ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 4 (2010). С. 88-98.

УДК 517.938

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ БЛИЗКИХ К ГАМИЛЬТОНОВЫМ

О.А. СУЛТАНОВ

Аннотация. В работе рассматриваются неавтономные возмущения автономных гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Решается вопрос устойчивости положения равновесия с использованием второго метода Ляпунова. В основе функции Ляпунова лежит гамильтониан автономной системы. Условия устойчивости неподвижной точки записываются на коэффициенты возмущений. Доказываются теоремы об устойчивости и неустойчивости решений. Полученные результаты применяются для исследования устойчивости решений уравнений Пенлеве.

Ключевые слова: равновесие, устойчивость, функция Ляпунова.

1. Введение

Постановка задачи. Как известно, в динамических системах при исследовании устойчивости положений равновесия наиболее сложным оказывается нейтральный случай, когда линеаризованные уравнения имеют мнимые характеристические корни и соответствующие решения осциллируют. В таких задачах основным инструментом являются функции Ляпунова. Их построение оказывается далеко нетривиальным и сильно зависит от вида исходных уравнений. Для автономных систем вид функций Ляпунова определяются структурой нелинейных слагаемых в асимптотике вблизи равновесия, см. например, [1, 2]. Для неавтономных систем случается, что в свойствах устойчивости главную роль играет структура старших членов разложения в асимптотике на бесконечности по времени. Как раз для одного класса такого типа систем в данной работе строятся функции Ляпунова.

Рассматривается система двух нелинейных неавтономных уравнений на полуоси

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y H(x,y) + F(x,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x H(x,y) + G(x,y,t), \quad t > T_0, \tag{1}$$

которая предполагается гамильтоновой в главном члене асимптотики по времени, т.е. $F, G \to 0$, при $t \to \infty$. Пусть $x = 0,\ y = 0$ – положение равновесия (тривиальное решение) этой системы. Предполагается, что для предельной гамильтоновой системы (при $F \equiv 0, G \equiv 0$) это же решение $\{x = 0,\ y = 0\}$ является неподвижной точкой типа центр общего положения. В таком случае можно считать, без ограничения общности, что гамильтониан имеет структуру

$$H(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + h(x,y), \quad h(x,y) = \mathcal{O}(r^3) \ \text{ при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0.$$

Функции $h(x,y), F(x,y,t), G(x,y,t)$, заданные в области

$$D_{T_0} = \{x, y, t: \ x^2 + y^2 < R_0^2;\ t > T_0\}, \quad (0 < R_0, T_0 = \text{const} < \infty),$$

O.A. Sultanov, Lyapunov functions for nonautonomous systems close to Hamiltonian.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00186).

Поступила 10 апреля 2010 г.

предполагаются гладкими вплоть до границы $F, G, h \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$. Предполагается, что асимптотические оценки для функции $h(x,y)$ дифференцируемы $(h_x(x,y), h_y(x,y) = \mathcal{O}(r^2)$, при $r \to 0)$.

Предлагаемый способ исследование устойчивости положения равновесия опирается на специфическую структуру правых частей в асимптотике на бесконечности:

$$F(x,y,t) = t^{-\delta}[ax + by + f(x,y,t)], \quad G(x,y,t) = t^{-\delta}[cx + dy + g(x,y,t)]. \tag{2}$$

Предполагается, что в этих соотношениях $a, b, c, d = \text{const}$, $\delta = \text{const} > 0$, и поправки к выделенным линейным слагаемым малы как на бесконечности по t так и в окрестности равновесия[1]:

$$|f(x,y,t)|, |g(x,y,t)| \leqslant Mr[t^{-\nu} + r], \quad \forall\,(x,y,t) \in D; \quad (\nu, M = \text{const} > 0). \tag{3}$$

В автономном случае, когда возмущение не зависит от времени: $F \equiv f_0(x,y)$, $G \equiv g_0(x,y)$, устойчивость возмущенной системы определяется структурой этих функций в асимптотике при $x \to 0$, $y \to 0$. Известные в этом направлении результаты обобщаются и на неавтономные системы, [1]. При этом считается, что неавтономные слагаемые играют подчиненную роль. Однако, в ряде случаев как раз неавтономные слагаемые определяют свойство устойчивости. Простейший пример такого типа дает уравнение линейного осциллятора с затухающим по времени коэффициентом сопротивления

$$\frac{d^2x}{dt^2} - t^{-1}d \cdot \frac{dx}{dt} + x = 0, \; d = \text{const} \neq 0; \tag{4}$$

это уравнение, очевидно, эквивалентно системе типа (1) с $a = b = c = 0$, $d \neq 0$. Из аналогии с похожим автономным уравнением $\ddot{x} - d \cdot \dot{x} + x = 0$ можно догадаться, что устойчивость положения равновесия $x = 0$ зависит от знака коэффициента d. Впрочем, в приведенном примере линейного неавтономного уравнения (4) свойства устойчивости можно извлечь из известных ВКБ-оценок [3] для пары линейно независимых решений :

$$x(t) = t^{d/2}e^{\pm it}[1 + \mathcal{O}(t^{-1})], \quad t \to \infty.$$

Для нелинейных уравнений подобных оценок нет, и устойчивость устанавливается другим способом. Похожие уравнения рассмотрены, например, в [4], стр.214, однако при довольно жестких ограничениях, см. также [5] и [6].

В общем случае при анализе уравнений (1) решающую роль играет структура соответствующей линеаризованной неавтономной системы

$$\frac{dx}{dt} = y + t^{-\delta}(ax + by), \qquad \frac{dy}{dt} = -x + t^{-\delta}(cx + dy). \tag{5}$$

2. Теорема об устойчивости

Напомним определение устойчивости по Ляпунову для неавтономной системы и понятие функции Ляпунова [2]:

Определение 1. *Решение $x = 0, y = 0$ называется устойчивым при $t \geq T_0$, если для любого $t_0 \geq T_0$ и любого положительного числа ε, существует другое положительное число $\delta(\varepsilon)$, так что всякое решение уравнений (1) с начальными значениями $x(t_0)$, $y(t_0)$, удовлетворяющими неравенствам $|x(t_0)| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $|y(t_0)| \leqslant \delta(\varepsilon)$ удовлетворяет при всех $t \geq t_0$ неравенствам $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$. Асимптотическая устойчивость определяется свойствами:*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

---

[1] Скорость убывания неавтономной части (возмущения) может быть иной, например, логарифмической. Для простоты здесь рассматривается степенное убывание с $\delta, \nu > 0$

Определение 2. *Непрерывно дифференцируемая функция $U(x,y,t)$, $(x,y,t)\in D_T$ называется функцией Ляпунова для системы* (1) *при $t\geq T$, если существует положительно определенная функция $W(x,y)$ такая, что $U(x,y,t)\geq W(x,y)$ и полная производная по времени, составленная в силу этих уравнений неположительна*

$$\frac{d}{dt}U(x,y,t)\Big|_{(1)}\leqslant 0,\quad \forall t>T.$$

Как известно, существование функций Ляпунова гарантирует устойчивость положения равновесия, [1], стр. 186. Для асимптотической устойчивости дополнительно должно выполняться неравенство:

$$\frac{d}{dt}U(x,y,t)\Big|_{(1)}\leqslant -W_1(x,y),\quad T<t<\infty,$$

где $W_1(x,y)$ положительно определенная функция. Следует отметить, что для рассматриваемых уравнений задачу об устойчивости удается решить таким способом на полуоси $t>T$ с достаточно далекой границей $T\geq T_0$. Ограничения на величину T возникают при построении функции Ляпунова и зависят от структуры неавтономных слагаемых. Устойчивость на заранее заданной полуоси $t>T_0$ получается с учетом известных результатов о непрерывности по параметру ([7], стр.80) для решения на конечном промежутке $T_0\leqslant t\leqslant T$. Мы не обсуждаем подробнее этот этап.

В следующем утверждении демонстрируется основная идея используемого подхода.

Лемма 1. *Пусть система дифференциальных уравнений* (1) *обладает свойствами* (2), (3), $0<\delta\leqslant 1$. *Если коэффициенты линейной системы* (5) *удовлетворяют неравенствам*

$$a+d<0,\quad (a+d)^2>(b+c)^2, \tag{6}$$

то существует значение $T>0$ такое, что при всех $t>T$ решение $x=0$, $y=0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия как для системы (5) *так и для системы* (1).

Вначале проведем доказательство утверждения для линеаризованной системы (5). Доказательство сводится к построению функции Ляпунова в виде

$$V(x,y,t)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+t^{-\delta}\alpha\, xy$$

при подходящем выборе констант α и $T\geq 0$. Такая функция является положительно определенной при $t>|\alpha|^{1/\delta}$. Константы α и $T\geq T_0$ выбираются на основе анализа производной вдоль траектории системы (5):

$$\frac{d}{dt}V(x,y,t)\Big|_{(5)}=t^{-\delta}[(a-\alpha)x^2+(b+c)xy+(\alpha+d)y^2+\varphi(x,y,t)].$$

Здесь функция

$$\varphi=\alpha[y(ax+by)t^{-\delta}+x(cx+dy)t^{-\delta}-\delta\, xyt^{-1}]$$

мала на бесконечности по t и оценивается: $|\varphi(x,y,t)|\leqslant Mr^2[t^{-\delta}+t^{-1}]$, ($M=\mathrm{const}$) равномерно по x и y в окрестности нуля. Поэтому производная в главном члене асимптотики при $t\to\infty$ содержит лишь квадратичную форму.

Для того чтобы $V(x,y,t)$ была функцией Ляпунова, необходимо, чтобы квадратичная форма, возникающая в производной, была отрицательно определена. Запишем условия знакоопределенности квадратичной формы (критерий Сильвестра, [8] стр. 181):

$$a-\alpha<0,\quad P(\alpha)\equiv\alpha^2+\alpha(d-a)+\frac{1}{4}(b+c)^2-da<0. \tag{7}$$

Нули полинома $P(\alpha)=0$ определяются соотношениями $\alpha_{\mp}=\frac{1}{2}\big[\ a-d\mp\sqrt{(a+d)^2-(b+c)^2}\ \big]$. Поскольку $(a+d)^2>(b+c)^2$, то промежуток (α_-,α_+) не пуст, так что существует $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$, при котором выполнено второе условие из (7): $P(\alpha) < 0$. Так как $a + d < 0$ и $0 \leqslant (b+c)^2 \quad \forall b, c$, то $a + d \leqslant -\sqrt{(a+d)^2 - (b+c)^2}$ или, что тоже самое $a \leqslant \frac{1}{2}\big[\ a - d - \sqrt{(a+d)^2 - (b+c)^2}\ \big] = \alpha_-$. Из последнего неравенства следует первое условие (7). Таким образом, при выборе α из отрезка (α_-, α_+) квадратичная форма отрицательна и оценивается сверху величиной $-mt^{-\delta}r^2$ с положительной константой $m > 0$.

В результате для производной получается оценка

$$\frac{dV}{dt} \leqslant t^{-\delta}r^2\big(-m + M[t^{-\delta} + t^{-1}]\big) \leqslant t^{-\delta}r^2\big(-m + M[T^{-\delta} + T^{-1}]\big).$$

Если теперь выбрать значение $T > |\alpha|^{1/\delta}$ достаточно большим, чтобы $-m + M[T^{-\delta} + T^{-1}] < 0$, то производная оказывается отрицательной:

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\mu t^{-\delta} V \quad \Rightarrow \quad V \leqslant C \exp\left(\mu t^{1-\delta}/(1-\delta)\right)$$

при $0 < \delta < 1$, и $V \leqslant Ct^{-\mu}$ при $\delta = 1$ ($\mu = \mathrm{const} > 0$). Константа C зависит от траектории. Поскольку, $m_1 r^2 \leqslant V \leqslant m_2 r^2$ ($m_1, m_2 = \mathrm{const} > 0$), то решение $x = 0,\ y = 0$ системы (5) асимптотически устойчиво.

Для анализа устойчивости полной системы (1) надо использовать гамильтониан в конструкции функции Ляпунова:

$$V(x, y, t) = H(x, y) + t^{-\delta}\alpha\, xy.$$

Такая функция является положительной в окрестности нуля по x, y и при $t > q|\alpha|^{1/\delta}$, ($0 < q = \mathrm{const} < \infty$). Для подбора констант α, T вычислим производную функции $V(x, y, t)$ вдоль траектории системы (1):

$$\frac{d}{dt}V(x, y, t)\Big|_{(1)} = t^{-\delta}[(a - \alpha)x^2 + (b + c)xy + (\alpha + d)y^2 + \phi(x, y) + \psi(x, y, t)].$$

Для функций

$$\phi(x, y) = (ax + by - \alpha x)\partial_x h(x, y) + (cx + dy + \alpha y)\partial_y h(x, y),$$

$$\psi(x, y, t) = [\partial_x H(x, y)\, f(x, y, t) + \partial_y H(x, y)\, g(x, y, t)] +$$

$$+\alpha t^{-\delta}\big[y(ax + by + f(x, y, t)) + x(cx + dy + g(x, y, t))\big] - \alpha\delta\, xyt^{-1}$$

имеют место оценки:

$$|\phi(x, y)| \leqslant Mr^3,\ |\psi(x, y, t)| \leqslant Mr^2[t^{-\nu-\delta} + t^{-\delta} + t^{-1}],\ \forall\, (x, y, t) \in D.$$

Поэтому для производной получается оценка

$$\frac{dV}{dt} \leqslant t^{-\delta}r^2\big(-m + M[t^{-\nu-\delta} + t^{-\delta} + t^{-1}]\big) \leqslant$$

$$\leqslant t^{-\delta}r^2\big(-m + M[T^{-\nu-\delta} + T^{-\delta} + T^{-1}]\big),\quad \forall\, t \geq T.$$

Если теперь выбрать значение $T > q|\alpha|^{1/\delta}$ достаточно большим, чтобы $-m + M[T^{-\nu-\delta} + T^{-\delta} + T^{-1}] < 0$, то производная оказывается отрицательной: $dV/dt < 0$ при $t \geq T$. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство утверждения для линеаризованной системы. Следовательно $V(x, y, t)$ является функцией Ляпунова, и тем самым решение $x = 0,\ y = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво. Лемма доказана.

Замечание. Функция Ляпунова по сути дела обеспечивает априорную оценку для решений дифференциальных уравнений. Доказав наличие такой функции можно сделать вывод о существовании глобального решения на полуоси $T < t < \infty$ для задачи Коши с начальными данными из окрестности положения равновесия [9].

Ценой некоторого усложнения конструкции второе неравенство в условии (6) можно опустить и доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть система дифференциальных уравнений* (1) *обладает свойствами* (2), (3), $0 < \delta \leqslant 1$. *Если коэффициенты линейной системы* (5) *удовлетворяют неравенству*

$$a + d < 0, \tag{8}$$

то существует значение $T > 0$ *такое, что при всех* $t > T$ *положение равновесия* $x = 0, y = 0$ *является асимптотически устойчивым решением как для системы* (5) *так и для системы* (1).

Доказательство. Функция Ляпунова строится в виде:

$$V(x,y,t) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + t^{-\delta}\Big[\alpha\, xy - \frac{(b+c)}{2}x^2\Big]. \tag{9}$$

В окрестности нуля по x и y и при $t > q(|\alpha| + |b+c|)^{1/\delta}$ функция V положительно определенная. Выбор коэффициентов α, T делается на основе линеаризованной системы (5). Составим производную функции $V(x,y,t)$ вдоль траектории уравнений (5):

$$\frac{d}{dt}V(x,y,t)\Big|_{(5)} = t^{-\delta}[(a-\alpha)x^2 + (d+\alpha)y^2 + \varphi(x,y,t)].$$

Заметим, что промежуток $(a, -d)$ не пуст в силу условия $a + d \ < \ 0$. Если выбрать $\alpha \in (a, -d)$, то получившаяся здесь квадратичная форма будет отрицательна, поскольку оказывается $a - \alpha < 0, \ d + \alpha < 0$, и оценивается сверху величиной $-mt^{-\delta}r^2$ с константой $m > 0$. Оставшееся слагаемое представлено функцией

$$\varphi(x,y,t) = t^{-\delta}\Big[\big(\alpha y - (b+c)x\big)(ax+by) + \alpha x(cx+dy)\Big] - \delta\, t^{-1}\Big[\alpha xy - \frac{(b+c)}{2}x^2\Big]. \tag{10}$$

Эта функция оказывается мала при $t \to \infty$ и для нее справедлива оценка: $|\varphi(x,y,t)| \leqslant Mr^2[t^{-\delta} + t^{-1}]$, равномерная по x и y в окрестности нуля. Таким образом, для производной получается оценка

$$\frac{dV}{dt} \leqslant r^2t^{-\delta}\big(-m + M[t^{-\delta} + t^{-1}]\big) \leqslant r^2t^{-\delta}\big(-m + M[T^{-\delta} + T^{-1}]\big).$$

Если выбрать $T > q(|\alpha| + |b+c|)^{1/\delta}$ достаточно большим, чтобы $-m + M[T^{-\delta} + T^{-1}] < 0$, то производная будет отрицательна $dV/dt < 0$. Следовательно, $V(x,y,t)$ является функцией Ляпунова при $t \geq T$ и положение равновесия $x = 0, \ y = 0$ является устойчивым решением системы (5). Для системы (1) немного изменяется вид функции Ляпунова

$$V(x,y,t) = H(x,y) + t^{-\delta}\Big[\alpha\, xy - \frac{(b+c)}{2}x^2\Big].$$

Асимптотическая устойчивость положения равновесия следует из оценок, аналогичных приведенным в Лемме 1.

3. Теорема о неустойчивости

Достаточное условие устойчивости, данное в теореме 1 близко к необходимому, как показывает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть система дифференциальных уравнений* (1) *обладает свойствами* (2), (3), $0 < \delta \leqslant 1$. *Если коэффициенты линейной системы* (5) *удовлетворяют неравенству*

$$a + d > 0, \tag{11}$$

то существует значение $T > 0$ *такое, что при всех* $t > T$ *положение равновесия* $x = 0, y = 0$ *является неустойчивым как для системы* (5) *так и для системы* (1).

Доказательство основано на построении положительно определенной функции $V(x, y, t)$, производная которой вдоль траектории решения уравнений (5) положительно определена в некоторой окрестности нуля (Теорема Ляпунова о неустойчивости, см. [1], стр.190). В качестве такой функции можно использовать конструкцию из предыдущей теоремы (9), которая оказывается положительно определенной в окрестности нуля по x, y при $t > q(|\alpha| + |b + c|)^{1/\delta}$, $(q = \text{const} > 0)$. Ее производная в силу системы (5) имеет тот же вид:

$$\frac{d}{dt}V(x,y,t)\Big|_{(5)} = t^{-\delta}\big[(a-\alpha)x^2 + (d+\alpha)y^2 + \varphi(x,y,t)\big].$$

Заметим, что промежуток $(-d, a)$ не пуст в силу условия $a + d > 0$. Если выбрать $\alpha \in (-d, a)$, то получившаяся здесь квадратичная форма будет положительна, поскольку оказывается $a - \alpha > 0$, $d + \alpha > 0$. При таком выборе α квадратичная форма положительна и оценивается снизу величиной $mt^{-\delta}r^2$ с константой $m > 0$. Оставшееся слагаемое представлено функцией (10), которая мала $|\varphi(x, y, t)| \leqslant Mr^2[t^{-\delta} + t^{-1}]$ равномерно по x и y в окрестности нуля.

Таким образом, для производной получается оценка

$$\frac{dV}{dt} > r^2t^{-\delta}(m - M[t^{-\delta} + t^{-1}]) > r^2t^{-\delta}(m - M[T^{-\delta} + T^{-1}]).$$

Выберем $T > q(|\alpha| + |b + c|)^{1/\delta}$ достаточно большим, чтобы $m - M[T^{-\delta} + T^{-1}] > 0$. В силу неравенства $m_1r^2 \leqslant V \leqslant m_2r^2$, $(m_1, m_2 = \text{const} > 0)$ в случае $\delta = 1$ для производной справедлива следующая оценка:

$$\frac{dV}{dt} > \mu \cdot t^{-1}V \quad \Rightarrow \quad V > Ct^{\mu}, \quad \mu = \text{const} > 0.$$

Если $0 < \delta < 1$, то для функции V будет верна аналогичная оценка с экспонентой. Константа C зависит от выбранной траектории. Из последних оценок следует, что решение системы (5) $x(t) = y(t) = 0$ является неустойчивым.

Для решения вопроса неустойчивости нулевого решения для системы (1) построим положительно определенную в окрестности нуля по x, y и при $t > q(|\alpha| + |b + c|)^{1/\delta}$ функцию, используя гамильтониан:

$$V(x,y,t) = H(x,y) + (\alpha xy - \frac{b+c}{2}x^2)t^{-\delta}.$$

Ее производная в силу системы (1) представляется в виде:

$$\frac{d}{dt}V(x,y,t)\Big|_{(1)} = t^{-\delta}[(a-\alpha)x^2 + (d+\alpha)y^2 + \phi(x,y) + \psi(x,y,\tau)].$$

Для функций

$$\phi(x,y) = [(\alpha + d)y - bx]\partial h_y(x,y) + [(a-\alpha)x + by]\partial_x h(x,y),$$

$$\psi(x,y,\tau) = [\partial_x H(x,y)f(x,y,t) + \partial_y H(x,y)g(x,y,t)] +$$

$$+t^{-\delta}\big[\alpha(y - (b+c)x)(ax + by + f) + \alpha x(cx + dy + g)\big] - \delta t^{-1}(\alpha xy - \frac{b+c}{2}x^2)$$

имеют место следующие оценки:

$$|\phi(x,y)| \leqslant Mr^3, \ |\psi(x,y,t)| \leqslant Mr^2[t^{-\nu-\delta} + t^{-\delta} + t^{-1}], \ \forall\, (x,y,t) \in D.$$

При выборе $\alpha \in (-d, a)$ квадратичная форма положительна и оценивается снизу $mt^{-\delta}r^2$ с положительной константой $m > 0$. Таким образом, для производной получается оценка

$$\frac{dV}{dt} > r^2 t^{-\delta}(m - M[t^{-\nu-\delta} + t^{-\delta} + t^{-1}]) > r^2 t^{-\delta}(m - M[T^{-\nu-\delta} + T^{-\delta} + T^{-1}]).$$

Дальнейшие рассуждения повторяют первую часть доказательства теоремы.

4. Примеры для уравнений Пенлеве

Полученные выше результаты можно применять к нелинейным неавтономным уравнениям для исследования асимптотики их решений на бесконечности. Наиболее простой пример дает частный случай третьего уравнения Пенлеве

Уравнение P3.

$$\ddot{x} + \sin x = -t^{-1}\dot{x}. \tag{12}$$

эквивалентно системе типа (1):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x - t^{-1}y.$$

В данном случае $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x + 1$, коэффициенты $a = b = c = 0$, $d = -1$. Положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ соответствует неподвижной точке типа центр для предельной системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x$. Устойчивость положения равновесия для полной системы вытекает из теоремы 1, поскольку $a + d = -1 < 0$. Впрочем, этот результат известен, [10].

Для других уравнений Пенлеве неподвижных точек обычно не существует. Вместо них рассматриваются специальные решения, которые выделяются структурой своей асимптотики на бесконечности. Вопрос об устойчивости таких решений легко сводится к вопросу об устойчивости неподвижных точек в слегка преобразованных уравнениях. Ясно, что структура преобразованного уравнения и свойства неподвижной точки зависят от выбранного решения.

В теории дифференциальных уравнений популярны и широко известны асимптотики в наиболее простой форме: в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами [11, 12]. Хотя соответствующие решения, как правило, оказываются исключительными (не общими), однако, именно среди них встречаются физически осмысленные и значимые для приложений. При этом надо учитывать, что реальным (наблюдаемым) состояниям физических систем обычно соответствуют устойчивые решения. Такими свойствами обладает часть решений со степенной асимптотикой.

Устойчивость таких исключительных решений иногда получается, как следствие результатов об асимптотике общих решений [10]. Однако, исследование общих решений нередко уводит в сторону: значительные математические трудности возникают как в формальных построениях при выборе анзатца так и в теоремах обоснования при оценке остаточных членов [13, 14]. Между тем, во многих ситуациях вопрос устойчивости можно решить сравнительно просто, используя теорему 1.

Ниже приведены результаты об устойчивости решений со степенной асимптотикой для уравнений Пенлеве. Часть этих результатов носит иллюстративный характер, поскольку их можно извлечь из известных асимптотик [10] (первые два уравнения: P1,P2). Для четвертого уравнения (P4) результат об устойчивости, по-видимому, не был строго доказан.

Уравнение P1.

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 6u^2 - 6z. \tag{13}$$

После замены переменных: $t = 4z^{5/4}/5$, $u(z) = \sqrt{z} \cdot x(t)$ уравнение (13) принимает вид:

$$\ddot{x} - 6x^2 + 6 = -t^{-1}\dot{x} + t^{-2}\frac{4}{25}x. \tag{14}$$

При $t \to \infty$ заменим правую часть уравнения (14) нулем и перейдем к рассмотрению предельного уравнения: $\ddot{x} - 6x^2 + 6 = 0$, которому соответствует система: $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 6x^2 - 6$. В этой автономной системе имеются две неподвижные точки $x_0 = \pm 1,\ y_0 = 0$.

Если в качестве главного члена асимптотики взять $x_0 = \pm 1$, то для неавтономного уравнения (14) легко построить полное асимптотическое разложение в виде степенного ряда:

$$x_{\pm}(t) = \pm 1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n^{\pm} t^{-n}$$

с постоянными коэффициентами $x_n^{\pm}$. В случае, соответствующем $x_0 = 1$, решение $x_+(t)$ будет неустойчивым, как следует из анализа линеаризованной автономной системы [1]. Вопрос об асимптотической устойчивости решения $x_-(t)$ сводится к исследованию устойчивости нулевого решения преобразованной системы, получаемой из исходной заменой $x = x_- + \widetilde{x},\ y = x'_- + \widetilde{y}$. Для преобразованной системы будем использовать старые обозначения $\widetilde{x} \Rightarrow x,\ \widetilde{y} \Rightarrow y$:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 6x^2 + 12x_-(t)x - t^{-1}y + t^{-2}\frac{4}{25}x. \tag{15}$$

В функции $x_-(t)$ выделим главный член асимптотики при $t \to \infty$ и перенормируем переменные, оставляя старые обозначения: $x \Rightarrow x/\sqrt{12},\ t \Rightarrow t/\sqrt{12}$. Тогда уравнения (15) переписываются в стандартной форме (1)

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \frac{x^2}{2\sqrt{12}} - t^{-1}[y + g(x, y, t)]$$

с $a = b = c = 0,\ d = -1$, гамильтонианом $H = (x^2 + y^2)/2 - x^3/12\sqrt{3}$ и с неавтономным слагаемым $g(x, y, t) = \mathcal{O}(t^{-1}),\ t \to \infty$. Эти уравнения имеют тривиальное решение $x = 0,\ y = 0$ – положение равновесия.

Устойчивость положения равновесия не определяется автономной системой. Здесь требуется учитывать структуру линейной части в главном члене асимптотики неавтономных слагаемых. Теперь устойчивость положения равновесия следует из теоремы 1, поскольку $a + d = -1 < 0$. Следовательно, для уравнения (14) решение со степенной асимптотикой $x_-(t)$ асимптотически устойчиво.

Уравнение P2.

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 2u^3 - 2zu + \frac{2\alpha}{3}, \quad (\alpha = \text{const}). \tag{16}$$

После замены переменных $t = 2z^{3/2}/3,\ u(z) = \sqrt{z} \cdot x(t)$ уравнение (16) принимает вид:

$$\ddot{x} - 2x^3 + 2x = t^{-1}(\alpha - \dot{x}) + t^{-2}\frac{1}{9}x. \tag{17}$$

В пределе при $t \to \infty$ получается уравнение $\ddot{x} - 2x^3 + 2x = 0$, которому соответствует автономная система: $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 2x^3 - 2x$. В этой системе имеются три неподвижные точки $\{\pm 1, 0\}$ и $\{0, 0\}$. Неподвижные точки $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ являются седловыми, поэтому, полагаясь на предыдущий опыт, эти точки мы оставляем в стороне. Точка $(0, 0)$ в автономной системе является центром. Если в качестве главного члена асимптотики взять эту точку, то для неавтономного уравнения (17) можно построить полное асимптотическое разложение в виде степенного ряда с постоянными коэффициентами:

$$x_0(t) = \frac{\alpha}{2t} + \sum_{n=3}^{\infty} x_n t^{-n}$$

Используя это решение, сделаем сдвиг переменных в неавтономной системе: $x = x_0 + \widetilde{x}$, $y = x_0' + \widetilde{y}$. Сохраняя старые обозначения $\widetilde{x} \Rightarrow x$, $\widetilde{y} \Rightarrow y$, запишем новые уравнения в виде:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 2x^3 + 6x_0(t)^2 x + 6x_0(t)x^2 - 2x - t^{-1}y + t^{-2}\frac{1}{9}x.$$

Путем перенормировки $x \Rightarrow x/\sqrt{2}$, $t \Rightarrow t/\sqrt{2}$ уравнения приводятся к виду:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \frac{x^3}{2} - t^{-1}y + t^{-2}\frac{1}{9}x + 3x_0(t)^2 x + \frac{3}{\sqrt{2}}x_0(t)x^2. \tag{18}$$

Точка $x = 0$, $y = 0$ является положением равновесия этой системы. Эти уравнения имеют стандартную форму (1) с гамильтонианом $H = (x^2 + y^2)/2 - x^4/8$ и с коэффициентами $a = b = c = 0$, $d = -1$. Поскольку $a + d = -1 < 0$, то положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчиво. Следовательно, для исходного уравнения (17) решение со степенной асимптотикой $x_0(t)$ асимптотически устойчиво.

Уравнение P4.

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{2u}\Big(\frac{du}{dz}\Big)^2 + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{u}, \quad (\alpha, \beta = \mathrm{const}). \tag{19}$$

Сделаем замену переменных: $t = z^2$, $u(z) = z \cdot x(t)$, тогда уравнение (19) принимает вид:

$$\ddot{x} - \frac{\dot{x}^2}{2x} - \frac{x}{2} - x^2 - \frac{3}{8}x^3 = \frac{x}{8t^2} - \frac{\dot{x}}{t} - \frac{\alpha x}{2t} + \frac{\beta}{4xt^2}.$$

Для записи эквивалентной системы двух уравнений первого порядка удобно использовать переменные, которые обеспечивают гамильтоновость автономной части:

$$\dot{x} = y\,x, \quad \dot{y} = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} + x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{t}\big(y + \frac{\alpha}{2}\big) + \frac{1}{t^2}\big(\frac{1}{8} + \frac{\beta}{4x^2}\big). \tag{20}$$

Соответствующие автономные уравнения будут гамильтоновы:

$$\dot{x} = y\,x, \quad \dot{y} = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} + x + \frac{3}{8}x^2.$$

В этой системе имеется две неподвижные точки $(-2, 0)$ и $(-2/3, 0)$, на основе которых возможно построение решений со степенной асимптотикой для неавтономных уравнений. Первая из этих точек является седловой, а вторая является центром.

Если в качестве главного члена асимптотики взять $x = -2/3$, $y = 0$, то можно построить полное асимптотическое разложение решения в виде степенного ряда с постоянными коэффициентами

$$x_0(t) = -\frac{2}{3} + \frac{\alpha}{t} + \sum_{n=2}^{\infty} x_n t^{-n}, \quad y_0(t) = x_0'(t)/x_0(t).$$

Коэффициенты $x_n = \mathrm{const}$ находятся из рекуррентных формул, после подстановки ряда в уравнение (20).

Используя это решение, сделаем замену переменных в неавтономной системе: $x = x_0 + \widetilde{x}$, $y = y_0 - \sqrt{3}\widetilde{y}/2$, $t = \sqrt{3} \cdot \widetilde{t}$. Сохраняя старые обозначения $\widetilde{x} \Rightarrow x$, $\widetilde{y} \Rightarrow y$, $\widetilde{t} \Rightarrow t$, запишем новые уравнения в виде:

$$\dot{x} = y - \frac{3}{2}yx - t^{-1}\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}y + \phi_1(x, y, t),$$

$$\dot{y} = -x - \frac{3}{4}(x^2 + y^2) - t^{-1}\big(\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}x + y\big) + \phi_2(x, y, t).$$

Здесь функции из неавтономной части имеют оценки

$$|\phi_1(x,y,t)|, |\phi_2(x,y,t)| \leqslant Mt^{-2},\ M = \text{const},\ t > 1,$$

и точка $x = 0,\ y = 0$ является положением равновесия. Эти уравнения соответствуют системе (1) с гамильтонианом $H = (x^2 + y^2)/2 + x^3/4 - 3xy^2/4$ и с коэффициентами $a = 0,\ b = -\sqrt{3}\alpha/2,\ c = -\sqrt{3}\alpha/2,\ d = -1$. Поскольку $a + d = -1 < 0$, то положение равновесия $x = 0,\ y = 0$ асимптотически устойчиво. Следовательно, для исходного уравнения (20) решение со степенной асимптотикой $x_0(t)$ асимптотически устойчиво.

5. Заключение

Таким образом, для неавтономных систем вида (1) сформулированы и доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости решений. Для проверки асимптотической устойчивости в таких уравнениях достаточно проверить выполнение некоторых условий на коэффициенты при линейных по x и y слагаемых в неавтономной части системы. Из доказанных утверждений видно, что полученные достаточные условия устойчивости близки к необходимым. Остается неисследованным так называемый нейтральный случай с $a+d = 0$, когда требуется анализ нелинейных слагаемых.

Результаты, полученные для двумерной системы (1), можно обобщать на многомерные системы. При этом основным объектом исследования оказываются линейные неавтономные системы типа (5). Однако, условия, гарантирующие устойчивость, будут выглядеть не столь просто.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения.* М.;Л.: ГИТТЛ. 1952.
2. Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* М.: Физматгиз, 1959.
3. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.:Наука. 1983.
4. Меркин Д.Р. *Введение в теорию устойчивости движения.* 4-е изд., стер. СПб.: Изд-во «Лань», 2003. 304 с.
5. Анапольский Л.Ю., Иртегов В.Д., Матросов В.М. *Способы построения функции Ляпунова.*// Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ. 1975. Т. 2. С. 53-112.
6. Матросов В.М., Маликов А.И. *Развитие идей А.М.Ляпунова за 100 лет: 1892 - 1992* // Изв. вузов. Математика. №4(371). 1993. С.3-47.
7. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: МГУ. 1984.
8. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* Изд. 9-е. Изд-во Наука, Москва. 1968. 431 с.
9. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* Изд. 3-е, испр. М.:Едиториал УРСС. 2004. 522 с.
10. Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С. *Транценденты Пенлеве. Метод задачи Римана.* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 728 с.
11. Козлов В.В., Фурта С.Д. *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальныхз уравнений.* М.: Изд-во Моск. ун-та. 1996. 244 с.
12. Брюно А.Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* М.: Наука. 1998. 288 с.
13. Калякин Л.А. *Асимптотика на бесконечности решений уравнений, близких к гамильтоновым,* // Современная математика и ее приложения Т. 53. 2008. С. 138-160.
14. Калякин Л.А. *Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности* // Уфимский мат. журнал. Т. 1. №2. 2009. С. 29-52.

Оскар Анварович Султанов,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450025, г. Уфа, Россия
E-mail: `osa-uf@rambler.ru`