

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРАВИЛЬНОЙ БИФУРКАЦИИ В МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А.А. ВЫШИНСКИЙ, Л.С. ИБРАГИМОВА, С.А. МУРТАЗИНА,
М.Г. ЮМАГУЛОВ

Аннотация. Работа посвящена изложению нового операторного метода исследования широкого класса бифуркационных задач с многомерным вырождением. Метод позволяет обнаруживать бифуркационные значения параметров; он приводит к итерационной процедуре и асимптотическим формулам приближенного исследования задач, зависящих от многих параметров. Приводятся приложения в теории динамических систем: в задачах о бифуркации неподвижных точек, вынужденных колебаний и автоколебаний.

Ключевые слова: бифуркация, динамические системы, операторные уравнения, функционализация параметра, асимптотические формулы

Динамические системы, как правило, зависят от внешних и внутренних параметров. Изменение этих параметров может приводить к качественным перестройкам функционирования системы — различным бифуркациям. Одними из основных при исследовании бифуркаций являются вопросы о достаточных признаках бифуркаций и приближенном построении возникающих решений системы. Исследованию таких вопросов посвящена обширная литература (см., например, [1]–[5] и имеющуюся там библиографию). При этом большинство работ посвящено изучению однопараметрических систем, линеаризованные уравнения которых имеют простые вырождения. Вместе с тем следует отметить, что многие теоретические и практические задачи приводят к системам, зависящим от многих параметров и имеющим сложные вырождения.

В настоящей статье приводятся основные положения нового операторного метода исследования широкого класса бифуркационных задач с многомерным вырождением. Метод позволяет обнаруживать бифуркационные значения параметров; он приводит к итерационной процедуре построения решений и асимптотическим формулам, позволяющим провести приближенное исследование задач, зависящих от многих параметров. Приводятся приложения в теории дискретных динамических систем, в задачах о бифуркации вынужденных колебаний, диффеоморфизмов и автоколебаний. Часть приводимых здесь результатов анонсирована в работах [6, 7], некоторые приложения рассмотрены в [8, 9].

A. A. VYSHINSKIY, L. S. IBRAGIMOVA, S. A. MURTAZINA, M. G. YUMAGULOV, AN OPERATOR METHOD FOR APPROXIMATELY STUDYING REGULAR BIFURCATION IN MULTIPARAMETER DYNAMICAL SYSTEMS.

© Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. 2010.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 10-01-93112-НЦНИЛ_а.

Поступила 5 апреля 2010 г.

1. БИФУРКАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ.

В этом параграфе приводятся основные положения предлагаемого метода исследования бифуркационных задач. Рассматривается операторное уравнение

$$x = B(\mu)x + b(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^m, \quad (1)$$

в котором матрица $B(\mu)$ гладко (непрерывно дифференцируемо) зависит от параметра μ , а нелинейность $b(x, \mu)$ также гладко зависит от μ и представима в одном из следующих видов:

- либо

$$b(x, \mu) = b_2(x, \mu) + \tilde{b}_3(x, \mu), \quad (2)$$

- либо

$$b(x, \mu) = b_3(x, \mu) + \tilde{b}_4(x, \mu), \quad (3)$$

- либо

$$b(x, \mu) = b_2(x, \mu) + b_3(x, \mu) + \tilde{b}_4(x, \mu), \quad (4)$$

где $b_2(x, \mu)$ и $b_3(x, \mu)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{b}_3(x, \mu)$ и $\tilde{b}_4(x, \mu)$ являются гладкими по x , при этом $\tilde{b}_3(x, \mu) = O(\|x\|^3)$ и $\tilde{b}_4(x, \mu) = O(\|x\|^4)$, $x \rightarrow 0$, равномерно по μ .

Уравнение (1) при всех значениях μ имеет нулевое решение.

Приводимые ниже результаты остаются справедливыми (с естественными модификациями) и в случаях, когда нелинейность $b(x, \mu)$ определена по x и μ лишь в некоторых окрестностях точек $x = 0$ и $\mu = \mu_0$.

Ниже основным будет следующее понятие.

Пусть $e \in R^N$ — некоторый ненулевой вектор. Значение μ_0 параметра μ назовем *правильной точкой бифуркации уравнения (1) по направлению вектора e* , если существуют $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывные функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $x = x(\varepsilon)$ такие, что:

- 1) $\mu(0) = \mu_0$, $x(0) = 0$;
- 2) $\|x(\varepsilon) - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 3) для каждого $\varepsilon \geq 0$ вектор $x(\varepsilon)$ является решением уравнения (1) при $\mu = \mu(\varepsilon)$.

Векторы $x(\varepsilon)$ и значения $\mu(\varepsilon)$ назовем *бифурцирующими решениями* уравнения (1).

Правильные точки бифуркации соответствуют тому, что уравнение (1) при $\mu = \mu(\varepsilon)$ имеет решение $x = x(\varepsilon)$ так, что кривая $x = x(\varepsilon)$ в пространстве R^N при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотически стремится к прямой $x = \varepsilon e$ (см. Рис.1).

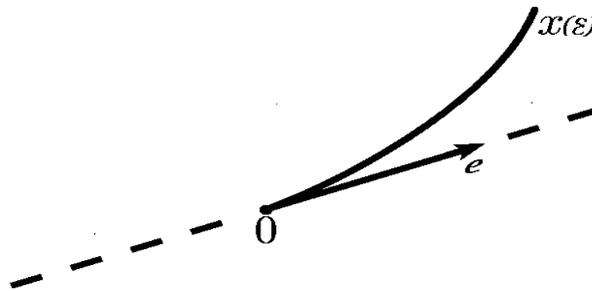


Рис. 1 (правильная бифуркация)

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть значение μ_0 параметра μ является правильной точкой бифуркации уравнения (1) по направлению вектора e . Тогда вектор e будет собственным для матрицы $B(\mu_0)$, отвечающим собственному значению 1.

В силу этой леммы правильные точки бифуркации уравнения (1) имеет смысл искать лишь среди тех μ_0 , при которых матрица $B(\mu_0)$ имеет собственное значение 1. При этом в качестве направления следует использовать собственный вектор e .

В настоящей статье задача о правильных точках бифуркации рассматривается в двух основных случаях, когда матрица $B(\mu_0)$ имеет:

- 1) простое собственное значение 1;
- 2) полупростое собственное значение 1 кратности 2.

1.1. Случай простого собственного значения 1. Рассмотрим сначала задачу о правильных точках бифуркации операторного уравнения (1), когда матрица $B(\mu_0)$ имеет простое собственное значение 1. Параметр μ в этом случае естественно считать скалярным, а именно, пусть $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, где δ — некоторое положительное число. Приводимые в этом пункте построения и утверждения получены в [6].

Пусть e и g — собственные векторы оператора $B(\mu_0)$ и сопряженного оператора $B^*(\mu_0)$, соответствующие собственному значению 1. Эти векторы будем считать выбранными в соответствии с равенствами:

$$\|e\| = 1, \quad (e, g) = 1. \quad (5)$$

Через $B'(\mu)$ обозначим производную оператора $B(\mu)$ по параметру μ .

Теорема 1. Пусть оператор $B(\mu_0)$ имеет простое собственное значение 1. Пусть

$$(B'(\mu_0)e, g) \neq 0. \quad (6)$$

Тогда μ_0 является правильной точкой бифуркации уравнения (1) по направлению векторов e и $-e$.

1.1.1. Вспомогательные сведения. Приведем вспомогательные сведения, необходимые для приближенного построения существующих в условиях теоремы 1 бифурцирующих решений $x = x(\varepsilon)$ и $\mu = \mu(\varepsilon)$ уравнения (1). Без ограничения общности можно считать, что $\mu_0 \neq 0$.

Пусть H_0 — это одномерное подпространство пространства $H = R^N$, содержащее вектор e , т.е. H_0 является собственным подпространством оператора $B_0 = B(\mu_0)$, отвечающим собственному значению 1. Пространство $H = R^N$ может быть представлено в виде $H = H_0 \oplus H^0$, где H^0 — дополнительное к H_0 инвариантное для B_0 подпространство. Подпространство H^0 может быть описано равенством

$$H^0 = \{x : x \in H, (x, g) = 0\}.$$

Спектр σ оператора $B_0 : H \rightarrow H$ представим в виде $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 = \{1\}$, а σ_2 — спектр оператора $B_0 : H^0 \rightarrow H^0$. В частности, $1 \notin \sigma(B_0 : H^0 \rightarrow H^0)$ и, следовательно, существует оператор

$$(I - B_0)^{-1} : H^0 \rightarrow H^0. \quad (7)$$

Определим действующий в H оператор

$$Fh = h - \mu_0(h, g)B'e - B_0h, \quad h \in H,$$

где обозначено $B_0 = B(\mu_0)$ и $B' = B'(\mu_0)$. В силу условия (6) оператор $F : H \rightarrow H$ обратим. Положим

$$\Gamma_0 = F^{-1} : H \rightarrow H. \quad (8)$$

Оператор (8) может быть вычислен в соответствии со следующим утверждением.

Лемма 2. Оператор Γ_0 при любом $y \in H$ вычисляется по формуле $\Gamma_0 y = h_0 + h^0$, где

$$h_0 = -\frac{(y, g)e}{\mu_0(B'e, g)},$$

$$h^0 = (I - B_0)^{-1} \left[y - \frac{(y, g)B'e}{(B'e, g)} \right].$$

1.1.2. *Главные асимптотики и тип бифуркации.* Приведем асимптотические формулы для существующих в условиях теоремы 1 бифурцирующих решений $x = x(\varepsilon)$ и $\mu = \mu(\varepsilon)$ уравнения (1).

Теорема 2. Пусть нелинейность $b(x, \mu)$ представляется в виде (2). Тогда существующие в условиях теоремы 1 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ и $\mu = \mu(\varepsilon)$ уравнения (1) представимы в виде

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + o(\varepsilon^2), \quad \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + o(\varepsilon), \quad (9)$$

где

$$e_1 = \Gamma_0 b_2(e, \mu_0), \quad \mu_1 = -\frac{(b_2(e, \mu_0), g)}{(B'e, g)}, \quad (10)$$

и Γ_0 — оператор (8).

Формулы вида (9) будем называть *главными асимптотиками* бифурцирующих решений $x(\varepsilon)$ и $\mu = \mu(\varepsilon)$ уравнения (1).

Из теоремы 2 следует, что если нелинейность $b(x, \mu)$ начинается с квадратичных слагаемых, то главные асимптотики бифурцирующих решений уравнения (1) имеют вид (9). Ясно, что в формулах (9) вместо e можно использовать и вектор $-e$; в этом случае вместо g следует использовать вектор $-g$. При этом вектор e_1 из (10) не изменится, а число μ_1 поменяет знак. Следовательно, верна

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 выполнено равенство (2), при этом

$$(b_2(e, \mu_0), g) \neq 0. \quad (11)$$

Тогда правильная бифуркация по направлению векторов e и $-e$ уравнения (1) является *двусторонней*: бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ уравнения (1) существуют как при $\mu < \mu_0$, так и при $\mu > \mu_0$.

Пусть для определенности $\mu_1 > 0$. Тогда при всех малых $\varepsilon > 0$ верно неравенство $\mu(\varepsilon) > \mu_0$. Следовательно, уравнение (1) при $\mu = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + o(\varepsilon) > \mu_0$ имеет решения $x = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + o(\varepsilon^2)$, а при $\mu = \mu_0 - \varepsilon \mu_1 + o(\varepsilon) < \mu_0$ — решения $x = -\varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + o(\varepsilon^2)$.

В дальнейшем отмеченное в теореме 3 свойство бифуркации будем называть свойством *транскритичности*. Другими словами, правильную бифуркацию будем называть транскритической, если бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ уравнения (1) существуют как при $\mu < \mu_0$, так и при $\mu > \mu_0$ (см. Рис. 2).

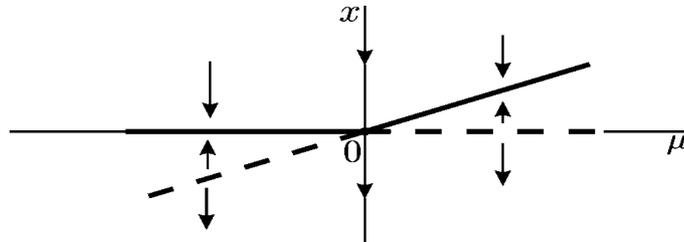


Рис. 2 (транскритическая бифуркация)

Теорема 4. Пусть нелинейность $b(x, \mu)$ представляется в виде (3). Тогда существующие в условиях теоремы 1 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ и $\mu = \mu(\varepsilon)$ уравнения (1) представимы в виде

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon^2 \mu_2 + o(\varepsilon^2), \quad (12)$$

где

$$e_2 = \Gamma_0 b_3(e, \mu_0), \quad \mu_2 = -\frac{(b_3(e, \mu_0), g)}{(B'e, g)}. \quad (13)$$

Таким образом, если нелинейность $b(x, \mu)$ начинается с кубических слагаемых, то главные асимптотики бифурцирующих решений уравнения (1) имеют вид (12). Легко видеть, что вектор e_2 из (13) заменится на $-e_2$, а число μ_2 не изменится, если заменить e на $-e$, а g на $-g$. Следовательно, верна

Теорема 5. Пусть в условиях теоремы 1 выполнено равенство (3), при этом

$$(b_3(e, \mu_0), g) \neq 0. \quad (14)$$

Тогда правильная бифуркация по направлению векторов e и $-e$ уравнения (1) является односторонней: бифурцирующие решения уравнения (1) возникают только при $\mu > \mu_0$ (если $\mu_2 > 0$) или только при $\mu < \mu_0$ (если $\mu_2 < 0$). При этом возникают два семейства бифурцирующих решений:

$$x_+(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad x_-(\varepsilon) = -\varepsilon e - \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3).$$

В дальнейшем правильную бифуркацию будем называть *бифуркацией типа вилки*, если бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ уравнения (1) существуют или только при $\mu < \mu_0$, или только при $\mu > \mu_0$ (см. Рис. 3). В условиях теоремы 5 имеет место бифуркация типа вилки.

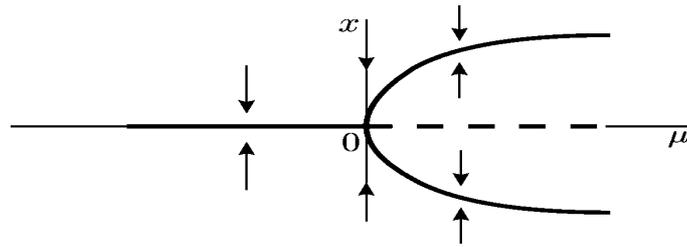


Рис. 3 (бифуркация типа вилки)

1.1.3. Асимптотические формулы второго порядка. Наряду с главными асимптотиками (9) и (12) могут быть получены и асимптотические формулы более высокого порядков. Приведем для иллюстрации схему получения асимптотики второго порядка.

Пусть нелинейность $b(x, \mu)$ представима в виде (4). Обозначим $b_2 = b_2(e, \mu_0)$, $b'_{2x} = b'_{2x}(e, \mu_0)$, $b'_{2\mu} = b'_{2\mu}(e, \mu_0)$, $b_3 = b_3(e, \mu_0)$, $B' = B'(\mu_0)$ и $B'' = B''(\mu_0)$.

Теорема 6. Пусть нелинейность $b(x, \mu)$ представима в виде (4). Тогда существующие в условиях теоремы 1 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$ и $\mu = \mu(\varepsilon)$ уравнения (1) представимы в виде

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + o(\varepsilon^2), \quad (15)$$

где e_1 и μ_1 — определены равенствами (10),

$$e_2 = \Gamma_0 \left(\mu_1 B' \Gamma_0 b_2 + \frac{\mu_1^2}{2} B'' e + b'_{2x} \Gamma_0 b_2 + \mu_1 b'_{2\mu} + b_3 \right), \quad (16)$$

$$\mu_2 = (e_2, g) \mu_0. \quad (17)$$

Здесь Γ_0 — оператор (8),

При $\mu_1 = 0$ формулы (16) и (17) становятся более простыми:

$$e_2 = \Gamma_0 (b'_{2x} \Gamma_0 b_2 + b_3), \quad \mu_2 = -\frac{(b'_{2x} \Gamma_0 b_2 + b_3, g)}{(B'e, g)}. \quad (18)$$

1.1.4. *Тип бифуркации: особый случай.* В теоремах 3 и 5 соотношения (11) и (14) определяют тип бифуркации: транскритический или типа вилки. Если же, например, $(b_2(e, \mu_0), g) = 0$, то тип бифуркации теорема 3 не определяет. В этом случае можно воспользоваться следующим утверждением.

Теорема 7. Пусть в условиях теоремы 1 нелинейность $b(x, \mu)$ представима в виде (4). Пусть

$$(b_2, g) = 0, \quad \mu_2 = -\frac{(b_3 + b'_{2x}\Gamma_0 b_2, g)}{(B'e, g)} \neq 0,$$

где, как обычно, $b_2 = b_2(e, \mu_0)$, $b_3 = b_3(e, \mu_0)$ и $b'_{2x} = b'_{2x}(e, \mu_0)$. Тогда имеет место бифуркация типа вилки: бифурцирующие решения уравнения (1) по направлению векторов e и $-e$ возникают только при

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon^2 \mu_2 + o(\varepsilon^2).$$

При этом возникают два семейства бифурцирующих решений

$$x_+(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad x_-(\varepsilon) = -\varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 - \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3),$$

где

$$e_1 = (I - B_0)^{-1} b_2, \quad e_2 = \Gamma_0 b'_{2x} \Gamma_0 b_2;$$

здесь $(I - B_0)^{-1}$ — оператор (7).

Таким образом, в условиях теоремы 7 бифурцирующие решения возникают только при $\mu > \mu_0$ (если $\mu_2 > 0$) или только при $\mu < \mu_0$ (если $\mu_2 < 0$).

Справедливость этой теоремы следует из формул (15) и (18).

1.2. Случай полупростого собственного значения 1. Рассмотрим теперь задачу о правильных точках бифуркации операторного уравнения (1), когда матрица $B(\mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Параметр μ в этом случае естественно считать двумерным, а именно, пусть $\mu = (\alpha, \beta)$, где α и β — скалярные параметры. Тогда уравнение (1) примет вид

$$x = B(\alpha, \beta)x + b(x, \alpha, \beta). \quad (19)$$

Обозначим $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ и $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$.

Пусть e и g — линейно независимые векторы, так что $B_0 e = e$ и $B_0 g = g$. Сопряженный оператор B_0^* также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственные векторы e^* и g^* . Эти векторы можно выбрать исходя из соотношений:

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \quad (20)$$

Замечание 1. В качестве вектора e может быть выбран любой из собственных векторов матрицы $B(\mu_0)$, отвечающий собственному значению 1, при этом можно считать, что $\|e\| = 1$. Векторы g , e^* и g^* подбираются в соответствии с соотношениями (20).

Правильные бифуркации уравнения (19) можно изучать, выбрав в качестве “направления” любой из собственных векторов оператора B_0 , отвечающих собственному значению 1. Для определенности выберем собственный вектор e .

Теорема 8. Пусть оператор $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Пусть

$$\det \begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (21)$$

Тогда μ_0 является правильной точкой бифуркации уравнения (19) по направлению вектора e .

Здесь B'_α и B'_β — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\alpha, \beta)$ по α и β соответственно.

Доказательство теоремы 8 приводится в п. 5.

Подчеркнем, что в теореме 8 речь идет о правильной бифуркации по направлению собственного вектора e оператора B_0 , отвечающего полупростому собственному значению 1 кратности 2. В отличие от случая простого собственного значения 1, когда бифуркация может иметь только два направления e и $-e$, в рассматриваемом случае бифуркация может иметь континуум различных направлений вида $e(t) = e \cos t + g \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

1.2.1. Вспомогательные сведения. С целью получения асимптотических формул для существующих в условиях теоремы 8 бифурцирующих решений уравнения (19) приведем вспомогательные сведения.

Пусть H_0 — это двумерное подпространство пространства $H = R^N$, содержащее векторы e и g , т.е. H_0 является собственным подпространством оператора B_0 , отвечающим полупростому собственному значению 1 кратности 2. Пространство $H = R^N$ может быть представлено в виде $H = H_0 \oplus H^0$, где H^0 — дополнительное к H_0 инвариантное для B_0 подпространство. Подпространство H^0 может быть представлено равенством

$$H^0 = \{x : x \in H, (x, e^*) = 0, (x, g^*) = 0\}.$$

Спектр σ оператора $B_0 : H \rightarrow H$ представим в виде $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 = \{1\}$, а $\sigma_2 = \sigma \setminus \sigma_1$ — спектр оператора $B_0 : H^0 \rightarrow H^0$. В частности, $1 \notin \sigma(B_0 : H^0 \rightarrow H^0)$; следовательно, существует обратный оператор

$$(I - B_0)^{-1} : H^0 \rightarrow H^0. \tag{22}$$

Определим действующий в H оператор

$$Fh = h - [(h, e^*)B'_\alpha e + (h, g^*)B'_\beta e] - B_0 h, \quad h \in H, \tag{23}$$

где обозначено $B'_\alpha = B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)$ и $B'_\beta = B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)$. В силу условия (21) оператор $F : H \rightarrow H$ обратим. Положим

$$\Gamma_0 = F^{-1} : H \rightarrow H. \tag{24}$$

Оператор (24) может быть вычислен в соответствии со следующим утверждением.

Лемма 3. Оператор $\Gamma_0 = F^{-1}$ при любом $y \in H$ вычисляется по формуле $\Gamma_0 y = h_0 + h^0$, где

$$h_0 = J_\alpha(y)e + J_\beta(y)g, \\ h^0 = (I - B_0)^{-1} [y + J_\alpha(y)B'_\alpha e + J_\beta(y)B'_\beta e].$$

Здесь $(I - B_0)^{-1}$ — оператор (22), а функционалы $J_\alpha(y)$ и $J_\beta(y)$ — это компоненты вектора

$$J(y) = \begin{bmatrix} J_\alpha(y) \\ J_\beta(y) \end{bmatrix},$$

который вычисляется по формуле $J(y) = -Q^{-1}\gamma(y)$, где

$$Q = \begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{bmatrix}, \quad \gamma(y) = \begin{bmatrix} (y, e^*) \\ (y, g^*) \end{bmatrix}.$$

В справедливости леммы 3 можно убедиться непосредственным подсчетом.

1.2.2. *Главные асимптотики.* Приведем главные асимптотики для существующих в условиях теоремы 8 бифурцирующих решений $x = x(\varepsilon)$, $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ уравнения (19). При этом основное внимание будет уделено рассмотрению правильной бифуркации по направлению вектора e .

Как и в п. 1.1, будем рассматривать различные случаи, когда нелинейность $b(x, \alpha, \beta)$ представима в одном из видов (2)-(4).

Ниже используются обозначения

$$b_2 = b_2(e, \alpha_0, \beta_0), \quad b_3 = b_3(e, \alpha_0, \beta_0), \quad (25)$$

$$b'_{2x} = b'_{2x}(e, \alpha_0, \beta_0), \quad b'_{2\alpha} = b'_{2\alpha}(e, \alpha_0, \beta_0), \quad b'_{2\beta} = b'_{2\beta}(e, \alpha_0, \beta_0). \quad (26)$$

Теорема 9. Пусть нелинейность $b(x, \alpha, \beta)$ представима в виде (2). Тогда существующие в условиях теоремы 8 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ уравнения (19) представимы в виде

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + o(\varepsilon^2), \quad \alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + o(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + o(\varepsilon), \quad (27)$$

где

$$e_1 = \Gamma_0 b_2, \quad \alpha_1 = J_\alpha(b_2), \quad \beta_1 = J_\beta(b_2). \quad (28)$$

Доказательство теоремы 9 приводится в п. 5.

Таким образом, если нелинейность $b(x, \alpha, \beta)$ начинается с квадратичных слагаемых, то главные асимптотики бифурцирующих решений уравнения (19) имеют вид (27).

Теорема 10. Пусть нелинейность $b(x, \alpha, \beta)$ представима в виде (3). Тогда существующие в условиях теоремы 8 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ уравнения (19) представимы в виде

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad \alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_2 + o(\varepsilon^2), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon^2 \beta_2 + o(\varepsilon^2), \quad (29)$$

где

$$e_2 = \Gamma_0 b_3, \quad \alpha_2 = J_\alpha(b_3), \quad \beta_2 = J_\beta(b_3). \quad (30)$$

Доказательство теоремы 10 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 9.

Таким образом, если нелинейность $b(x, \alpha, \beta)$ начинается с кубических слагаемых, то главные асимптотики бифурцирующих решений уравнения (19) имеют вид (29).

1.2.3. *Асимптотические формулы второго порядка.* Наряду с главными асимптотиками (27) и (29) бифурцирующих решений уравнения (19) могут быть получены и асимптотические формулы более высокого порядков. Приведем схему получения второй асимптотики.

Теорема 11. Пусть нелинейность $b(x, \alpha, \beta)$ представима в виде (4). Тогда существующие в условиях теоремы 8 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ уравнения (19) представимы в виде

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad (31)$$

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + o(\varepsilon^2), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + o(\varepsilon^2), \quad (32)$$

где e_1 , α_1 и β_1 — определены равенствами (28),

$$e_2 = \Gamma_0(\varphi + b_3), \quad \alpha_2 = J_\alpha(\varphi + b_3), \quad \beta_2 = J_\beta(\varphi + b_3);$$

здесь

$$\begin{aligned} \varphi = & \alpha_1 B'_\alpha \Gamma_0 b_2 + \beta_1 B'_\beta \Gamma_0 b_2 + \frac{\alpha_1^2}{2} B''_{\alpha\alpha} e + \alpha_1 \beta_1 B''_{\alpha\beta} e + \\ & + \frac{\beta_1^2}{2} B''_{\beta\beta} e + b'_{2x} \Gamma_0 b_2 + \alpha_1 b'_{2\alpha} + \beta_1 b'_{2\beta}. \end{aligned}$$

Здесь Γ_0 — оператор (24), B'_α , B'_β , $B''_{\alpha\alpha}$, $B''_{\alpha\beta}$, $B''_{\beta\beta}$ — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\alpha, \beta)$ по α и (или) β нужное число раз в точке (α_0, β_0) ; используются также обозначения (25) и (26).

Доказательство теоремы 11 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 9.

1.2.4. *Тип бифуркации: особый случай.* В приложениях часто встречается ситуация, когда в соотношениях (32) выполнены равенства $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$. В этом случае теорема 11 принимает вид

Теорема 12. Пусть нелинейность $b(x, \alpha, \beta)$ представима в виде (4). Пусть

$$(b_2, e^*) = (b_2, g^*) = 0. \quad (33)$$

Тогда существующие в условиях теоремы 8 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ уравнения (19) представимы в виде

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad (34)$$

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_2 + o(\varepsilon^2), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon^2 \beta_2 + o(\varepsilon^2), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= (I - B_0)^{-1} b_2, & e_2 &= \Gamma_0 (b'_{2x} \Gamma_0 b_2 + b_3), \\ \alpha_2 &= J_\alpha (b'_{2x} \Gamma_0 b_2 + b_3), & \beta_2 &= J_\beta (b'_{2x} \Gamma_0 b_2 + b_3); \end{aligned}$$

здесь $(I - B_0)^{-1}$ — оператор (22).

2. БИФУРКАЦИИ В ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В качестве первого приложения рассмотрим задачу о локальных бифуркациях в дискретных динамических системах, зависящих от скалярного или векторного параметра μ и описываемых уравнением

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

Всюду ниже предполагаются выполненными условия:

- D1. функция $f(x, \mu)$ определена при всех $x \in R^N$ и $\mu \in R^m$, при этом она непрерывно дифференцируема по x и μ ;
- D2. уравнение (36) при всех значениях μ имеет нулевую неподвижную точку $x = 0$, т.е.

$$f(0, \mu) \equiv 0.$$

Приводимые ниже результаты остаются справедливыми (с естественными модификациями) и в ряде случаев, когда условия D1 и D2 заменены более слабыми предположениями, в частности, когда функция $f(x, \mu)$ определена по x и μ лишь в некоторых окрестностях точек $x = 0$ и $\mu = \mu_0$.

2.1. Основные сценарии локальных бифуркаций. При изменении параметра μ поведение системы (36) может качественно изменяться: могут появиться или исчезнуть неподвижные точки или циклы различных периодов, может измениться характер их устойчивости и т.п., то есть возможны различные бифуркации. Ниже будем рассматривать локальные бифуркации в окрестности неподвижной точки $x = 0$ системы (36).

Обозначим через $A(\mu) = f'_x(0, \mu)$ матрицу Якоби вектор-функции $f(x, \mu)$, вычисленной в точке $x = 0$. Неподвижную точку $x = 0$ системы (36) при $\mu = \mu_0$ называют *гиперболической*, если матрица Якоби $A(\mu_0)$ не имеет собственных значений, равных по модулю 1. В противном случае говорят, что неподвижная точка $x = 0$ системы (36) является *негиперболической*.

Пусть при некотором $\mu = \mu_0$ неподвижная точка $x = 0$ системы (36) является негиперболической, т.е. матрица Якоби $A(\mu_0)$ имеет одно или несколько собственных значений, равных по модулю 1. В этом случае возможны различные сценарии локальных бифуркаций в окрестности точки $x = 0$. Эти сценарии определяются свойствами спектра матрицы $A(\mu_0)$. Основными здесь являются следующие случаи, когда матрица $A(\mu_0)$ имеет:

- H1) простое собственное значение 1;
- H2) простое собственное значение -1 ;

Н3) пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta i}$, где $0 < \theta < 1$ и θ рационально: $\theta = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, причем $\theta \neq \frac{1}{2}$.

Н4) имеет пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta i}$, где $0 < \theta < 1$ и θ — иррационально.

Во всех этих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы $A(\mu_0)$ не равны по модулю 1; случаи Н3) и Н4) возможны только при $N \geq 2$.

2.1.1. Случай Н1): бифуркация неподвижных точек. Случай Н1) приводит к двум основным сценариям — транскритической бифуркации и бифуркации типа вилки, связанным с возникновением у системы (36) при μ близких к μ_0 в окрестности точки $x = 0$ новых неподвижных точек.

Значение μ_0 назовем *точкой бифуркации неподвижных точек системы (36)*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\mu = \mu(\varepsilon)$, $\|\mu(\varepsilon) - \mu_0\| < \varepsilon$, такое, что при $\mu = \mu(\varepsilon)$ система (36) имеет неподвижную точку $x = x(\varepsilon)$, при этом $0 < \|x(\varepsilon)\| < \varepsilon$.

Простейшие уравнения, описывающие бифуркации указанного типа:

$$x_{n+1} = \mu x_n - x_n^2, \quad (\text{транскритическая}); \quad (37)$$

$$x_{n+1} = \mu x_n - x_n^3, \quad (\text{вилка});$$

в обоих случаях бифуркационным является значение $\mu_0 = 1$.

2.1.2. Случай Н2): бифуркация удвоения периода. Случай Н2) приводит к бифуркации удвоения периода (или субгармонической бифуркации), связанной с возникновением у системы (36) при μ близких к μ_0 в окрестности точки $x = 0$ циклов периода 2.

Значение μ_0 назовем *точкой бифуркации удвоения периода (или точкой бифуркации 2-циклов) системы (36)*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\mu = \mu(\varepsilon)$, $\|\mu(\varepsilon) - \mu_0\| < \varepsilon$, такое, что при $\mu = \mu(\varepsilon)$ система (36) имеет цикл $x_0(\varepsilon), x_1(\varepsilon)$ периода 2, при этом $0 < \|x_j(\varepsilon)\| < \varepsilon$, $j = 0, 1$.

Например, для уравнения (37) значения $\mu = -1$ и $\mu = 3$ являются точками бифуркации удвоения периода.

2.1.3. Случай Н3): бифуркация q-циклов. В этом случае одним из возможных сценариев является возникновение у системы (36) при μ близких к μ_0 в окрестности точки $x = 0$ циклов периода q , т.е. имеет место бифуркация q -циклов (соответствующее определение аналогично введенному выше определению точек бифуркации 2-циклов). Указанный сценарий реализуем лишь в многомерных системах (36), зависящих от двух и большего числа параметров, т.е. если $x \in R^N$ и $\mu \in R^m$ при $N, m \geq 2$.

2.1.4. Случай Н4): бифуркация Андронова-Хопфа. Случай Н4) наиболее сложен для исследования. Здесь возможны различные сценарии бифуркаций. Укажем один из них, при этом откажемся от ограничения, что θ иррационально.

Пусть θ ($0 < \theta < 1$) — таково, что $\theta \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$. Пусть для простоты $N = 2$. Тогда при каждом близком к μ_0 значении μ в окрестности точки $x = 0$ фазовый портрет системы (36) содержит замкнутую кривую $\gamma(\mu)$, ограничивающую область притяжения или отталкивания неподвижной точки $x = 0$. Кривая $\gamma(\mu)$ является инвариантной для системы (36). Динамика системы (36) на кривой $\gamma(\mu)$ может оказаться весьма сложной, содержащей семейство периодических и квазипериодических орбит. Такой сценарий называют *бифуркацией Андронова-Хопфа*.

2.2. Переход к операторному уравнению. В этом параграфе основное внимание уделяется исследованию локальных бифуркаций системы (36) в случаях Н1)-Н3). Эти случаи характеризуются возникновением у системы (36) при μ близких к μ_0 в окрестности точки $x = 0$ ненулевых неподвижных точек или циклов периода q , $q \geq 2$. Для исследования соответствующих бифуркаций предлагается перейти к эквивалентной задаче для операторных уравнений.

2.2.1. Бифуркация стационарных решений. В случае Н1) матрица $A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение 1. Коразмерность такой бифуркации равна одному; другими словами, наименьшая размерность пространства R^m параметра μ , которая содержит данную бифуркацию в устойчивой форме, равна одному. Поэтому естественным будет предположение, что параметр μ является скалярным, а именно, пусть $\mu \in [\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta]$, где δ — некоторое положительное число.

В задаче о бифуркации стационарных решениях системы (36) естественно перейти к уравнению

$$x = f(x, \mu), \tag{38}$$

решения которого и определяют неподвижные точки системы (36). В силу предположений D1 и D2 уравнение (38) представимо в виде

$$x = A(\mu)x + a(x, \mu), \tag{39}$$

где $A(\mu) = f'_x(0, \mu)$, а нелинейность $a(x, \mu)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \sup_{|\mu - \mu_0| \leq \delta} \frac{\|a(x, \mu)\|}{\|x\|} = 0. \tag{40}$$

Уравнение (39) является уравнением вида (1). Поэтому для анализа рассматриваемой бифуркации можно воспользоваться схемой, приведенной в п. 1.1.

С этой целью, как и в указанном пункте, обозначим через e и g — собственные векторы матрицы $A(\mu_0)$ и сопряженной матрицы $A^*(\mu_0)$, соответствующие собственному значению 1. Эти векторы будем считать выбранными в соответствии с равенствами (5).

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 13. Пусть матрица $A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение 1. Пусть

$$(A'(\mu_0)e, g) \neq 0.$$

Тогда μ_0 является точкой бифуркации неподвижных точек системы (36), при этом бифуркация является правильной по направлению векторов e и $-e$.

Асимптотические формулы для бифурцирующих решений системы (36) и тип бифуркации в условиях теоремы 13 могут быть определены в соответствии с теоремами 2-7. В частности, из этих теорем следует, что если нелинейность $a(x, \mu)$ в правой части уравнения (39) начинается с квадратичных (кубических) слагаемых, то бифуркация, как правило, является транскритической (типа вилки).

2.2.2. Бифуркация удвоения периода. В случае Н2) матрица $A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение -1 . Коразмерность такой бифуркации равна одному. Поэтому (как и в случае Н1)) естественным будет предположение, что параметр μ является скалярным, а именно, $\mu \in [\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta]$, где δ — некоторое положительное число.

В задаче о бифуркации удвоения периода системы (36) естественно перейти к уравнению

$$x = f^{(2)}(x, \mu), \tag{41}$$

где $f^{(2)}(x, \mu) = f(f(x, \mu), \mu)$. Очевидна

Лемма 4. Вектор x^* является решением уравнения (41) тогда и только тогда, когда x^* либо является неподвижной точкой системы (36), либо определяет цикл $x_0 = x^*$, $x_1 = f(x_0, \mu)$ периода 2 этой системы.

Уравнение (41) представимо в виде

$$x = A^2(\mu)x + b(x, \mu), \quad (42)$$

где нелинейность $b(x, \mu)$ удовлетворяет аналогичному (40) соотношению; $b(x, \mu)$ и $a(x, \mu)$ связаны равенством

$$b(x, \mu) = A(\mu)a(x, \mu) + a(A(\mu)x + a(x, \mu), \mu). \quad (43)$$

В рассматриваемом случае матрица $A^2(\mu_0)$ имеет простое собственное значение 1. Уравнение (42) является уравнением вида (1). Поэтому для анализа рассматриваемой бифуркации можно воспользоваться схемой, приведенной в п. 1.1.

С этой целью положим $B(\mu) = A^2(\mu_0)$ и обозначим через e и g — собственные векторы матрицы $B(\mu_0)$ и сопряженной матрицы $B^*(\mu_0)$, соответствующие собственному значению 1 (или, что равносильно, соответствующие собственному значению -1 матрицы $A(\mu_0)$ и сопряженной к ней). Эти векторы будем считать выбранными в соответствии с равенствами (5).

Теорема 14. Пусть матрица $A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение -1 . Пусть

$$(A'(\mu_0)e, g) \neq 0.$$

Тогда μ_0 является точкой бифуркации 2-циклов системы (36).

Это утверждение является следствием теоремы 1, примененной к уравнению (42). Действительно, из указанной теоремы следует, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывные функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $x = x(\varepsilon)$, такие, что уравнение (42) при $\mu = \mu(\varepsilon)$ имеет решение $x = x(\varepsilon)$ так, что кривая $x = x(\varepsilon)$ в пространстве R^N при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотически стремится к прямой $x = \varepsilon e$ и при этом $\mu(\varepsilon) \rightarrow \mu_0$. Тогда векторы $x_0 = x(\varepsilon)$ и $x_1 = f(x_0, \mu(\varepsilon))$ определяют цикл периода 2 системы (36) при $\mu = \mu(\varepsilon)$.

С целью определения асимптотических формул для бифурцирующих решений системы (36) и типа бифуркации в условиях теоремы 14 приведем вспомогательное утверждение. Пусть нелинейность $a(x, \mu)$ в правой части уравнения (39) представима в виде

$$a(x, \mu) = a_2(x, \mu) + \tilde{a}_3(x, \mu), \quad (44)$$

где $a_2(x, \mu)$ — квадратичная нелинейность, а $\tilde{a}_3(x, \mu)$ содержит члены более высокой степени. Равенство (44) влечет аналогичное соотношение для нелинейности (43):

$$b(x, \mu) = b_2(x, \mu) + \tilde{b}_3(x, \mu),$$

в котором квадратичная нелинейность $b_2(x, \mu)$ имеет вид

$$b_2(x, \mu) = A(\mu)a_2(x, \mu) + a_2(A(\mu)x, \mu).$$

Лемма 5. Пусть матрица $A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение -1 . Пусть выполнено равенство (44). Тогда

$$(b_2(e, \mu_0), g) = 0.$$

Таким образом, для анализа бифуркации удвоения периода системы (36) можно воспользоваться теоремой 7. Из нее, в частности, следует, что бифуркация удвоения периода, как правило, является типа вилки. Когда параметр μ , непрерывно изменяясь, переходит через критическое значение μ_0 , у уравнения (42) возникают два семейства бифурцирующих решений $x_+(\varepsilon)$ и $x_-(\varepsilon)$, которые и определяют рождающиеся циклы периода 2 системы (36).

2.2.3. *Бифуркация q -циклов.* В случае НЗ) матрица $A(\mu_0)$ имеет пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta i}$, где $\theta = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, причем $\theta \neq \frac{1}{2}$. Коразмерность такой бифуркации равна 2. Поэтому естественным будет предположение, что параметр μ является двумерным, а именно, можно положить $\mu = (\alpha, \beta)$, где α и β — скалярные параметры.

В задаче о бифуркации q -циклов системы (36) естественно перейти к уравнению

$$x = f^{(q)}(x, \mu), \tag{45}$$

где

$$f^{(q)}(x, \mu) = \underbrace{f(f(\dots(f(x, \mu), \mu)\dots))}_q.$$

Очевидна

Лемма 6. *Вектор x^* является решением уравнения (45) тогда и только тогда, когда x^* либо является неподвижной точкой системы (36), либо определяет цикл $x_0 = x^*$, $x_1 = f(x_0, \mu)$, $x_2 = f(x_1, \mu)$, ..., $x_{r-1} = f(x_{r-2}, \mu)$ периода r этой системы, где r — делитель числа q .*

Например, если $q = 6$, то решения уравнения (45) могут быть либо неподвижными точками системы (36), либо ее циклами периода 2, 3 или 6.

Уравнение (45) представимо в виде

$$x = A^q(\mu)x + b(x, \mu), \tag{46}$$

где нелинейность $b(x, \mu)$ удовлетворяет аналогичному (40) соотношению; для $b(x, \mu)$ и $a(x, \mu)$ несложно получить аналог равенства (43). Отметим также, что в рассматриваемом случае матрица $A^q(\mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Учитывая предположение, что параметр μ является двумерным, а именно, $\mu = (\alpha, \beta)$, перепишем уравнение (46) в виде

$$x = A^q(\alpha, \beta)x + b(x, \alpha, \beta). \tag{47}$$

Уравнение (47) является уравнением вида (19). Поэтому для анализа рассматриваемой бифуркации можно воспользоваться схемой, приведенной в п. 1.2.

С этой целью положим $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$, $B(\alpha, \beta) = A^q(\alpha, \beta)$, $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$. Обозначим через e, g, e^* и g^* — собственные векторы матрицы B_0 и сопряженной матрицы B_0^* , соответствующие собственному значению 1. Эти векторы будем считать выбранными в соответствии с равенствами (20).

Из теоремы 8 вытекает

Теорема 15. *Пусть матрица $A(\alpha_0, \beta_0)$ имеет пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta i}$, где $\theta = \frac{p}{q}$ ($p < q$) — несократимая дробь. Пусть*

$$\det \begin{bmatrix} (A'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (A'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (A'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (A'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тогда $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ является точкой бифуркации q -циклов системы (36).

Это утверждение является следствием теоремы 8, примененной к уравнению (47). Действительно, из указанной теоремы следует, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывные функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ и $x = x(\varepsilon)$, такие, что уравнение (47)

при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ имеет решение $x = x(\varepsilon)$ так, что кривая $x = x(\varepsilon)$ в пространстве R^N при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотически стремится к прямой $x = \varepsilon e$ и при этом $\alpha(\varepsilon) \rightarrow \alpha_0$, $\beta(\varepsilon) \rightarrow \beta_0$. Тогда при всех малых $\varepsilon > 0$ векторы

$$x_0 = x(\varepsilon), \quad x_1 = f(x_0, \mu(\varepsilon)), \quad x_2 = f(x_1, \mu(\varepsilon)), \quad \dots, \quad x_{q-1} = f(x_{q-2}, \mu(\varepsilon))$$

определяют циклы периода q системы (36) при $\mu = \mu(\varepsilon) = (\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))$.

2.2.4. Тип бифуркации q -циклов. Для бифурцирующих решений $x = x(\varepsilon)$, $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ уравнения (47) имеют место асимптотические формулы вида (31) и (32) (с соответствующими модификациями). Вместе с тем здесь имеют место и свои особенности. В частности, вид этих формул зависит от свойства четности числа q .

Пусть нелинейность $a(x, \mu)$ в правой части уравнения (39) представима в виде

$$a(x, \mu) = a_2(x, \mu) + a_3(x, \mu) + \tilde{a}_4(x, \mu), \quad (48)$$

где $a_2(x, \mu)$, $a_3(x, \mu)$ — квадратичная и кубическая нелинейности соответственно, а $\tilde{a}_4(x, \mu)$ содержит члены более высокой степени.

Теорема 16. *Пусть в условиях теоремы 15 число q является четным. Пусть выполнено равенство (48). Тогда имеют место равенства (33) и, следовательно, для бифурцирующих решений $x = x(\varepsilon)$, $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ уравнения (47) имеют место представления вида (34) и (35).*

3. БИФУРКАЦИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ.

В этом параграфе в качестве второго приложения рассматривается задача о бифуркации вынужденных колебаний в системах, динамика которых описывается неавтономными дифференциальными уравнениями с периодической правой частью.

3.1. Вспомогательные сведения. Приведем сначала некоторые вспомогательные сведения. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(x, t), \quad x \in R^N. \quad (49)$$

Пусть выполнены условия:

- функция $f(x, t)$ определена при всех $x \in R^N$ и $t \in R^1$;
- функция $f(x, t)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x , при этом каждое начальное условие $x(t_0) = x_0$ однозначно задает решение $x(t)$ уравнения (49), определенное при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$;
- функция $f(x, t)$ является T -периодической по t : $f(x, t + T) \equiv f(x, t)$.

Обозначим через U_T оператор сдвига [10] по траекториям системы (49) за время от $t = 0$ до $t = \tau > 0$. Оператор U_T ставит в соответствие каждой точке x_0 новую точку $x_1 = x(\tau)$; здесь $x(t)$ — решение уравнения (49), задаваемое начальным условием $x(0) = x_0$. Оператор $U_T : R^N \rightarrow R^N$ является диффеоморфизмом.

В силу периодичности функции $f(x, t)$ по t траектории точек (x, t) и $(x, t + Tm)$, где $m \in Z$, одинаковы. Поэтому изучение уравнения (49) может быть сведено к изучению диффеоморфизма $U = U_T$. Другими словами, уравнение (49) может быть ассоциировано с гладкой дискретной динамической системой, описываемой уравнением:

$$x_{n+1} = U(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (50)$$

где U — оператор сдвига по траекториям системы (49) за время от 0 до T .

Неподвижные точки системы (50) определяют начальные значения T -периодических решений уравнения (49), а циклы периода p — начальные значения его pT -периодических решений.

Пусть, наряду с а)-с), выполнено условие:

d) уравнение (49) имеет нулевое решение $x = 0$, т.е. $f(0, t) \equiv 0$.

В этом случае уравнение (49) может быть представлено в виде

$$x' = A(t)x + a(t, x), \quad x \in R^N, \quad (51)$$

где $A(t) = f'_x(0, t)$, а нелинейность $a(t, x)$ удовлетворяет соотношению

$$\max_t \|a(t, x)\| = O(\|x\|^2), \quad \|x\| \rightarrow 0.$$

Наряду с (51) будем рассматривать линейное уравнение

$$x' = A(t)x. \quad (52)$$

Обозначим через $H(t)$ фундаментальную матрицу решений системы (52), т.е. решение задачи $H' = A(t)H$, $H(0) = I$. Матрицу $V = H(T)$ называют *матрицей монодромии* линейной системы (52), а ее собственные значения — *мультипликаторами* системы (52).

Характер устойчивости решения $x = 0$ уравнения (49) определяется свойствами мультипликаторов линейной системы (52): если все мультипликаторы по модулю меньше единицы, то решение $x = 0$ будет устойчивым, если же хотя бы один мультипликатор по модулю больше единицы, то решение $x = 0$ будет неустойчивым.

Если система (52) не имеет мультипликаторов, равных по модулю 1, то неподвижная точка $x = 0$ системы (49) называется *гиперболической*. В окрестности гиперболической точки система (49) структурно устойчива.

Пусть U и V — это операторы сдвига за время от $t = 0$ до $t = T$ по траекториям систем (49) и (52) соответственно. Известно следующее утверждение (см., например, [10])

Лемма 7. *Матрица Якоби $U'_x(0)$ оператора $U(x)$ совпадает с оператором V .*

3.2. Задача о бифуркации вынужденных колебаний. Рассмотрим теперь систему, динамика которой описывается дифференциальным уравнением, зависящим от скалярного или векторного параметра μ :

$$x' = f(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k. \quad (53)$$

Всюду ниже предполагаются выполненными условия:

- P1. $f(x, t, \mu)$ определена при всех $x \in R^N$, $t \in R^1$ и $\lambda \in \Omega(\mu_0, \delta_0)$ (здесь $\Omega(\mu_0, \delta_0)$ — шар радиуса $\delta_0 > 0$ с центром в точке $\mu_0 \in R^k$),
- P2. $f(x, t, \mu)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x и μ , при этом каждое начальное условие $x(t_0) = x_0$ однозначно задает решение $x(t)$ уравнения (53), определенное при всех $t \in (-\infty, \infty)$;
- P3. $f(x, t, \mu)$ является T -периодической по t : $f(x, t + T, \mu) \equiv f(x, t, \mu)$;
- P4. уравнение (53) при всех значениях μ имеет нулевое решение $x \equiv 0$, т.е.

$$f(0, t, \mu) \equiv 0.$$

Приводимые ниже построения применимы и в ряде случаев, когда условия P1 и P2 заменены более слабыми предположениями, в частности, когда функция $f(x, t, \mu)$ определена по x лишь в некоторой окрестности точки $x = 0$.

В силу условий P1 и P4 уравнение (53) может быть представлено в виде

$$x' = A(t, \mu)x + a(x, t, \mu), \quad (54)$$

где

$$A(t, \mu) = f'_x(0, t, \mu)$$

— матрица Якоби вектор-функции $f(x, t, \mu)$, вычисленная в точке $x = 0$, а нелинейность $a(x, t, \mu)$ равномерно по $\mu \in \Omega(\mu_0, \delta_0)$ и $t \in [0, T]$ удовлетворяет соотношению

$$\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2) \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow 0.$$

Функции $A(t, \mu)$ и $a(x, t, \mu)$ являются T -периодическими по t .

Наряду с (54) будем рассматривать линейное уравнение

$$x' = A(t, \mu)x. \quad (55)$$

Критическими для уравнения (53) будут те значения μ_0 параметра μ , при которых один или несколько мультипликаторов системы (55) по модулю равны единице. Изменение параметра μ в окрестности μ_0 может приводить к различным локальным бифуркациям в окрестности точки $x = 0$.

Изучению вопросов о локальных бифуркациях для уравнений типа (53) посвящена обширная литература (см., например, [10, 11]). Рассмотрены различные сценарии бифуркаций, предложены эффективные качественные и приближенные методы их исследования.

Систему (53) будем ассоциировать с дискретной динамической системой, описываемой уравнением

$$x_{n+1} = U(x_n, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (56)$$

где $U(*, \mu)$ — оператор сдвига по траекториям системы (53) за время от 0 до T . Система (56) в силу предположения P4 при всех значениях параметра μ имеет неподвижную точку $x = 0$, т.е. $U(0, \mu) \equiv 0$.

Задача о бифуркации вынужденных колебаний системы (53) эквивалентна задаче о локальных бифуркациях в окрестности неподвижной точки $x = 0$ системы (56). Для уравнения (56) имеют место те же бифуркации, что и для рассмотренных в предыдущем параграфе дискретных систем вида (36) (при изменении параметра μ могут появиться или исчезнуть неподвижные точки или циклы различных периодов, может измениться характер их устойчивости и т.п.). Однако задача о вынужденных колебаниях имеет свою специфику, на которой здесь остановимся.

3.3. Основные сценарии локальных бифуркаций. Обозначим через $V(\mu)$ матрицу монодромии системы (55). Из леммы 7 следует, что операторы $U(x, \mu)$ и $V(\mu)$ связаны равенством

$$U(x, \mu) = V(\mu)x + v(x, \mu), \quad (57)$$

в котором оператор $v(x, \mu)$ удовлетворяет соотношению

$$\sup_{\mu} \|v(x)\| = O(\|x\|^2) \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow 0.$$

Как было указано выше, сценарии бифуркаций системы (53) определяются свойствами спектра оператора $V(\mu_0)$. Здесь, в частности, возможны случаи, когда матрица $V(\mu_0)$ имеет:

- 1) простое собственное значение 1;
- 2) полупростое собственное значение 1 кратности 2;
- 3) полупростое собственное значение -1 кратности 2;
- 4) пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta i}$, где $0 < \theta < 1$ и θ рационально ($\theta \neq \frac{1}{2}$);
- 5) имеет пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta i}$, где $0 < \theta < 1$ и θ — иррационально.

Замечание 2. В отличие от приведенных на стр. 11 основных случаев, определяющих сценарии бифуркации дискретных систем, в задаче о бифуркации вынужденных колебаниях не возникает случай, когда матрица $V(\mu_0)$ имеет простое собственное значения -1 .

В зависимости от указанных случаев возможны различные локальные бифуркации в окрестности состояния равновесия системы (53). Приведем соответствующее определение.

Пусть q — натуральное число. Значение μ_0 параметра μ называется *точкой бифуркации qT -периодических решений системы (53)*, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\mu = \mu(\varepsilon)$, при котором система (53) имеет ненулевое qT -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, при этом $\max_t \|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При $q = 1$ будем говорить о *бифуркации вынужденных колебаний*, а при $q \geq 2$ — о *бифуркации субгармонических колебаний*.

Случаи 1) и 2) приводят к бифуркации вынужденных колебаний, случаи 3) и 4) — к бифуркации субгармонических колебаний, случай 5) — к бифуркации почти периодических колебаний. Ограничимся рассмотрением случая 1); случаи 2)-4) могут быть рассмотрены по той же схеме, что и аналогичные случаи, рассмотренные во втором параграфе (см. стр. 11).

Пусть оператор $V(\mu_0)$ имеет простое собственное значение 1, т.е. линейная система (55) при $\mu = \mu_0$ имеет однопараметрическое семейство T -периодических решений. В этом случае естественно предполагать, что параметр μ является скалярным. Здесь основным сценарием является бифуркация вынужденных колебаний системы (53).

Рассматриваемый случай попадает под указанный на стр. 11 случай Н1), поэтому в задаче о бифуркациях вынужденных колебаний системы (53) естественно перейти к уравнению вида (39), а именно, к уравнению $x = U(x, \mu)$ или, с учетом равенства (57), — к уравнению

$$x = V(\mu)x + v(x, \mu).$$

Пусть e и e^* — это собственные векторы, соответствующие простому собственному значению 1 операторов $V(\mu_0)$ и $V^*(\mu_0)$ соответственно. Векторы e и e^* будем считать выбранными в соответствии с равенством $(e, e^*) = 1$.

Обозначим через $x(t, \mu)$ решение задачи Коши

$$\left. \begin{aligned} x' &= A(t, \mu)x, \\ x(0) &= e. \end{aligned} \right\}$$

Функция $x(t, \mu_0)$ является T -периодическим решением системы (55) при $\mu = \mu_0$. Ниже основным будет число

$$\xi_0 = \left(\int_0^T [A(t, \mu)x(t, \mu)]'_{\mu=\mu_0} dt, e^* \right). \quad (58)$$

Из теоремы 1 следует

Теорема 17. Пусть линейная система (55) при $\mu = \mu_0$ имеет однопараметрическое семейство T -периодических решений. Пусть $\xi_0 \neq 0$. Тогда μ_0 является точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (53).

В приложениях часто матрица $A(t, \mu_0)$ не зависит от t . В этом случае несложно показать, что число (58) принимает вид

$$\xi_0 = \left(\int_0^T [A(t, \mu)]'_{\mu=\mu_0} x(t, \mu_0) dt, e^* \right).$$

Приближенное исследование рассматриваемой бифуркации можно проводить по схеме, приведенной в п. 1.1.

4. БИФУРКАЦИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ

В этом параграфе в качестве третьего приложения рассматривается задача о бифуркации автоколебаний.

4.1. Основные сценарии бифуркаций автоколебаний. Рассматривается система, динамика которой описывается дифференциальным уравнением

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \quad (59)$$

правая часть $f(x, \mu)$ которого гладко зависит от x и μ . Пусть при всех μ , близких к μ_0 , система (59) имеет нестационарное T -периодическое решение $x = \varphi_0(t)$. Пусть для простоты выполнено условие:

P1) решение $\varphi_0(t)$ не зависит от параметра μ .

При изменении параметра μ может измениться характер устойчивости решения $\varphi_0(t)$, что, в свою очередь, может привести к различным бифуркациям: возникновению в окрестности решения $\varphi_0(t)$ новых периодических колебаний, бифуркации удвоения периода и другим сценариям [1, 12].

Полагая $h = x - \varphi_0(t)$, перейдем от (59) к уравнению с T -периодической по t правой частью

$$h' = A(t, \mu)h + g(t, h, \mu), \quad h \in R^N, \quad (60)$$

где $A(t, \mu) = f'_x(\varphi_0(t), \mu)$, а нелинейность $g(t, h, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t, \mu} \|g(t, h, \mu)\| = o(\|h\|), \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

Нулевое решение системы (60) соответствует периодическому решению $x = \varphi_0(t)$ системы (59).

Наряду с уравнением (60) будем рассматривать линейное уравнение

$$h' = A(t, \mu)h. \quad (61)$$

Пусть $V(\mu)$ — оператор сдвига по траекториям системы (61) за время от $t = 0$ до $t = T$.

Так как уравнение (59) при всех μ имеет нестационарное T -периодическое решение $x = \varphi_0(t)$, то линейная система (61) имеет нестационарное T -периодическое решение $h = \varphi'_0(t)$. Поэтому система (61) при всех μ имеет мультипликатор $\rho_0 = 1$. Другими словами, матрица $V(\mu)$ при всех μ имеет собственное значение $\rho_0 = 1$ и ему отвечает собственный вектор $e_0 = \varphi'_0(0)$.

Если система (61) при $\mu = \mu_0$ не имеет других мультипликаторов, равных по модулю 1, то цикл $\varphi_0(t)$ называется *гиперболическим*. В окрестности гиперболического цикла система (59) структурно устойчива. Следовательно, значение μ_0 будет бифуркационным, если только система (61) при $\mu = \mu_0$, наряду с мультипликатором $\rho_0 = 1$, будет иметь, по крайней мере, еще один мультипликатор ρ_1 , равный по модулю 1.

Пусть цикл $x = \varphi_0(t)$ системы (59) является негиперболическим. В зависимости от значений ρ_1 возможны следующие основные варианты:

$$1) \rho_1 = 1, \quad 2) \rho_1 = -1, \quad 3) \rho_1 = e^{i\beta\omega}, \quad \text{где } \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad 0 < \beta < T \text{ и } \beta \neq \frac{T}{2}.$$

В случае 1) типичным сценарием бифуркации является возникновение у системы (59) в окрестности T -периодического решения $x = \varphi_0(t)$ новых периодических решений с периодом, близким к T ; этот сценарий будем называть *бифуркацией периодических решений*: см. Рис. 4 и Рис. 5.

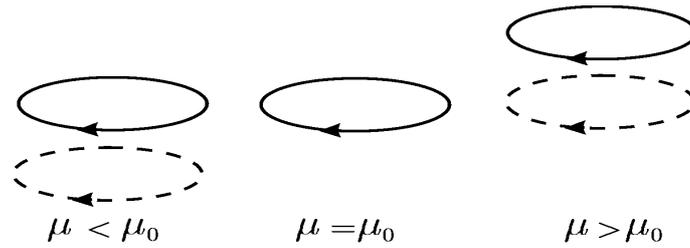


Рис. 4 (транскритическая бифуркация)

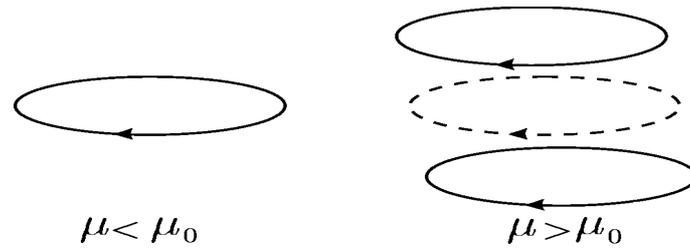


Рис. 5 (бифуркация типа вилки)

В случае 2) типичным сценарием является возникновение у системы (59) в окрестности T -периодического решения $x = \varphi_0(t)$ новых периодических решений с периодом, близким к $2T$; этот сценарий будем называть *бифуркацией удвоения периода* (см. Рис. 6).

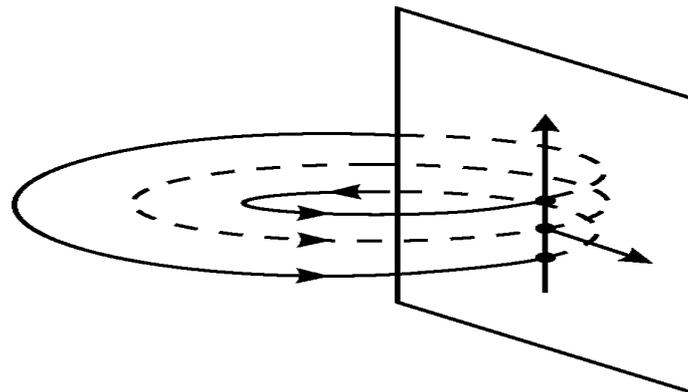


Рис. 6 (бифуркация удвоения периода)

Случай 3) наиболее сложен для исследования. Здесь при $\beta = \frac{p}{q}T$ и малых q ($q = 3$ и $q = 4$) у системы (59) в окрестности решения $x = \varphi_0(t)$ могут возникать периодические решения периода qT . При $q \geq 5$ или иррациональных $\frac{\beta}{T}$ возможна *бифуркация рождения двумерного тора* (см. Рис. 7).

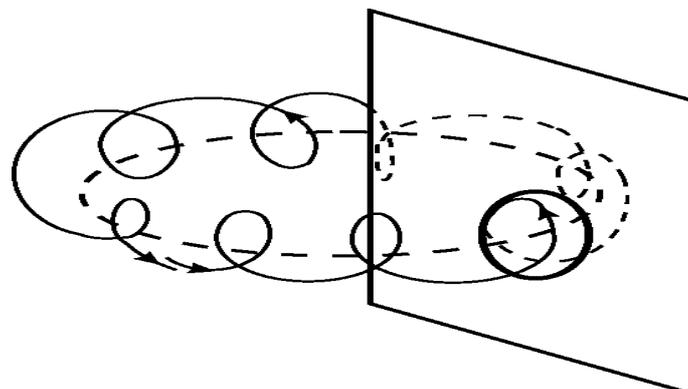


Рис. 7 (бифуркация рождения двумерного тора)

Отметим также, случаи 2) и 3) возможны лишь, когда размерность фазового пространства $N \geq 3$.

4.2. Отображение Пуанкаре и переход к операторным уравнениям. В фазовом пространстве R^N системы (59) решение $x = \varphi_0(t)$ описывает некоторую замкнутую траекторию. Можно считать, что $\varphi_0(0) = 0$. Проведем через точку 0 трансверсальную к траектории $\varphi_0(t)$ гиперплоскость E^0 . Выберем на E^0 систему координат так, чтобы начала координат пространств E^0 и R^N совпали. Очевидно, что любая траектория, соответствующая решению системы (59), выпущенная из точки $h_1 \in E^0$, близкой к 0, через некоторое время T^* , близкое к T , вновь пересечет гиперплоскость E^0 в точке h_2 (см. Рис. 8).

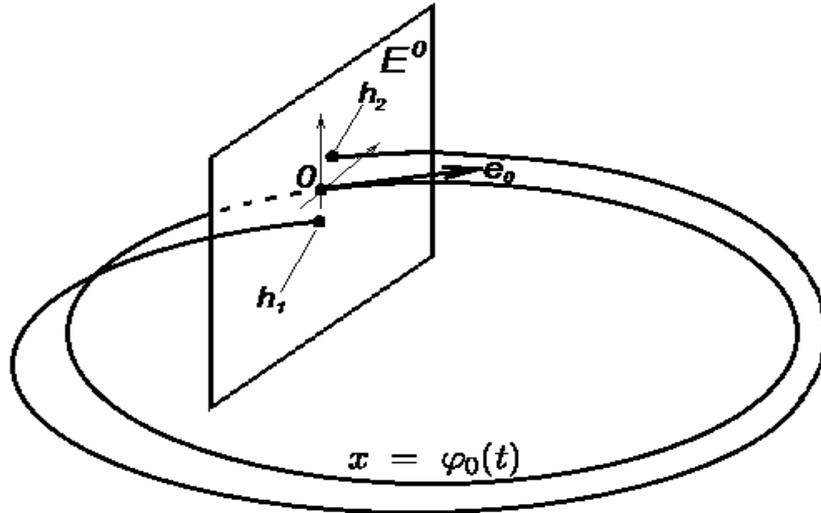


Рис. 8 (отображение Пуанкаре)

Таким образом, получим некоторое отображение $P(\cdot, \mu) : E^0 \rightarrow E^0$ (так, что $P(h_1, \mu) = h_2$), определенное в окрестности нулевой точки пространства E^0 . Отображение $P(\cdot, \mu)$ называют *отображением Пуанкаре*; по построению имеем $P(0, \mu) = 0$. Неподвижные точки оператора $P(\cdot, \mu)$ соответствуют точкам пересечения траекторий периодических решений системы (59) с гиперплоскостью E^0 .

Используя отображение Пуанкаре, задачи о локальных бифуркациях системы (59) в окрестности решения $x = \varphi_0(t)$ можно свести к задаче о бифуркации неподвижных точек операторных уравнений. А именно, в случае 1) получим, что оператор $P(\cdot, \mu_0)$ имеет простое собственное значение 1 и, следовательно, для исследования соответствующей бифуркации можно перейти к уравнению

$$h = P(h, \mu), \quad h \in E^0. \quad (62)$$

Аналогично, в случае 2) можно перейти к уравнению

$$h = P^2(h, \mu), \quad h \in E^0.$$

Рассмотрение случая 3) ограничимся обсуждением ситуации, когда $\beta = \frac{p}{q}T$ при малых q . Здесь естественно рассматривать уравнение

$$h = P^q(h, \mu), \quad h \in E^0.$$

4.3. Достаточные условия бифуркации. Приведем достаточные условия бифуркации периодических решений системы (59). Пусть имеет место случай 1), т.е. $\rho_1 = 1$.

Так как матрица $V(\mu)$ при всех μ имеет собственное значение $\rho_0 = 1$, то транспонированная матрица $V^*(\mu)$ также при всех μ имеет собственное значение $\rho_0 = 1$. Ниже для простоты будем считать, что наряду с P1) выполнено еще одно предположение:

P2) оператор $V^*(\mu)$ при всех μ имеет не зависящий от μ собственный вектор g_0 , отвечающий собственному значению $\rho_0 = 1$.

В этом случае в качестве E^0 удобно выбирать гиперплоскость

$$E^0 = \{x : (x, g_0) = 0\},$$

которая будет инвариантным подпространством для оператора $V(\mu)$ при всех μ .

Оператор $V(\mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, при этом ему, кроме собственного вектора $e_0 = \varphi'_0(0)$, отвечает еще один собственный вектор $e_1 \in E^0$, по направлению которого и возникают бифурцирующие решения (62). Сопряженный оператор $V^*(\mu_0)$ также имеет полупростое собственное значение 1 и соответствующие собственные векторы g_0 и g_1 . Тогда приведенное в теореме 1 достаточное условие бифуркации вида (6) в рассматриваемой задаче может быть сформулировано в виде.

Теорема 18. Пусть $\rho_1 = 1$ и

$$\Delta = \left(\int_0^T \left((A(s, \mu)x(s, \mu))'_\mu \right) \Big|_{\mu=\mu_0} ds, g_1 \right) \neq 0, \quad (63)$$

где $x(t, \mu)$ — решение задачи

$$\begin{cases} x' = A(t, \mu)x \\ x(0) = e_1. \end{cases} \quad (64)$$

Тогда μ_0 — точка бифуркации периодических решений системы (59).

Непосредственная проверка условия (63) обычно сопряжена с трудностями, так как требует решения системы (64) с периодической правой частью. В важном частном случае, когда матрица $A(t, \mu_0) = A_0$ не зависит от t , теорему 18 можно сформулировать в виде.

Теорема 19. Пусть $\rho_1 = 1$ и

$$\Delta = \left(\int_0^T \left(A'_\mu(t, \mu_0)\varphi'_0(t) + \int_0^t A_0 e^{A_0(t-s)} A'_\mu(s, \mu_0)\varphi'_0(s) ds \right) dt, g_1 \right) \neq 0.$$

Тогда μ_0 — точка бифуркации периодических решений системы (59).

В качестве примера рассмотрим систему

$$\begin{cases} x'_1 = -(1 + \mu)x_1 - x_2 + x_1 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ x'_2 = x_1 - (1 + \mu)x_2 + x_2 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \end{cases} \quad (65)$$

У этой системы существует 2π -периодическое решение $x = \varphi_0(t) = (\cos t; \sin t)^T$ при всех μ .

Применим для исследования системы (65) вышеприведенную схему. Отметим, что условия P1) и P2) для нее выполнены.

Матрица $A(t, \mu)$ в рассматриваемом примере имеет вид

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} (1 - \mu) \cos^2 t & -1 + (1 - \mu) \sin t \cos t \\ 1 + (1 - \mu) \sin t \cos t & (1 - \mu) \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $V(\mu)$ оператор сдвига линейной системы $x' = A(t, \mu)x$ за время от 0 до 2π . Оператор $V(\mu)$ при всех μ имеет собственное значение 1, при этом собственным является вектор $e_0 = \varphi'_0(0) = (0; 1)^T$. При $\mu = \mu_0 = 1$ оператор $V(\mu)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Кроме вектора e_0 , для оператора $V(\mu_0)$ собственным является вектор $e_1 = (1; 0)^T$. Вектор g_1 совпадает с вектором e_1 .

Непосредственным вычислением можно убедиться, что в нашем примере число Δ из теоремы 19 равно -2π . Следовательно, значение $\mu = 1$ является точкой бифуркации периодических решений системы (65).

В этом можно убедиться и непосредственно. Действительно, наряду с решением $\varphi_0(t)$ система (65) имеет также решение $\varphi_1(t, \mu) = (\mu \cos t; \mu \sin t)^T$, совпадающее с $\varphi_0(t)$ при $\mu = 1$. В данном примере происходит бифуркация, аналогичная транскритической. При $\mu < 1$ цикл $\varphi_0(t)$ является устойчивым, а цикл $\varphi_1(t, \mu)$ — неустойчивым. При $\mu > 1$ цикл $\varphi_1(t, \mu)$ становится устойчивым, а цикл $\varphi_0(t)$ — неустойчивым.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство теоремы 8.

В основу доказательства теоремы 8 положим метод функционализации параметра [13], [14] и модифицированный метод Ньютона-Канторовича с возмущениями [15].

На первом этапе двумерный параметр $\mu = (\alpha, \beta)$ в уравнении (19) заменяется вектор-функцией $\mu(x) = (\alpha(x), \beta(x))$, где $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ — некоторые непрерывные функционалы. Тогда уравнение (19) примет вид

$$x = B[\alpha(x), \beta(x)]x + b[x, \alpha(x), \beta(x)], \quad (66)$$

которое уже не содержит параметров α и β . Если x^* является решением уравнения (66), то оно является решением уравнения (19) при $\mu = \mu(x^*)$.

Функционалы $\alpha(x)$, $\beta(x)$ выберем в виде

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon} [(x, e^*) - \varepsilon], \quad \beta(x) = \beta_0 + \frac{1}{\varepsilon} (x, g^*); \quad (67)$$

здесь $\varepsilon > 0$ — вспомогательный малый параметр.

На втором этапе уравнение (66) (при фиксированных значениях параметра $\varepsilon > 0$) изучается методом Ньютона-Канторовича. Для этого уравнение (66) представляется в виде

$$F(x) \equiv G(x) + W(x) = 0, \quad (68)$$

где $G(x) = x - B[\alpha(x), \beta(x)]x$ и $W(x) = -b[x, \alpha(x), \beta(x)]$.

Решения уравнения (68) будем искать в шаре

$$S(\varepsilon) = \{x : \|x - \varepsilon e\| \leq \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

Непосредственным подсчетом устанавливается справедливость вспомогательных утверждений.

Лемма 8. *Оператор $G(x)$ дифференцируем при любом $x \in H$, и его производная Фреше имеет вид*

$$G'(x)h = h - \frac{1}{\varepsilon} [(h, e^*)B'_\alpha(\alpha(x), \beta(x)) + (h, g^*)B'_\beta(\alpha(x), \beta(x))]x - B(\alpha(x), \beta(x))h.$$

Лемма 9. *Производная оператора $G'(x)$ при всех малых $\varepsilon > 0$ на шаре $S(\varepsilon)$ удовлетворяет условию Липшица:*

$$\|G'(x) - G'(y)\| \leq L_\varepsilon \|x - y\|, \quad x, y \in S(\varepsilon),$$

где константа L_ε зависит от ε и не зависит от $x, y \in S(\varepsilon)$.

Положим $x_0 = \varepsilon e$. Тогда $G'(x_0) = F$, где F — оператор (23). Оператор $G'(x_0)$ обратим, и для него верна лемма 3. Положим $\Gamma_0 = [G'(x_0)]^{-1}$ (см. равенство (24)).

Приведенные вспомогательные утверждения означают, что для уравнения (68) выполняются все условия сходимости метода Ньютона-Канторовича, следовательно верна

Лемма 10. Пусть оператор $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2 и пусть выполнено условие (21). Тогда при всех малых $\varepsilon > 0$ уравнение (68) имеет решение $x(\varepsilon) \in S(\varepsilon)$, которое может быть получено как предел последовательных приближений

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 G(x_n) - \Gamma_0 W(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (69)$$

Из приведенных построений следует, что уравнение (19) при $\alpha = \alpha[x(\varepsilon)]$ и $\beta = \beta[x(\varepsilon)]$ имеет ненулевые решения $x(\varepsilon)$, так что $\|x(\varepsilon) - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$, $\alpha[x(\varepsilon)] \rightarrow \alpha_0$, $\beta[x(\varepsilon)] \rightarrow \beta_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда получим справедливость теоремы 8.

Доказательство теоремы 9.

Пусть выполнено (2). Для доказательства теоремы 9 используется тот факт, что каждая итерация в (69) определяет соответствующую асимптотику для бифурцирующих решений уравнения (68).

Из (69) имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \Gamma_0 F(x_0) = x_0 - \Gamma_0(x_0 - B(\alpha_0, \beta_0)x_0 - b_2(x_0, \alpha_0, \beta_0) - b_3(x_0, \alpha_0, \beta_0)) = \\ &= \varepsilon e + \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2 + \varepsilon^3 \Gamma_0 b_3 + o(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Отсюда

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2 + O(\varepsilon^3); \quad (70)$$

тогда $e_1 = \Gamma_0 b_2$.

Подставляя (70) в функционалы (67), получим

$$\begin{aligned} \alpha[x(\varepsilon)] &= \alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon}[(x(\varepsilon), e^*) - \varepsilon] = \alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon}[(\varepsilon e + \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2 + O(\varepsilon^3), e^*) - \varepsilon] = \\ &= \alpha_0 + \varepsilon(\Gamma_0 b_2, e^*) + O(\varepsilon^2), \\ \beta[x(\varepsilon)] &= \beta_0 + \frac{1}{\varepsilon}(x(\varepsilon), g^*) = \beta_0 + \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon e + \varepsilon^2 \Gamma_0 b_2 + O(\varepsilon^3), g^*) = \\ &= \beta_0 + \varepsilon(\Gamma_0 b_2, g^*) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = (\Gamma_0 b_2, e^*) = J_1(b_2), \quad \beta_1 = (\Gamma_0 b_2, g^*) = J_2(b_2).$$

Здесь Γ_0 — оператор (24). При доказательстве используются также обозначения (25) и (26). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 400 с.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*. Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2002. 560 с.
3. Каток А.Б., Хасселблат Б. *Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений*. М.: МЦНМО. 2005. 464 с.
4. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла*. М.: Мир. 1985. 280 с.
5. Yu.A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences (V.112), Springer-Verlag, New-York etc.. 1995.
6. Ибрагимова Л.С, Юмагулов М.Г. *Функционализация параметра и ее приложения в задаче о локальных бифуркациях динамических систем // Автоматика и телемеханика*. 2007. № 4. С. 3–12.
7. Юмагулов М.Г. *Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах // Доклады Академии наук*. 2009. Т. 424, № 2. С. 177–180.

8. Юмагулов М.Г., Вышинский А.А., Нуров И.Д., Муртазина С.А. *Операторный метод исследования локальных бифуркаций многопараметрических динамических систем* // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. Серия 10 (Прикладная математика, информатика, процессы управления). 2009. Вып. 2. С. 146–155.
9. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н. *Бифуркация 4π -периодических решений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел* // *Астрономический журнал*. 2009, Т. 86, № 2. С. 170–174.
10. Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений* М.: Наука. 1966. 332 с.
11. Шильников Л.П. и др. *Методы качественной теории в нелинейной динамике*. Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с.
12. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. *Новые методы хаотической динамики*. М.: Едиториал УРСС. 2004.
13. Козьякин В.С., Красносельский М.А. *Метод функционализации параметра в задаче о точках бифуркации* // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254. № 5. С. 1061–1064.
14. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа*. М.: Наука. 1975. 511 с.
15. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутцкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближённое решение операторных уравнений*. М.: Наука. 1969. 456 с.

Александр Алексеевич Вышинский,
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,
ул. Белова, 21,
453837, г. Сибай, Россия
E-mail: sanek3484@gmail.com

Лилия Сунагатовна Ибрагимова,
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,
ул. Белова, 21,
453837, г. Сибай, Россия
E-mail: lilibr@mail.ru

Сария Аширафовна Муртазина,
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,
ул. Белова, 21,
453837, г. Сибай, Россия
E-mail: sariamurtaz@mail.ru

Марат Гаязович Юмагулов,
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,
ул. Белова, 21,
453837, г. Сибай, Россия
E-mail: yum_mg@mail.ru