ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 4 (2010). С. 98-106.

УДК 517.444, 517.518.28, 517.518.862

КОНТРПРИМЕР К ГИПОТЕЗЕ ХАБИБУЛЛИНА ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Р.А. ШАРИПОВ

Аннотация. Гипотеза Хабибуллина об интегральных неравенствах в своей формулировке содержит два числовых параметра n и α, где n — целое положительное число, а α — положительное вещественное число. Ранее было доказано, что гипотеза Хабибуллина верна в случае $n > 0$ и $0 < \alpha \leqslant 1/2$. Однако при $\alpha > 1/2$ она не всегда верна. В данной работе строится контрпример для случая $n = 2$ и $\alpha = 2$. После этого гипотеза Хабибуллина переформулируется так, что она становится верной при всех $\alpha > 0$.

Ключевые слова: гипотеза Хабибуллина, интегральные неравенства, интегральные преобразования.

1. Введение

Гипотеза 1.1 (Хабибуллин). *Пусть α — положительное вещественное число и пусть $q = q(t)$ — непрерывная функция, такая, что $q(t) \geqslant 0$ для всех $t > 0$. Тогда, если неравенство*

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^1 (1-y)^{n-1} \,\frac{dy}{y} \right) q(tx)\,dx \leqslant t^{\alpha-1} \tag{1.1}$$

выполняется для всех $0 \leqslant t < +\infty$, то из него вытекает неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} q(t)\,\ln\Bigl(1 + \frac{1}{t^{2\alpha}}\Bigr)\,dt \leqslant \pi\,\alpha \prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1 + \frac{\alpha}{k}\Bigr). \tag{1.2}$$

Эта гипотеза была первоначально сформулирована в работах [1] и [2], хотя и в несколько иной форме. В [3] была дана ее формулировка очень близкая к приведенной выше. В [4] было доказано, что гипотеза 1.1 верна в случае $0 < \alpha \leqslant 1/2$. Другое доказательство этого результата содержится в [5].

К сожалению, за пределами интервала $0 < \alpha \leqslant 1/2$ гипотеза 1.1 не всегда верна. Основная цель данной работы — построить контрпример к гипотезе 1.1 для случая $n = 2$ и $\alpha = 2$, после чего переформулировать эту гипотезу так, чтобы она была выполнена при всех целых $n > 0$ и при всех $\alpha > 0$.

2. Ядро и функция перехода

Обозначение $A_n(x)$ для ядра и функция перехода $\Phi_n(t)$, связанные с гипотезой 1.1, были введены в [5]. Ядро определяется формулой

$$A_n(x) = \int\limits_x^1 (1-y)^n \,\frac{dy}{y}. \tag{2.1}$$

R.A. Sharipov, A counterexample to Khabibullin's conjecture for integral inequalities.

Поступила 13 сентября 2010 г.

С помощью ядра (2.1) неравенство (1.1) записывается в виде

$$\int_0^1 A_{n-1}(x)\, q(t\, x)\, dx \leqslant t^{\alpha-1}, \text{ где } t \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Опуская несущественное значение $t = 0$ и делая в интеграле (2.2) замену переменной x на переменную $y = t\, x$, преобразуем этот интеграл к интегралу

$$\int_0^t A_{n-1}(y/t)\, q(y)\, dy \leqslant t^{\alpha}, \text{ где } t > 0. \tag{2.3}$$

Понятие функции перехода $\Phi_n(t)$ является более сложным. Эта функция была введена в [5] при помощи следующей формулы:

$$\Phi_n(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{(-t)^{n+1}}{n!}\,\frac{d^{n+1}\varphi}{dt^{n+1}}\right). \tag{2.4}$$

Здесь $\varphi = \varphi(t)$ — некоторая гладкая функция одной переменной t. Основным свойством функции перехода (2.4) является ее взаимодействие с ядром (2.1):

$$\int_y^{+\infty} \Phi_n(t)\, A_n(y/t)\, dt = \varphi(y) \text{ для } n \geqslant 0 \tag{2.5}$$

(см. лемму 5.1 в [5]). Для того чтобы применить формулу (2.5) к гипотезе Хабибуллина 1.1, надо выбрать конкретную функцию $\varphi(t)$ в (2.4):

$$\varphi(t) = \ln(1 + t^{-2\,\alpha}), \text{ где } \alpha > 0. \tag{2.6}$$

Функция (2.6) зависит от α. Эта зависимость наследуется функцией перехода (2.4). Поэтому мы станем писать $\Phi_n = \Phi_n(\alpha, t)$. Тогда (2.5) запишется как

$$\int_y^{+\infty} \Phi_{n-1}(\alpha, t)\, A_{n-1}(y/t)\, dt = \ln(1 + y^{-2\,\alpha}) \text{ для } n \geqslant 1. \tag{2.7}$$

Заметим, что функция (2.6) входит в подинтегральное выражение в левой части неравенства (1.2). По этой причине формула (2.7) служит мостом, связывающим неравенства (1.1) и (1.2), в гипотезе Хабибуллина.

3. Применение к гипотезе Хабибуллина

Заметим, что первое неравенство в гипотезе Хабибуллина 1.1 записано как (2.3). Умножим обе части (2.3) на $\Phi_{n-1}(\alpha, t)$ и получим

$$\int_0^t \Phi_{n-1}(\alpha, t)\, A_{n-1}(y/t)\, q(y)\, dy \leqslant \Phi_{n-1}(\alpha, t)\; t^{\alpha}. \tag{3.1}$$

Неравенство (3.1) вытекало бы из (2.3) при условии $\Phi_{n-1}(\alpha, t) \geqslant 0$. Но в действительности положительные значения функции $\Phi_{n-1}(\alpha, t)$ чередуются с отрицательными значениями. По этой причине мы разделим положительную числовую полуось $t > 0$ на два подмножества M_+ и M_-:

$$\begin{aligned} M_+ &= M_+(n, \alpha) = \{t \in \mathbb{R}\colon\ t > 0 \ \text{ и } \ \Phi_{n-1}(\alpha, t) \geqslant 0\},\\ M_- &= M_-(n, \alpha) = \{t \in \mathbb{R}\colon\ t > 0 \ \text{ и } \ \Phi_{n-1}(\alpha, t) < 0\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Неравенство (3.1) выполнено при $t \in M_+(n, \alpha)$. Если же $t \in M_-(n, \alpha)$, неравенство (3.1) не выполняется. В этом случае воспользуемся тем, что ядро $A_n(x)$ положительно, т. е.

$A_n(x) > 0$ для $0 < x < 1$ (см. [5]). Функция $q(y)$ неотрицательна согласно условию гипотезы 1.1. Что же касается функции $\mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)$, она отрицательна при $t \in M_-(n, \alpha)$ (см. (3.2)). Как результат этого в случае, когда $t \in M_-(n, \alpha)$, получаем следующее неравенство:

$$\int\limits_0^t \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\, A_{n-1}(y/t)\, q(y)\, dy \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Скомбинировав неравенства (3.1) и (3.3), запишем

$$\int\limits_0^t \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\, A_{n-1}(y/t)\, q(y)\, dy \leqslant \begin{cases} \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\ t^\alpha & \text{при} \ \ t \in M_+, \\ \quad 0 & \text{при} \ \ t \in M_-. \end{cases} \tag{3.4}$$

Теперь проинтегрируем (3.4) по t от нуля до бесконечности:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^t \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\, A_{n-1}(y/t)\, q(y)\, dy \right) dt \ \leqslant \int\limits_{t \in M_+} \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\ t^\alpha\, dt. \tag{3.5}$$

Поменяв порядок интегрирования в левой части (3.5), будем иметь

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_y^{+\infty} \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\, A_{n-1}(y/t)\, dt \right) q(y)\, dy \ \leqslant \int\limits_{t \in M_+} \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\ t^\alpha\, dt. \tag{3.6}$$

Теперь применим (2.7) к (3.6), что даст следующее неравенство:

$$\int\limits_0^{+\infty} \ln(1 + y^{-2\,\alpha})\, q(y)\, dy \ \leqslant \int\limits_{t \in M_+} \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\ t^\alpha\, dt. \tag{3.7}$$

Отметим, что интеграл в левой части (3.7) совпадает с интегралом в (1.2), т. е. во втором неравенстве из гипотезы Хабибуллина 1.1. Имеется формула

$$\mathit{\Phi}_n(\alpha, t) = \frac{4\,\alpha^2}{t} \cdot \frac{t^{2\,\alpha}\, P_n(\alpha, z)}{(1 + t^{2\,\alpha})^{n+2}}. \tag{3.8}$$

Она была выведена в [5]. В ней $z = t^{2\,\alpha}$, а $P_n(\alpha, z)$ — это полином степени n относительно переменной z. Из формулы (3.8) выводим

$$\mathit{\Phi}_n(\alpha, t) = \begin{cases} O(t^{2\,\alpha - 1}) & \text{при} \ \ t \longrightarrow +0, \\ O(t^{-2\,\alpha - 1}) & \text{при} \ \ t \longrightarrow +\infty. \end{cases} \tag{3.9}$$

В силу (3.9) интеграл в правой части (3.7) конечен. Его значение — это положительное число, зависящее от n и α. Обозначим его $C(n, \alpha)$:

$$C(n, \alpha) \ = \int\limits_{t \in M_+} \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\ t^\alpha\, dt < \infty. \tag{3.10}$$

Кроме (3.10) мы рассмотрим еще два интеграла:

$$\int\limits_{t \in M_-} \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\ t^\alpha\, dt, \qquad\qquad \int\limits_0^{+\infty} \mathit{\Phi}_{n-1}(\alpha, t)\ t^\alpha\, dt. \tag{3.11}$$

В силу (3.9) оба интеграла (3.11) конечны. В силу (3.2) первый из них неположителен. Эти интегралы связаны с (3.10) следующим образом:

$$C(n,\alpha)\ +\int\limits_{t\in M_-}\varPhi_{n-1}(\alpha,t)\ t^{\alpha}\,dt\ =\int\limits_0^{+\infty}\varPhi_{n-1}(\alpha,t)\ t^{\alpha}\,dt. \tag{3.12}$$

В работе [5] второй интеграл из (3.11) был вычислен явно. Как оказалось, этот интеграл совпадает с числом, стоящим в правой части неравенства (1.2), которое входит в формулировку гипотезы Хабибуллина 1.1, т. е. мы имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}\varPhi_{n-1}(\alpha,t)\ t^{\alpha}\,dt=\pi\,\alpha\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\alpha}{k}\Bigr). \tag{3.13}$$

Поскольку первый интеграл (3.11) неположителен, из (3.12) и (3.13) следует

$$0<\pi\,\alpha\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\alpha}{k}\Bigr)\leqslant C(n,\alpha)<\infty. \tag{3.14}$$

Формула (3.10) для $C(n,\alpha)$ не столь проста по сравнению с (3.13). Тем не менее, $C(n,\alpha)$ следует воспринимать как как конкретную величину, которая может быть эффективно вычислена для каждого конкретного значения n и α. Заменив правую часть неравенства (1.2) на $C(n,\alpha)$, можно сформулировать гипотезу Хабибуллина 1.1 уже не как гипотезу, а как доказанное утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть α — некоторое положительное вещественное число и пусть $q=q(t)$ — непрерывная функция, такая, что $q(t)\geqslant 0$ для всех значений $t>0$. Тогда, если неравенство*

$$\int\limits_0^1\Biggl(\ \int\limits_x^1(1-y)^{n-1}\,\frac{dy}{y}\Biggr)\,q(tx)\,dx\leqslant t^{\alpha-1}$$

выполняется для всех $0\leqslant t<+\infty$, то из него вытекает неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty}q(t)\ \ln\Bigl(1+\frac{1}{t^{2\alpha}}\Bigr)\,dt\leqslant C(n,\alpha). \tag{3.15}$$

4. Контрпример к гипотезе Хабибуллина

В этом разделе мы показываем, что гипотеза Хабибуллина в ее формулировке 1.1 нарушается при $\alpha>1/2$. Поскольку первое из неравенств в гипотезе Хабибуллина при $t>0$ было преобразовано к виду (2.3), определим функцию

$$g(t)=\int\limits_0^t A_{n-1}(y/t)\,q(y)\,dy. \tag{4.1}$$

Формула (4.1) была названа формулой прямого преобразования. Она изучалась в [6], где была выведена формула обратного преобразования, выражающая функцию $q(t)$ обратно через функцию $g(t)$:

$$q(t)=\frac{d^n}{dt^n}\biggl(\frac{t^n\,g'(t)}{(n-1)!}\biggr). \tag{4.2}$$

Как было показано в работе [6], при выполнении условий гипотезы Хабибуллина 1.1 функция (4.1) является $(n+1)$ раз дифференцируемой функцией, которая удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant g(t) \leqslant t^{\alpha} \quad \text{для всех} \quad t > 0. \tag{4.3}$$

Переходя к построению контрпримера к гипотезе 1.1, мы выберем конкретные значения $n = 2$ и $\alpha = 2$. Тогда функция перехода (3.8) примет вид

$$\varPhi_{n-1}(\alpha, t) = \frac{16\,t^3\,P_1(\alpha, z)}{(1+t^4)^3}, \tag{4.4}$$

где $z = t^4$ и $P_1(\alpha, z)$ — это следующий полином:

$$P_1(\alpha, z) = (2\,\alpha + 1)\,z + (1 - 2\,\alpha) = 5\,z - 3 \tag{4.5}$$

(см. формулу (7.6) в [5]). Подставив (4.5) в (4.4), выводим

$$\varPhi_1(2, t) = \frac{16\,t^3\,(5\,t^4 - 3)}{(1+t^4)^3}. \tag{4.6}$$

Важной особенностью функции (4.6) является то, что она не всегда положительна. В соответствии с обозначениями (3.2) имеются два непустых подмножества M_- и M_+ на положительной числовой полуоси $t > 0$:

$$M_- = \{t \in \mathbb{R}\colon\ 0 < t < t_0\}, \qquad\qquad M_+ = \{t \in \mathbb{R}\colon\ t \geqslant t_0\}, \tag{4.7}$$

где $t_0 = \sqrt[4]{3/5}$ — это корень полинома $5\,t^4 - 3$ в числителе дроби (4.6). Опираясь на (4.7), мы построим функцию $g = g(t)$, задав ее двумя разными формулами в M_- и в M_+. Для этой цели мы выберем полином

$$h(t) = \frac{(t - t_0)^4}{t_0^4}. \tag{4.8}$$

Поскольку $\alpha = 2$, положим $g(t) = t^{\alpha} = t^2$ для $t \in M_+$. Для $t \in M_-$ зададим $g(t)$ сплайновым полиномом, составленным при помощи полинома (4.8):

$$g(t) = \begin{cases} t^2\,(1 - \varepsilon\,h(t)) & \text{при} \quad 0 < t < t_0, \\ \qquad t^2 & \text{при} \quad t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Напомним, что $n = 2$ и $n+1 = 3$. Поэтому (4.9) должна быть трижды дифференцируемой функцией. Это приводит к следующим условиям в точке $t = t_0$:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to t_0} g(t) = t_0^2, && \lim_{t\to t_0} g'(t) = 2\,t_0, \\ &\lim_{t\to t_0} g''(t) = 2, && \lim_{t\to t_0} g'''(t) = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Легко проверить, что функция (4.9) удовлетворяет всем условиям (4.10).

Заметим, что $h = h(t)$ в (4.8) — это монотонная функция на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_0$, такая, что $h(0) = 1$ и $h(t_0) = 0$. Отсюда имеем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Функция* (4.9) *удовлетворяет неравенствам* (4.3) *для* $\alpha = 2$ *тогда и только тогда, когда ее параметр* ε *удовлетворяет неравенствам* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.

Построив функцию $g(t)$ при помощи формулы (4.9), мы теперь определим функцию $q = q(t)$, применив формулу обратного преобразования (4.2) к функции $g(t)$. В результате этого действия мы получим формулу

$$q(t) = \begin{cases} 12\,t\,(1 - \varepsilon\,r(t)) & \text{при} \quad 0 < t < t_0, \\ \qquad 12\,t & \text{при} \quad t \geqslant t_0, \end{cases} \tag{4.11}$$

где $r(t)$ — полином степени 4. Для того чтобы сделать формулу для полинома $r(t)$ более простой, мы запишем этот полином как

$$r(t) = R(\tau), \text{ где } \tau = \frac{t_0 - t}{t_0}. \tag{4.12}$$

Тогда полином $R(\tau)$ в (4.12) будет задаваться следующей формулой:

$$R(\tau) = 21\,\tau^4 - 34\,\tau^3 + 16\,\tau^2 - 2\,\tau. \tag{4.13}$$

Видно, что полином (4.13) есть произведение двух полиномов:

$$R(\tau) = (21\,\tau^3 - 34\,\tau^2 + 16\,\tau - 2)\,\tau. \tag{4.14}$$

Обозначим через $R_3(\tau)$ первый множитель в (4.14). Тогда

$$R_3(\tau) = 21\,\tau^3 - 34\,\tau^2 + 16\,\tau - 2. \tag{4.15}$$

Полином (4.15) — это кубический полином от переменной τ. График такого полинома на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ показан на рис. 1. На концах отрезка полином $R_3(\tau)$ принимает значения

$$R_3(0) = -2, \qquad R_3(1) = 1. \tag{4.16}$$

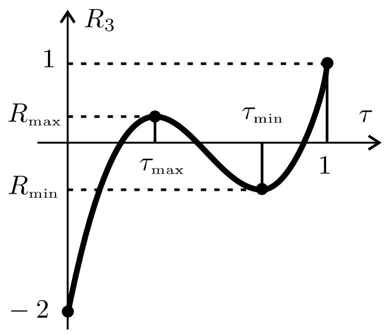

Рис. 1

Значения (4.16) легко проверяются прямым вычислением. Помимо (4.16), на этом отрезке функция $R_3(\tau)$ имеет два локальных экстремума:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{34 - 2\sqrt{37}}{63} \approx 0.34,\\ \tau_{\min} &= \frac{34 + 2\sqrt{37}}{63} \approx 0.73. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Подставляя величины (4.17) в формулу (4.15), мы легко найдем значения полинома $R_3(\tau)$ в его локальных экстремумах $\tau_{\max}$ и $\tau_{\min}$:

$$\begin{aligned} R_{\max} &= \frac{394 + 592\sqrt{37}}{11907} \approx 0.33,\\ R_{\min} &= \frac{394 - 592\sqrt{37}}{11907} \approx -0.26. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Из (4.16) и (4.18) немедленно вытекает неравенство

$$R_3(\tau) \leqslant 1 \text{ для всех } 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{4.19}$$

Поскольку $\tau \geqslant 0$ в (4.19), мы можем домножить обе части (4.19) на τ. Это дает $R_3(\tau)\,\tau \leqslant \tau$. Затем, скомбинировав это неравенство с $\tau \leqslant 1$ и приняв во внимание формулы (4.14) и (4.15), получим

$$R(\tau) \leqslant 1 \text{ для всех } 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{4.20}$$

Применив (4.12), мы преобразуем (4.20) к неравенству

$$r(t) \leqslant 1 \text{ для всех } 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{4.21}$$

В то же самое время, скомбинировав (4.16) с (4.15), (4.14) и (4.12), мы получим

$$r(0) = 1, \qquad\qquad r(t_0) = 0. \tag{4.22}$$

На основе (4.11), (4.21) и (4.22) мы можем сформулировать следующую лемму, которая похожа на лемму 4.1.

Лемма 4.2. *Функция* (4.11) *удовлетворяет неравенству* $q(t) \geqslant 0$ *для всех* $t > 0$ *в том и только в том случае, когда ее параметр* ε *удовлетворяет неравенствам* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.

Теорема 4.1. *Для каждого конкретного значения параметра ε, удовлетворяющего неравенствам $0 < \varepsilon \leqslant 1$, фунция* (4.11) *является контрпримером к гипотезе Хабибуллина 1.1 для случая $n = 2$ и $\alpha = 2$.*

Теорема 4.1 вытекает из леммы 4.2 и предшествующих ей рассуждений в разделах 3 и 4. Действительно, функция (4.11) получена из функции (4.9) при помощи формулы обратного преобразования (4.2). По этой причине подстановка (4.11) в формулу прямого преобразования (4.1) дает функцию (4.9). Этот факт можно проверить также и прямым вычислением.

Формула (4.1) связана с неравенством (1.1) в формулировке гипотезы Хабибуллина 1.1 через формулы (2.3), (2.2) и (2.1). Поэтому, подставляя функцию (4.11) в левую часть неравенства (1.1) с $n = 2$, мы получим

$$\int\limits_0^1\left(\,\int\limits_x^1(1-y)^{n-1}\,\frac{dy}{y}\right)q(tx)\,dx=\frac{g(t)}{t},\tag{4.23}$$

где $g(t)$ задается формулой (4.9). А теперь учтем, что $\alpha = 2$, и применим лемму 4.1 к соотношению (4.23). Это приведет нас к следующему результату.

Лемма 4.3. *Для каждого конкретного значения параметра ε, такого, что* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, *функция* (4.11) *удовлетворяет неравенству* (1.1) *при $n = 2$ и $\alpha = 2$.*

Следующий шаг состоит в том, чтобы вычислить интеграл в левой части неравенства (1.2) для функции (4.11). Для этой цели мы применим формулу

$$\int\limits_0^{+\infty}q(t)\,\ln\!\Big(1+\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big)\,dt\;=\;\int\limits_0^{+\infty}\varPhi_{n-1}(\alpha,t)\,g(t)\,dt.\tag{4.24}$$

Формула (4.24) выведена из (4.1) при помощи формулы (2.7). Учтем, что в нашем случае $\alpha = 2$, а $g(t)$ дается формулой (4.9). При этом формула (4.24) запишется в следующем виде:

$$\int\limits_0^{+\infty}q(t)\,\ln\!\Big(1+\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big)\,dt\;=\int\limits_0^{+\infty}\varPhi_{n-1}(\alpha,t)\;t^{\alpha}\,dt\;-\;\varepsilon\!\int\limits_0^{t_0}\varPhi_{n-1}(\alpha,t)\,t^2\,h(t)\,dt.\tag{4.25}$$

Теперь мы применим формулу (3.13) к (4.25) и запишем (4.25) в виде

$$\int\limits_0^{+\infty}q(t)\,\ln\!\Big(1+\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big)\,dt=\pi\,\alpha\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\alpha}{k}\Big)+\,\delta I.\tag{4.26}$$

Слагаемое δI в павой части (4.26) определяется формулой

$$\delta I=-\,\varepsilon\int\limits_0^{t_0}\varPhi_{n-1}(\alpha,t)\;t^2\,h(t)\,dt.\tag{4.27}$$

В нашем случае параметр ε положителен в силу условия $0 < \varepsilon \leqslant 1$ в формулировке теоремы 4.1. Функция $h(t)$ задается формулой (4.8). Она положительна при $0 < t < t_0$. Что же касается функции $\varPhi_{n-1}(\alpha, t)$, поскольку $n = 2$ и $\alpha = 2$, в нашем случае $\varPhi_{n-1}(\alpha, t)$ определяется формулой (4.6). Она отрицательна при $0 < t < t_0$. В силу перечисленных обстоятельств мы получаем следующее неравенство для интеграла (4.27):

$$\delta I > 0.\tag{4.28}$$

Неравенство (4.28) завершает доказательство теоремы 4.1.

Интеграл (4.27) может быть подсчитан численно. Произведение в правой части (4.26) тоже может быть подсчитано численно. В итоге мы получим

$$\int\limits_0^{+\infty} q(t)\,\ln\Bigl(1+\frac{1}{t^{2\alpha}}\Bigr)\,dt \approx 18.84955592 + 0.01299443\,\varepsilon. \tag{4.29}$$

С другой стороны, мы имеем оценку (3.15) для интеграла (4.29). Константа $C(n,\alpha)$ в (3.15) дается интегралом (3.10), который можно подсчитать численно. При $n=2$ и $\alpha=2$ мы имеем $C(n,\alpha)\approx 19.65507202$. Тогда (3.15) дает

$$\int\limits_0^{+\infty} q(t)\,\ln\Bigl(1+\frac{1}{t^{2\alpha}}\Bigr)\,dt \leqslant 19.65507203. \tag{4.30}$$

Заметим, что $0<\varepsilon\leqslant 1$ в формулировке теоремы 4.1. Как мы видим, даже при $\varepsilon=1$ имеется значительная щель между интегралом (4.29) и оценкой (4.30) для этого интеграла.

5. Выводы

Теорема 4.1 показывает, что гипотеза Хабибуллина в форме 1.1 не выполняется при $\alpha>1/2$. Однако, в силу теоремы 3.1 и в силу неравенств (3.14), эта гипотеза может быть сформулирована в виде следующей теоремы, которая верна при всех $\alpha>0$.

Теорема 5.1. *Для каждого целого положительного числа $n>0$ и для каждого положительного вещественного числа $\alpha>0$ существует положительная константа $C[\mathrm{Kh}](n,\alpha)$, которая дает лучшую (т. е. неулучшаемую) оценку*

$$\int\limits_0^{+\infty} q(t)\,\ln\Bigl(1+\frac{1}{t^{2\alpha}}\Bigr)\,dt \leqslant C[\mathrm{Kh}](n,\alpha) \tag{5.1}$$

в классе всех неотрицательных непрерывных функций $q(t)\geqslant 0$ на числовой полуоси $t>0$, удовлетворяющих интегральному неравенству

$$\int\limits_0^1 \Biggl(\,\int\limits_x^1 (1-y)^{n-1}\,\frac{dy}{y}\Biggr)\,q(tx)\,dx \leqslant t^{\alpha-1} \quad \text{для всех} \quad t>0. \tag{5.2}$$

В (5.2) мы исключили несущественное значение $t=0$ по сравнению с первоначальным неравенством (1.1) в формулировке гипотезы Хабибуллина 1.1.

Отметим, что константы $C[\mathrm{Kh}](n,\alpha)$ в (5.1) конечны. Они удовлетворяют оценке $C[\mathrm{Kh}](n,\alpha)\leqslant C(n,\alpha)<\infty$, где константы $C(n,\alpha)$ определяются формулой (3.10). Я полагаю, что константы $C[\mathrm{Kh}](n,\alpha)$ в (5.1) должны быть названы константами Хабибуллина в силу заслуг Б. Н. Хабибуллина по формулировке гипотезы 1.1 и по ее популяризации в течение многих лет.

Отметим, что теорема 5.1 провозглашает существование констант Хабибуллина $C[\mathrm{Kh}](n,\alpha)$, но не дает ни формулы, ни алгоритма для их вычисления. В настоящее время (то есть на дату 03.09.2010 г.) задача нахождения точных значений констант Хабибуллина $C[\mathrm{Kh}](n,\alpha)$ в (5.1) еще не решена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хабибуллин Б.Н. *Проблема Пэли для плюрисубгармонических функций конечного нижнего порядка* // Мат. Сборник. 1999. Т. 190, вып. 2. С. 145–157.
2. Хабибуллин Б.Н. *The representation of a meromorphic function as a quotient of entire functions and the Paley problem in* $\mathbb{C}^n$*: survey of some results* // Математическая физика, анализ, геометрия (Украина). 2002. Т. 9, № 2. С. 146–167; см. также e-print **math.CV/0502433** в электронном архиве http://arXiv.org.
3. B.N. Khabibullin, *A conjecture on some estimates for integrals*, e-print **arXiv:1005.3913** в электронном архиве http://arXiv.org.
4. R.A. Baladai, B.N. Khabibullin, *Three equivalent conjectures on an estimate of integrals*, e-print **arXiv:1006.5140** в электронном архиве http://arXiv.org.
5. R.A. Sharipov, *A note on Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print **arXiv:1008.0376** в электронном архиве http://arXiv.org.
6. R.A. Sharipov, *Direct and inverse conversion formulas associated with Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print **arXiv:1008.1572** в электронном архиве http://arXiv.org.

Руслан Абдулович Шарипов,
Башкирский Государственный Университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `r-sharipov@mail.ru`