1) с помощью характеристических алгебр Ли.

В разделе 4 приведены примеры интегрируемых по Дарбу уравнений. Для каждого такого уравнения вида $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$ представлены алгебры L_n и L_x . Напомним, что для интегрируемых по Дарбу экспоненциальных систем уравнений в частных производных характеристическая алгебра Ли является полупростой (см.[10]). Наши примеры показывают, что в общем случае алгебра не обязательно полупроста.

2. Структура интегралов

Будем считать *порядком нетривиального n-интеграла* $I = I(x, t, t_x, \ldots, t_{[k]})$ с $\frac{\partial I}{\partial t_{[k]}} \neq 0$, число k.

Лемма 1. *Предположим, что уравнение (1) допускает нетривиальный n-интеграл. Тогда для любого нетривиального n-интеграла $I^*(x, t, t_x, \ldots, t_{[k]})$ наименьшего порядка и для любого n-интеграла I имеем*

$$I = \phi(x, I^*, D_x I^*, D_x^2 I^*, \ldots), \tag{9}$$

где ϕ -некоторая функция.

Доказательство: Обозначим $I^* = I^*(x, t, \ldots, t_{[k]})$ — n-интеграл наименьшего порядка. Пусть I любой другой n-интеграл, $I = I(x, t, \ldots, t_{[r]})$. Очевидно $r \geq k$. Введем новые переменные x, t, t_x, $\ldots$, $t_{[k-1]}$, I^*, $D_x I^*$, $\ldots$, $D_x^{r-k} I^*$ вместо переменных x, t, t_x, $\ldots$, $t_{[k-1]}$, $t_{[k]}$, $t_{[k+1]}$, $\ldots$, $t_{[r]}$. Получаем $I = I(x, t, t_x, \ldots, t_{[k-1]}, I^*, D_x I^*, \ldots, D_x^{r-k} I^*)$. Разложим функцию I в степенной ряд в окрестности точки $((I^*)_0, (D_x I^*)_0, \ldots, (D_x^{r-k} I^*)_0)$:

$$I = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_{r-k}} E_{i_0, i_1, \ldots, i_{r-k}} (I^* - (I^*)_0)^{i_0} (D_x I^* - (D_x I^*)_0)^{i_1} \ldots (D_x^{r-k} I^* - (D_x^{r-k} I^*)_0)^{i_{r-k}}. \tag{10}$$

Тогда

$$DI = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_{r-k}} DE_{i_0, i_1, \ldots, i_{r-k}} (DI^* - (I^*)_0)^{i_0} (DD_x I^* - (D_x I^*)_0)^{i_1} \ldots (DD_x^{r-k} I^* - (D_x^{r-k} I^*)_0)^{i_{r-k}}.$$

Так как $DI = I$, $DD_x^j I^* = D_x^j DI^* = D_x^j I^*$ и разложение в степенной ряд для функции I единственно, то $DE_{i_0, i_1, \ldots, i_{r-k}} = E_{i_0, i_1, \ldots, i_{r-k}}$, т.е. все $E_{i_0, i_1, \ldots, i_{r-k}}(x, t, \ldots, t_{[k-1]})$ — n-интегралы. Так как минимальный n-интеграл зависит от x, t, $\ldots$, $t_{[k]}$, то все функции $E_{i_0, i_1, \ldots, i_{r-k}}(x, t, \ldots, t_{[k-1]})$ являются тривиальными n-интегралами, т.е. функциями, зависящими только от x. Теперь формула (9) следует непосредственно из (10).

Определим *порядок нетривиального x-интеграла* $F = F(x, t_k, t_{k+1}, ..., t_m)$ с $\frac{\partial F}{\partial t_{[m]}} \neq 0$, как $m - k$.

Лемма 2. *Предположим, что уравнение (1) допускает нетривиальный x-интеграл. Тогда для любого нетривиального x-интеграла $F^*(x, t, t_1, \ldots, t_m)$ наименьшего порядка и для любого x-интеграла F имеем*

$$F = \xi(F^*, DF^*, D^2 F^*, \ldots), \tag{11}$$

где ξ — некоторая функция.

Доказательство: Обозначим $F^* = F^*(x, t, t_1, \ldots, t_m)$ x-интеграл наименьшего порядка. Пусть F — любой другой x-интеграл, $F = F(x, t, t_1, \ldots, t_l)$. Очевидно, $l \geq m$. Введем новые переменные x, t, t_1, $\ldots$, t_{m-1}, F^*, DF^*, $\ldots$, $D^{l-m} F^*$ вместо переменных x, t, t_1, $\ldots$,t_{m-1}, t_m, $\ldots$, t_l. Получим , $F = F(x, t, t_1, \ldots, t_{m-1}, F^*, DF^*, \ldots, D^{l-m} F^*)$. Представим функцию F степенным рядом в окрестности точки $((F^*)_0, (DF^*)_0, \ldots, (D^{l-m} F^*)_0)$:

$$F = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_{l-m}} K_{i_0, i_1, \ldots, i_{l-m}} (F^* - (F^*)_0)^{i_0} (DF^* - (DF^*)_0)^{i_1} \ldots (D^{l-m} F^* - (D^{l-m} F^*)_0)^{i_{l-m}}. \tag{12}$$

Тогда

$$D_x F = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_{l-m}} D_x \{K_{i_0, i_1, \ldots, i_{l-m}}\} (F^* - (F^*)_0)^{i_0} (DF^* - (DF^*)_0)^{i_1} \ldots (D^{l-m} F^* - (D^{l-m} F^*)_0)^{i_{l-m}} +$$

$$+\sum_{i_0,i_1,\dots,i_{l-m}} K_{i_0,i_1,\dots,i_{l-m}} D_x\{(F^*-(F^*)_0)^{i_0}(DF^*-(DF^*)_0)^{i_1}\dots(D^{l-m}F^*-(D^{l-m}F^*)_0)^{i_{l-m}}\}$$

Так как $D_xD^jF^* = D^jD_xF^* = 0$, то $D_x\{(F^*-(F^*)_0)^{i_0}(DF^*-(DF^*)_0)^{i_1}\dots(D^{l-m}F^*- -(D^{l-m}F^*)_0)^{i_{l-m}}\} = 0$. Следовательно,

$$0 = D_xF = \sum_{i_0,i_1,\dots,i_{l-m}} D_x\{K_{i_0,i_1,\dots,i_{l-m}}\}(F^*-(F^*)_0)^{i_0}(DF^*-(DF^*)_0)^{i_1}\dots$$

$$\dots(D^{l-m}F^*-(D^{l-m}F^*)_0)^{i_{l-m}}.$$

Согласно единственности представления нуля степенным рядом имеем $D_x\{K_{i_0,i_1,\dots,i_{l-m}}\} = 0$, т.е. все $K_{i_0,i_1,\dots,i_{l-m}}(x,t,\dots,t_{m-1})$ являются x-интегралами. Так как минимальный нетривиальный x-интеграл имеет порядок m, то все функции $K_{i_0,i_1,\dots,i_{l-m}}$ являются тривиальными x-интегралами, т.е. константами. Получаем, что уравнение (11) следует из (12).

Следующие две леммы являются обобщениями Леммы 1.2 из работы [11] на дискретный случай.

Лемма 3. *Среди всех нетривиальных n-интегралов $I^*(x,t,t_x,\dots,t_{[k]})$ наименьшего порядка с $k\geq 2$ существует n-интеграл $I^0(x,n,t,t_x,\dots,t_{[k]})$ такой, что*

$$I^0(x,n,t,t_x,\dots,t_{[k]}) = a(x,n,t,t_x,\dots,t_{[k-1]})t_{[k]} + b(x,n,t,t_x,\dots,t_{[k-1]})\,, \qquad (13)$$

где $a(x,n,t,t_x,\dots,t_{[k-1]}) = c(n,x)\bar{a}(x,t,t_x,\dots,t_{[k-1]})$.

Доказательство: Рассмотрим нетривиальный минимальный n-интеграл $I^*(x,t,t_x,\dots,t_{[k]})$ с $k\geq 2$. Равенство $DI^* = I^*$ можно записать следующим образом

$$I^*(x,t_1,f,f_x,\dots,f_{[k-1]}) = I^*(x,t,t_x,\dots,t_{[k]}).$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по $t_{[k]}$:

$$\frac{\partial I^*(x,t_1,f,\dots,f_{[k-1]})}{\partial f_{[k-1]}}\cdot\frac{\partial f_{[k-1]}}{\partial t_{[k]}} = \frac{\partial I^*(x,t,\dots,t_{[k]})}{\partial t_{[k]}}\,. \qquad (14)$$

Так как $\frac{\partial f_{[j]}}{\partial t_{[j+1]}} = f_{t_x}$, то уравнение (14) можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial I^*(x,t_1,f,\dots,f_{[k-1]})}{\partial f_{[k-1]}}f_{t_x} = \frac{\partial I^*(x,t,\dots,t_{[k]})}{\partial t_{[k]}}\,. \qquad (15)$$

Продифференцируем еще раз по $t_{[k]}$ обе части последнего уравнения, получим:

$$\frac{\partial^2 I^*(x,t_1,f,\dots,f_{[k-1]})}{\partial^2 f_{[k-1]}}f_{t_x}^2 = \frac{\partial^2 I^*(x,t,\dots,t_{[k]})}{\partial t_{[k]}^2}\,,$$

или

$$D\left\{\frac{\partial^2 I^*}{\partial t_{[k]}^2}\right\}f_{t_x}^2 = \frac{\partial^2 I^*}{\partial t_{[k]}^2}\,,$$

где $I^* = I^*(x,t,\dots,t_{[k]})$. Из равенства (15) следует, что

$$D\left\{\frac{\partial^2 I^*}{\partial t_{[k]}^2}\right\}\left\{\frac{\partial I^*}{\partial t_{[k]}}\right\}^2 = \frac{\partial^2 I^*}{\partial t_{[k]}^2}D\left\{\left(\frac{\partial I^*}{\partial t_{[k]}}\right)^2\right\}\,,$$

т.е. функция

$$J := \frac{\frac{\partial^2 I^*}{\partial t_{[k]}^2}}{\left(\frac{\partial I^*}{\partial t_{[k]}}\right)^2}$$

является n-интегралом и, согласно Леммы 1, мы получаем, что $J = \phi(x, I^*)$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 I^*}{\partial t_{[k]}^2} = \frac{\partial H(x, I^*, n)}{\partial I^*} \left(\frac{\partial I^*}{\partial t_{[k]}}\right)^2, \quad \text{где} \quad H \quad \text{находим из уравнения} \quad \frac{\partial H}{\partial I^*} = J,$$

ясно, что $H(x, I^*, n) = H_0(x, I^*) + c(x, n)$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t_{[k]}} \left\{ \ln \frac{\partial I^*}{\partial t_{[k]}} - H(x, I^*, n) \right\} = 0.$$

Заметим, что $e^{-H_0(x,I^*)} \frac{\partial I^*}{\partial t_{[k]}} = e^{g+c(x,n)}$ для некоторой функции $g(x, t, t_x, \ldots, t_{[k-1]})$ и функции $c(x, n)$. Введем функцию W таким образом, чтобы $\frac{\partial W}{\partial I^*} = e^{-H_0(x,I^*)}$. Тогда $\frac{\partial W}{\partial t_{[k]}} = e^{g+c(x,n)}$ и функция $W = e^{g^*(x,n,t,\ldots,t_{[k-1]})} t_{[k]} + l(x, n, t, \ldots, t_{[k-1]})$ является n-интегралом, где $l(x, n, t, \ldots, t_{[k-1]})$ — некоторая функция.

Пример 1. *Цепочка вида $t_{1x} t_x = t_1 + t$ допускает интегралы (см. [4])*

$$I^* = \frac{(t_{xx} - 1)^2}{t_x^2}, \quad F = \frac{(t_3 - t_1)(t_2 - t)}{t_2 + t_1}.$$

Легко видеть, что n-интеграл, линейный по старшей переменной t_{xx}, явным образом зависит от переменной n:

$$W = (-1)^n \frac{t_{xx} - 1}{t_x}.$$

Лемма 4. *Среди всех нетривиальных x-интегралов $F^*(x, t_{-1}, t, t_1, \ldots, t_m)$ наименьшего порядка с $m \geq 1$ существует x-интеграл $F^0(x, t_{-1}, t, t_1, \ldots, t_m)$ такой, что*

$$F^0(x, t_{-1}, t, t_1, \ldots, t_m) = A(x, t_{-1}, t, \ldots, t_{m-1}) + B(x, t, t_1, \ldots, t_m). \tag{16}$$

Доказательство: Рассмотрим нетривиальный x-интеграл $F^*(x, t_{-1}, t, t_1, \ldots, t_m)$ минимального порядка. Так как $D_x F^* = 0$, то

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} + g \frac{\partial F^*}{\partial t_{-1}} + t_x \frac{\partial F^*}{\partial t} + f \frac{\partial F^*}{\partial t_1} + Df \frac{\partial F^*}{\partial t_2} + \ldots + D^{m-1} f \frac{\partial F^*}{\partial t_m} = 0. \tag{17}$$

Продифференцируем обе части (17) по t_m и по t_{-1}, получим следующие уравнения:

$$\{D_x + \frac{\partial}{\partial t_m}(D^{m-1} f)\} \frac{\partial F^*}{\partial t_m} = 0, \tag{18}$$

$$\{D_x + \frac{\partial g}{\partial t_{-1}}\} \frac{\partial F^*}{\partial t_{-1}} = 0. \tag{19}$$

Продифференцируем (18) по t_{-1}, получим,

$$D_x \frac{\partial^2 F^*}{\partial t_m \partial t_{-1}} + \frac{\partial g}{\partial t_{-1}} \frac{\partial^2 F^*}{\partial t_m \partial t_{-1}} + \frac{\partial}{\partial t_m}(D^{m-1} f) \frac{\partial^2 F^*}{\partial t_m \partial t_{-1}} = 0\,. \tag{20}$$

Из (18) и (19) следует $\frac{\partial}{\partial t_m}(D^{m-1} f) = -\frac{D_x F^*_{t_m}}{F^*_{t_m}}$, $\frac{\partial g}{\partial t_{-1}} = -\frac{D_x F^*_{t_{-1}}}{F^*_{t_{-1}}}$. Уравнение (20) принимает вид

$$D_x \left\{ \ln \frac{F^*_{t_m t_{-1}}}{F^*_{t_m} F^*_{t_{-1}}} \right\} = 0.$$

Согласно Леммы 2 имеем, $\frac{F^*_{t_m t_{-1}}}{F^*_{t_m} F^*_{t_{-1}}} = \xi(F^*)$, или

$$\frac{F^*_{t_m t_{-1}}}{F^*_{t_m}} = F^*_{t_{-1}} \xi(F^*) = H'(F^*) F^*_{t_{-1}} = \frac{\partial}{\partial t_{-1}} H(F^*), \quad \text{где} \quad \xi(F^*) = H'(F^*)\,.$$

Таким образом, $\frac{\partial}{\partial t_{-1}}\{\ln F^*_{t_m} - H(F^*)\} = 0$, или $e^{-H(F^*)}F^*_{t_m} = C(x,t,t_1,\ldots,t_m)$ для некоторой функции
$C(x,t,t_1,\ldots,t_m)$. Обозначим $\tilde{H}(F^*)$ такую функцию, для которой $\tilde{H}'(F^*) = e^{-H(F^*)}$. Тогда $\frac{\partial \tilde{H}(F^*)}{\partial t_m} = C(x,t,t_1,\ldots,t_m)$.

Таким образом, $\tilde{H}(F^*) = B(x,t,t_1,\ldots,t_m) + A(x,t_{-1},t,\ldots,t_{m-1})$. Так как $D_x\tilde{H}(F^*) = \tilde{H}'(F^*)D_x(F^*) = 0$, тогда $\tilde{H}(F^*)$ есть x-интеграл в виде (16).

Следствие 1. *Среди всех нетривиальных x-интегралов $F(x,t,\ldots,t_m)$ наименьшего порядка с $m \geq 2$, существует x-интеграл $F^0(x,t,\ldots,t_m)$ такой, что*

$$F^0(x,t,\ldots,t_m) = A(x,t,\ldots,t_{m-1}) + B(x,t_1,\ldots,t_m)\,.$$

3. Алгебраический критерий интегрируемости по Дарбу

В этом разделе приводятся доказательства Теорем 1 и 2.

Докажем Теорему 1. Предположим, что уравнение (1) допускает нетривиальный x-интеграл. Рассмотрим один из таких интегралов $F = F(x,t,t_1,\ldots,t_m)$ с $\frac{\partial F}{\partial t_m} \neq 0$ тождественно. Введем

$$L_x^{(m)} = \{T^{(m)} = P_m(T) : T \in L_x\},$$

где P_m — оператор проектирования, действующий следующим образом

$$P_i\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\frac{\partial}{\partial t_k}\right) = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{i} a_k\frac{\partial}{\partial t_k}, \qquad i = 1,2,3,\ldots. \tag{21}$$

Обозначим N_1 размерность $L_x^{(m)}$. Очевидно, $N_1 \leqslant m+2$. Пусть множество $\{T_{01},T_{02},\ldots,T_{0N_1}\}$ образует базис в $L_x^{(m)}$. Для любого $j = 1,2,\ldots,N_1$, введем $T_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k(T_j)\frac{\partial}{\partial t_k}$-векторное поле из L_x такое, что $P_m(T_j) = T_{0j}$. Покажем, что множество $\{T_1,T_2,\ldots,T_{N_1}\}$ образует базис в L_x. Возьмем произвольное векторное поле $T = a(T)\frac{\partial}{\partial x} + b(T)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(T)\frac{\partial}{\partial t_j}$ из L_x. Так как $P_m(T) \in L_x^{(m)}$, то $P_m(T) = \sum\limits_{j=1}^{N_1}\beta_jT_{0j}$. Покажем, что $T = \sum\limits_{j=1}^{N_1}\beta_jT_j$, или, $Z \equiv 0$, где $Z = T - \sum\limits_{j=1}^{N_1}\beta_jT_j$. Получаем, $P_m(Z) \equiv 0$. Так как F — x-интеграл, зависящий от x, t, t_1, …, t_m , то DF есть x-интеграл, зависящий от переменных x, t_1, t_2, …, t_m, t_{m+1}. Следовательно,

$$0 = Z(DF) = P_m(Z)DF + \left(\alpha_{m+1}(T) - \sum_{j=1}^{N_1}\beta_j\alpha_{m+1}(T_j)\right)\frac{\partial}{\partial t_{m+1}}DF =$$

$$= \left(\alpha_{m+1}(T) - \sum_{j=1}^{N_1}\beta_j\alpha_{m+1}(T_j)\right)\frac{\partial}{\partial t_{m+1}}DF.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial t_{m+1}}DF = D\frac{\partial}{\partial t_m}F \neq 0$, то $\alpha_{m+1}(T) = \sum\limits_{j=1}^{N_1}\beta_j\alpha_{m+1}(T_j)$, что равносильно $P_{m+1}(Z) \equiv 0$. Применяя последовательно оператор Z к x-интегралам D^2F, D^3F, …, получим, что $\alpha_{m+i}(T) = \sum\limits_{j=1}^{N_1}\beta_j\alpha_{m+i}(T_j)$ для любого $i = 1,2,3,\ldots$, что равносильно тому, что $P_{m+i}(Z) \equiv 0$ для любого натурального числа i. Следовательно, $Z \equiv 0$. Итак, любое векторное поле T из L_x может быть представлено в виде линейной комбинации векторных полей T_1, T_2, …, T_{N_1}. Таким образом L_x конечномерна.

Предположим, что размерность характеристической алгебры Ли L_x конечна и обозначим ее N. Пусть T_1, T_2, …, T_N образуют базис в L_x. Введем $T_{0j} = P_N(T_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Получаем N уравнений $T_{0j}F = 0$ для функции F, зависящей от $N+3$ переменных: x, t_x, t, t_1, …, t_N. Согласно Теореме Якоби, такая функция $F = F(x, t_x, t, t_1, \ldots, t_N)$, не являющаяся константой, существует. Более того, она не зависит от переменной t_x и удовлетворяет уравнению $TF = 0$ для любого $T \in L_x$. Эта функция F является нетривиальным x-интегралом уравнения (24). Теорема 1 доказана.

Докажем Теорему 2. Предположим, что уравнение (1) допускает нетривиальный n-интеграл. Рассмотрим один такой интеграл $I = I(x, t, t_x, t_{[2]}, \ldots, t_{[m]})$ с $\frac{\partial I}{\partial t_{[m]}} \neq 0$ тождественно. Введем алгебру Ли M, порожденную векторными полями $\{Y_j\}_1^{\infty} \cup \{X_j\}_1^{N_2}$, где число N_2 будет определено позже. Определим

$$M^{(m)} = \{T^{(m)} = P_m^*(T) : T \in M\},$$

где P_m^* — оператор проектирования, определенный следующим образом

$$P_i^*\left(\sum_{k=-N_2}^{-1} a_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial}{\partial t_{[k]}}\right) = \sum_{k=-N_2}^{-1} a_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{k=0}^{i} a_k \frac{\partial}{\partial t_{[k]}}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots. \tag{22}$$

Обозначим N_1 размерность $M^{(m)}$. Очевидно, $N_1 \leqslant m + N_2 + 1$. Множество $\{T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0N_1}\}$ образует базис в $M^{(m)}$. Обозначим $T_j = \sum\limits_{k=-N_2}^{-1} \alpha_k(T_j)\frac{\partial}{\partial t_k} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k(T_j)\frac{\partial}{\partial t_{[k]}}$ векторное поле из M такое, что $P_m^*(T_j) = T_{0j}$, $j = 1, 2, \ldots, N_1$. Покажем, что множество $\{T_1, T_2, \ldots, T_{N_1}\}$ образует базис в M. Возьмем произвольное векторное поле $T = \sum_{j=-N_2}^{-1} a_j(T)\frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j(T)\frac{\partial}{\partial t_{[j]}}$ из M. Так как $P_m^*(T) \in M^{(m)}$, то $P_m^*(T) = \sum\limits_{j=1}^{N_1} \beta_j T_{0j}$. Покажем, что $T = \sum\limits_{j=1}^{N_1} \beta_j T_j$, что равносильно, $Z \equiv 0$, где $Z = T - \sum\limits_{j=1}^{N_1} \beta_j T_j$. Получаем, $P_m^*(Z) \equiv 0$. Так как I является n-интегралом, зависящим от переменных x, t, t_x, $t_{[2]}$, …, $t_{[m]}$, то $D_x I$ есть n-интеграл, зависящий от переменных x, t, t_x, $t_{[2]}$, …, $t_{[m]}$, $t_{[m+1]}$. Следовательно,

$$0 = Z(D_x I) = P_m^*(Z) D_x I + \left(\alpha_{m+1}(T) - \sum_{j=1}^{N_1} \beta_j \alpha_{m+1}(T_j)\right) \frac{\partial}{\partial t_{[m+1]}} D_x I =$$

$$= \left(\alpha_{m+1}(T) - \sum_{j=1}^{N_1} \beta_j \alpha_{m+1}(T_j)\right) \frac{\partial}{\partial t_{[m+1]}} D_x I.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial t_{[m+1]}} D_x I = \frac{\partial}{\partial t_{[m]}} I \neq 0$, тогда $\alpha_{m+1}(T) = \sum\limits_{j=1}^{N_1} \beta_j \alpha_{m+1}(T_j)$, а это означает, что $P_{m+1}^*(Z) \equiv 0$. Применим последовательно оператор Z к n-интегралам $D_x^2 I$, $D_x^3 I$, …, получим, что $\alpha_{m+i}(T) = \sum\limits_{j=1}^{N_1} \beta_j \alpha_{m+i}(T_j)$ для любого $i = 1, 2, 3, \ldots$, то есть $P_{m+i}^*(Z) \equiv 0$ для любого натурального числа i. Следовательно, $Z \equiv 0$. Итак, алгебра Ли M конечномерна. Тогда линейная оболочка векторных полей $\{Y_j\}_1^{\infty}$ имеет конечную размерность, скажем N. Пусть N_2-любое число, удовлетворяющее условию $N_2 \geq N$. Получаем, что алгебра L_n, порожденная $\{Y_j\}_1^N \cup \{X_j\}_1^N$, есть субалгебра M, и следовательно L_n конечномерна. Теорема 2 доказана.

Эта теорема верна и в обратную сторону. Из конечномерности алгебры L_n следует существование n-интеграла, но он зависит явно от n. Нам не удалось доказать существование интеграла, независящего явно от n.

Докажем, что если алгебра Ли L_n для уравнения (1) конечномерна, то оно допускает нетривиальный n-интеграл. Предположим, что размерность характеристической алгебры Ли L_n конечна, обозначим ее N_1. Пусть N — размерность линейной оболочки векторных полей $\{Y_j\}_1^\infty$. Зададим $N_2 = N_1 - N$. Введем

$$L_x^{(N_2)} = \{T^{(m)} = P_{N_2}^{(N)}(T) : T \in L_x\},$$

где

$$P_{N_2}^{(N)}\left(\sum_{k=-N}^{-1} a_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial}{\partial t_{[k]}}\right) = \sum_{k=-N}^{-1} a_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{k=0}^{N_2} a_k \frac{\partial}{\partial t_{[k]}}. \tag{23}$$

Пусть $\{T_{0j}\}_{j=1}^{N_1}$ образует базис в $L_x^{(N_2)}$. Тогда мы имеем N_1 уравнений $T_{0j}G = 0$ для функции G, зависящей от N_1+2 переменных: x, t, t_x, …, $t_{[N_2]}$, t_{-1}, …, t_{-N}. Согласно Теореме Якоби, такая функция G, не являющаяся константой, существует. Более того, она не зависит от переменных t_{-j}, $j = 1, 2, \dots N$ и удовлетворяет уравнению $TG = 0$ для любого $T \in L_n$. Такая функция $G = G(x, t, t_x, \dots, t_{[N_2]})$ не единственна, но любое другое решение этих уравнений, зависящее от того же множества переменных, может быть представлено как $h(x, G)$ для некоторой функции h.

Так как $D^{-1}Y_jD = Y_{j+1}$, $j = 0, 2, 3, \dots$, $D^{-1}Y_1D = Y_2+X_1$, $D^{-1}X_jD = X_{j+1}$, то для любого векторного поля Z из L_n, мы имеем $D^{-1}ZD = Z^*+\lambda X_{N+1}$ для некоторого векторного поля Z^* из L_n и некоторой функции λ. Итак,

$$ZDG = D(D^{-1}ZDG) = D(Z^* + \lambda X_{N+1})G = 0$$

для любого $Z \in L_n$. Следовательно, DG также есть решение упомянутой выше системы дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому $DG = h(x, G)$.

Решая обыкновенное разностное уравнение $DG = h(x, G)$ первого порядка, получаем $G = H(x, n, c)$, где c — произвольная постоянная. Решая уравнение $G = H(x, n, c)$ относительно c, получаем $c = I(G, x, n)$. Данная функция $I(G, x, n)$ есть нетривиальный n-интеграл уравнения (24). Действительно, $DI(G, x, n) = Dc = c = I(G, x, n)$. Итак, DI=I. То есть уравнение (1) допускает нетривиальный n-интеграл.

4. Частный случай: $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$

Конечномерность алгебр Ли L_x и L_n была использована в работах [8] и [9] для классификации интегрируемых по Дарбу дискретных уравнений специального вида

$$t_{1x} = t_x + d(t, t_1)\,. \tag{24}$$

Результат этой классификации представлен в следующей теореме [9].

Теорема 3. *Уравнение (24) допускает нетривиальные x- и n-интегралы тогда и только тогда, когда $d(t, t_1)$ принадлежит одному из следующих классов:*

(1) $d(t, t_1) = A(t_1 - t)$, *где* $A(t_1 - t)$ *задается неявно* $A(t_1 - t) = \frac{d}{d\theta}P(\theta)$, $t_1 - t = P(\theta)$, *с* $P(\theta)$, *являющейся произвольным квазиполиномом, т.е. функцией, удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению*

$$P^{(N+1)} = \mu_N P^{(N)} + \ldots + \mu_1 P' + \mu_0 P \tag{25}$$

с постоянными коэффициентами μ_k, $0 \leqslant k \leqslant N$,

(2) $d(t, t_1) = C_1(t_1^2 - t^2) + C_2(t_1 - t)$,

(3) $d(t, t_1) = \sqrt{C_3 e^{2\alpha t_1} + C_4 e^{\alpha(t_1+t)} + C_3 e^{2\alpha t}}$,

(4) $d(t, t_1) = C_5(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t}) + C_6(e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t})$,

где $\alpha \neq 0$, C_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, *произвольные константы. Более того, некоторые нетривиальные x-интегралы F и n-интегралы I в каждом из этих случаев имеют вид*

i) $F = x - \int^{t_1-t} \frac{ds}{A(s)}$, $I = L(D_x)t_x$, *где* $L(D_x)$*-дифференциальный оператор, который обращает в нуль* $\frac{d}{d\theta}P(\theta)$ *где* $D_x\theta = 1$.

ii) $F = \frac{(t_3-t_1)(t_2-t)}{(t_3-t_2)(t_1-t)}$, $I = t_x - C_1t^2 - C_2t$,

iii) $F = \int^{t_1-t} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha s}ds}{\sqrt{C_3\mathrm{e}^{2\alpha s}+C_4\mathrm{e}^{\alpha s}+C_3}} - \int^{t_2-t_1} \frac{ds}{\sqrt{C_3\mathrm{e}^{2\alpha s}+C_4\mathrm{e}^{\alpha s}+C_3}}$, $I = 2t_{xx} - \alpha t_x^2 - \alpha C_3\mathrm{e}^{2\alpha t}$,

iv) $F = \frac{(\mathrm{e}^{\alpha t}-\mathrm{e}^{\alpha t_2})(\mathrm{e}^{\alpha t_1}-\mathrm{e}^{\alpha t_3})}{(\mathrm{e}^{\alpha t}-\mathrm{e}^{\alpha t_3})(\mathrm{e}^{\alpha t_1}-\mathrm{e}^{\alpha t_2})}$, $I = t_x - C_5e^{\alpha t} - C_6e^{-\alpha t}$.

Уравнение вида $\tau_x = A(\tau)$, где $\tau = t_1 - t$, интегрируемо в квадратурах. Но чтобы получить результат, следует выразить интеграл и затем найти обратную функцию. Общее решение задано неявно

$$t(n,x) = t(0,x) + \sum_{j=0}^{n-1} P(x + c_j), \tag{26}$$

где $t(0,x)$ и c_j — произвольные функции от переменных x и j соответственно, и $A(\tau) = P'(\theta)$, $t_1 - t = P(\theta)$. Действительно, мы имеем $\tau_x = P_\theta(\theta)\theta_x = P_\theta(\theta)$, а это означает, что $\theta_x = 1$, поэтому $\tau(n,x) = P(x + c_n)$. Решая уравнение $t(n+1,x) - t(n,x) = P(x + c_n)$, получаем указанный выше результат. Из требования, чтобы $\tau_x = A(\tau)$ была интегрируемой по Дарбу, следует условие на функцию P: она должна удовлетворять обыкновенному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Классификационная теорема 3 содержит все интегрируемые по Дарбу уравнения специального вида (24) вместе с соответствующими им нетривиальными x- и n- интегралами. Однако, характеристические алгебры L_x и L_n для интегрируемого по Дарбу уравнения(24) не были определены в работе [9]. В следующих двух подразделах мы представим характеристические алгебры Ли L_x и L_n для каждого из четырех классов, описанных в Теореме 3.

4.1. Алгебры Ли L_x для интегрируемых по Дарбу уравнений $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$. В работе [8] доказано , что если уравнение $t_{1x} = t_x + d(t,t_1)$ допускает нетривиальный x-интеграл, тогда оно допускает нетривиальный x-интеграл, не зависящий от x, поэтому рассматриваемые векторные поля не содержат слагаемых вида $\partial/\partial x$. Введем обозначения

$$\tilde{X} = [X, K] = \sum_{k=-\infty,}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_k} \qquad t_0 := t,$$

$$J := [\tilde{X}, K]\,.$$

4.1.1. Случай 1: $t_{1x} = t_x + A(t_1 - t)$. Непосредственные вычисления показывают, что таблица умножения для алгебры Ли L_x имеет вид

L_x	X	K	$\tilde{X}$
X	0	$\tilde{X}$	0
K	$-\tilde{X}$	0	0
$\tilde{X}$	0	0	0

4.1.2. Случай 2: $t_{1x} = t_x + C_1(t_1^2 - t^2) + C_2(t_1 - t)$. Можно проверить, что

$$J = 2C_1 \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} (t_k - t)\frac{\partial}{\partial t_k}$$

и

$$[J,K] = 2C_1^2 \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} (t_k - t)^2 \frac{\partial}{\partial t_k} = 2C_1(K - t_x\tilde{X}) - (2C_1t + C_2)J$$

и таблица умножения для алгебры Ли L_x в этом случае имеет вид

L_x	X	K	$\tilde{X}$	J
X	0	$\tilde{X}$	0	0
K	$-\tilde{X}$	0	$-J$	$-2C_1(K-t_x\tilde{X})+(2C_1t+C_2)J$
$\tilde{X}$	0	J	0	0
J	0	$2C_1(K-t_x\tilde{X})-(2C_1t+C_2)J$	0	0

4.1.3. Случай 3: $t_{1x} = t_x + \sqrt{C_3e^{2\alpha t_1}+C_4e^{\alpha(t_1+t)}+C_3e^{2\alpha t}}$. Можно убедиться, что $[\tilde{X},K]=\alpha K-\alpha t_x\tilde{X}$, и таблица умножения для алгебры Ли L_x имеет вид

L_x	X	K	$\tilde{X}$
X	0	$\tilde{X}$	0
K	$-\tilde{X}$	0	$-\alpha K+\alpha t_x\tilde{X}$
$\tilde{X}$	0	$\alpha K-\alpha t_x\tilde{X}$	0

4.1.4. Случай 4: $t_{1x}=t_x+C_5(e^{\alpha t_1}-e^{\alpha t})+C_6(e^{-\alpha t_1}-e^{-\alpha t})$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$J=\alpha\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\{C_5(e^{\alpha t_k}-e^{\alpha t})-C_6(e^{-\alpha t_k}-e^{-\alpha t})\}\frac{\partial}{\partial t_k}$$

и

$$[J,K]=2C_5C_6\alpha^2\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\{e^{\alpha(t-t_k)}+e^{\alpha(t_k-t)}-2\}\frac{\partial}{\partial t_k}=$$
$$=\alpha^2(C_5e^{\alpha t}+C_6e^{-\alpha t})(K-t_x\tilde{X})+\alpha(C_6e^{-\alpha t}-C_5e^{\alpha t})J.$$

Обозначим

$$\beta_1=\alpha^2(C_5e^{\alpha t}+C_6e^{-\alpha t}),\qquad \beta_2=\alpha(C_6e^{-\alpha t}-C_5e^{\alpha t}).$$

В этом случае таблица умножения для алгебры Ли L_x принимает вид

L_x	X	K	$\tilde{X}$	J
X	0	$\tilde{X}$	0	0
K	$-\tilde{X}$	0	$-J$	$-\beta_1(K-t_x\tilde{X})-\beta_2J$
$\tilde{X}$	0	J	0	$\alpha^2K-\alpha^2\tilde{X}$
J	0	$\beta_1(K-t_x\tilde{X})+\beta_2J$	$\alpha^2\tilde{X}-\alpha^2K$	0

4.2. Алгебры Ли L_n для интегрируемого по Дарбу уравнения $t_{1x}=t_x+d(t,t_1)$.

4.2.1. Случай 1: $t_{1x}=t_x+A(t_1-t)$. Алгебра Ли L_n порождена только двумя векторными полями X_1 и Y_1, и может иметь только конечную размерность. Если $A(t_1-t)=t_1-t+c$, где c -некоторая константа, то алгебра Ли L_n тривиальна, состоит только из векторных полей X_1 и Y_1 , с коммутативным соотношением $[X_1,Y_1]=0$. Если $A(t_1-t)\neq t_1-t+c$, то можно выбрать базис в L_n состоящий из $W=\frac{\partial}{\partial\theta}$, $Z=\sum_{k=0}^{k=\infty}D_x^kp(\theta)\partial/\partial t_{[k]}$, с $\theta=x+\alpha_n$, $C_1=[W,Z]$, $C_{k+1}=[W,C_k]$, $1\leqslant k\leqslant N-1$. Таблица умножения для L_n в этом случае имеет вид

L_n	W	Z	C_1	C_2	$\ldots$	C_k	$\ldots$	C_{N-1}	C_N
W	0	C_1	C_2	C_3	$\ldots$	C_{k+1}	$\ldots$	C_N	K
Z	$-C_1$	0	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
C_1	$-C_2$	0	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_N	$-K$	0	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0

где $K=\mu_0Z+\mu_1C_1+\ldots+\mu_NC_N$.

4.2.2. Случаи 2 и 4: $t_{1x} = t_x + C_1(t_1^2 - t^2) + C_2(t_1 - t)$ *и* $t_{1x} = t_x + C_5(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t}) + C_6(e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t})$. В обоих случаях алгебра Ли L_n тривиальна, состоит только из X_1 и Y_1 с коммутативным соотношением $[X_1, Y_1] = 0$.

4.2.3. Случай 3: $t_{1x} = t_x + \sqrt{C_3 e^{2\alpha t_1} + C_4 e^{\alpha(t_1+t)} + C_3 e^{2\alpha t}}$. Обозначим $\tilde{X}_1 = A(\tau_{-1}) e^{-\alpha\tau_{-1}} \frac{\partial}{\partial \tau_{-1}}$ и $\tilde{Y}_1 = A(\tau_{-1}) Y_1$, $C_2 = [\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1]$. Непосредственные вычисления показывают, что таблица умножения для алгебры L_n имеет вид

L_n	$\tilde{X}_1$	$\tilde{Y}_1$	C_2
$\tilde{X}_1$	0	C_2	$\alpha^2 C_3 \tilde{Y}_1 + C_4/(2C_3)\tilde{X}_1$
$\tilde{Y}_1$	$-C_2$	0	K
C_2	$-\alpha^2 C_3 \tilde{Y}_1 - C_4/(2C_3)\tilde{X}_1$	$-K$	0

где $K = -(\alpha^2 C_4/2)\tilde{Y}_1 + (2\alpha^2 C_4 e^{\alpha\tau_{-1}} - \alpha^2 C_3)\tilde{X}_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забродин А.В. *Разностные уравнения Хироты* // ТМФ. 1997. 113:2. С. 179—230.
2. F.W. Nijhoff, H.W. Capel, *The discrete Korteweg-de Vries equation* // Acta Applicandae Mathematicae. 1995. **39**. P. 133–158.
3. B. Grammaticos, G. Karra, V. Papageorgiou, A. Ramani, *Integrability of discrete-time systems, Chaotic dynamics* // NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys. 1992. **298**. P. 75–90.
4. Адлер В.Э., Старцев С.Я. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. 1999. 121:2. С. 271–284.
5. M.E. Goursat,*Équations aux dérivées partielles.* Annales de la Famlté des Sciences de l'Universite' de Toulouse pour les Sciences mathématiques et les sciences physiques, (Ser.2). 1899. V.1.
6. Жибер А.В., Мукминов Ф.Х. *Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры* // Задачи математической физики и асимптотики их решений, ред. Л.А. Калякин. 1991. Уфа. Институт математики. РАН. С. 13–33.
7. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *О характеристических алгебрах Ли уравнений* $u_{xy} = f(u, u_x)$ // Фундамент. и прикл. матем. 2006. 12:7. С. 65–78.
8. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan, *On the classification of Darboux integrable chains* // Journal of Math. Phys., **49**. Issue: 10. 102702 (2008) //`arXiv : nlin/0806.3144`.
9. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan, *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$. Journal of Math. Phys., **50**, 102710 (2009) //`arXiv : 0907.3785`.
10. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана.* Preprint, Баш.филиал академии наук СССР. 1981. Уфа.
11. Жибер А.В. *Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечномерной алгеброй симметрии* // Изв. РАН. Сер. матем.. 1994. 58:4. С. 33–54.

Наталья Александровна Желтухина,
Бількентский университет,
Бількент,
06800, Анкара, Турция
E-mail: `natalya@fen.bilkent.edu.tr`

Альфия Ураловна Сакиева,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `alfiya85.85@mail.ru`

Исмагил Талгатович Хабибуллин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `habibullinismagil@gmail.com`