ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 4 (2010). С. 85-87.

УДК 517.547.2

ПРАВЫЙ ОБРАТНЫЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

С.Г. МЕРЗЛЯКОВ

Аннотация. В данной заметке рассматриваются операторы свертки в пространстве целых функций экспоненциального типа меньше σ, $\sigma \leqslant \infty$. Показано, что линейный непрерывный правый обратный для операторы свертки существует тогда и только тогда, когда характеристическая функция данного оператора имеет конечное число нулей в открытом круге с центром в нуле и радиуса σ.

Ранее вопрос о существовании линейного непрерывного правого обратного для оператора свертки изучался в пространствах голоморфных в выпуклой области функций, ростков голоморфных функций на выпуклых компактах, целых функций порядка не выше ρ, $\rho > 1$, а для пространства целых функций экспоненциального типа не рассматривался.

Ключевые слова: оператор свертки, правый обратный, пространство целых функций экспоненциального типа.

1. Введение

Вопрос о существовании линейного непрерывного правого обратного для оператора свертки изучался в пространствах голоморфных в выпуклой области функций, ростков голоморфных функций на выпуклых компактах, целых функций порядка не выше ρ, $\rho > 1$ (см. [1], [2], [3]), а для пространства целых функций экспоненциального типа не рассматривался.

В данной статье мы восполним этот пробел.

2. Несуществование правого обратного

Обозначим через $[1, \sigma)$ пространство целых функций экспоненциального типа меньше σ с обычной топологией, $0 < \sigma \leqslant \infty$, а через D_σ — круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \sigma\}$.

Нижеследующие сведения можно найти в работах [4], [6], [7], [5].

Линейный оператор $A : [1, \sigma) \to [1, \sigma)$ непрерывен, если он секвенциально непрерывен.

Последовательность функций $\varphi_n \in [1, \sigma), n \in \mathbb{N}$ сходится в топологии пространства $[1, \sigma)$ тогда и только тогда, когда последовательность φ_n сходится равномерно на каждом компакте и существуют константы $c, \varepsilon > 0$ такие, что равномерно относительно n выполняется неравенство $|\varphi_n(\lambda)| \leqslant ce^{(\sigma-\varepsilon)|\lambda|}$.

Сильное сопряженное к пространству $[1, \sigma)$ изоморфно пространству голоморфных функций $H(D_\sigma)$ с естественной топологией, причем функционалу $S \in [1, \sigma)^*$ соответствует функция $f(z) = \langle S_t, e^{tz} \rangle$.Оператор свертки $M_f : [1, \sigma) \to [1, \sigma)$ определяется по формуле

S.G. Merzlyakov, Right inverse of the convolution operator in the space of entire functions of exponential type.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00 779) и Гранта Президента РФ НШ 3081.2008.1.

Поступила 3 июня 2010 г.

$(M_f\varphi)(\lambda) = \langle S_\mu, \varphi(\lambda+\mu)\rangle$, функция f называется характеристической функцией оператора M_f. Это линейный непрерывный оператор, сюрьективный в случае $f \neq 0$. Для функций $f_1, f_2 \in H(D_\sigma)$ выполняется соотношение $M_{f_1 f_2} = M_{f_1} M_{f_2}$.

Приведем теперь основной результат данной статьи.

Теорема 1. *Пусть $f \in H(D_\sigma)$, $f \neq 0$.*
Оператор свертки M_f имеет линейный непрерывный правый обратный тогда и только тогда, когда у функции f конечное число нулей в круге D_σ.

Доказательство. Пусть у функции f конечное число нулей в круге D_σ. Рассмотрим оператор T, заданный следующим соотношением

$$(T\varphi)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{\gamma(z)e^{\lambda z}}{f(z)}\,dz,$$

где функция γ ассоциирована по Борелю с функцией φ, а окружность $\{|z|=r\}$ содержит внутри себя все корни функции f круга D_σ. Несложно показать, что этот оператор линейно и непрерывно отображает пространство $[1,\sigma)$ в себя, и является правым обратным для оператора M_f.

Обратно, предположим, что линейный непрерывный оператор $T : [1,\sigma) \to [1,\sigma)$ служит правым обратным для оператора M_f, и предположим, что у функции f бесконечное число нулей в круге D_σ.

Функцию f представим в виде $f = gh$, $g, h \in H(D_\sigma)$, причем у функции g бесконечное число нулей в круге D_σ, все они простые и $g(0) \neq 0$. Тогда оператор $K = M_h T$ будет линейным непрерывным правым обратным для оператора M_g.

Из неравенства

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\lambda^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a^n\lambda^n|}{n!} = e^{|a||\lambda|}$$

заключаем, что для фиксированного числа $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < \sigma$, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\lambda^n}{n!}$$

сходится в топологии пространства $[1,\sigma)$. В таком случае в этой топологии сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\varphi_n(\lambda)}{n!},$$

где $\varphi_n = K(\lambda^n)$, и из сходимости общего члена ряда вытекает неравенство

$$|\varphi_n(\lambda)| \leqslant c_1 \frac{n!}{|a|^n} e^{b|\lambda|},\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

для некоторых чисел $b, c > 0$, $b < \sigma$. Через $\mathbb{N}_0$ мы обозначаем множество неотрицательных целых чисел.

Функция φ_n удовлетворяет уравнению $(M_g\psi)(\lambda) = \lambda^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, решением этого же уравнения является многочлен

$$p_n(\lambda) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{e^{\lambda z}}{f(z)z^{n+1}}\,dz, \tag{2}$$

где окружность $\{|z|=r\}$ не содержит внутри себя корней функции f. Из неравенства (1) следует представление

$$\varphi_n(\lambda) = p_n(\lambda) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{jn} e^{z_j\lambda}, \tag{3}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — все нули функции g, по модулю не превосходящие b, а $\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{kn} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ — некоторые числа (см. [8]).

Для произвольных различных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{C}$ найдутся числа $\beta_1, \dots, \beta_{k+1} \in \mathbb{C}$ не равные нулю одновременно со свойством

$$\sum_{l=1}^{k+1} \beta_l e^{z_j \lambda_l} = 0,\ j = 1, \dots, k, \tag{4}$$

и из равенств (2), (3) для числа $a \in \mathbb{C},\ |a| < r$, получим

$$\sum_{l=1}^{k+1} \beta_l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \varphi_n(\lambda_l)}{n!} = \sum_{l=1}^{k+1} \beta_l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n p_n(\lambda_l)}{n!} = \sum_{l=1}^{k+1} \beta_l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{a^n e^{\lambda_l z}}{f(z) z^{n+1}}\, dz =$$
$$= \sum_{l=1}^{k+1} \beta_l \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{e^{\lambda_l z}}{f(z)(z-a)}\, dz = \frac{\sum_{l=1}^{k+1} \beta_l e^{\lambda_l a}}{f(a)}.$$

Здесь левая часть голоморфна по a в круге D_σ, а правая часть, очевидно, имеет в нем бесконечное число полюсов. Полученное противоречие и доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробейник Ю.Ф. *О правом обратном операторе для оператора свертки* // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43, № 9. С. 1167–1176.
2. Мелихов С.Н., Момм З. *О линейном непрерывном правом обратном для оператора свертки на пространствах ростков аналитических функций на выпуклых компактах в* $\mathbb{C}$ // Изв. вузов. Матем. 1997:5. С. 38–48.
3. Коробейник Ю.Ф., Мелихов С.Н. *Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки* // Сиб. матем. журн. 1993. 34:1. С. 70–84.
4. Себастьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // Математика, 1:1(1967). С. 60–77.
5. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. 87(129):4. С. 459–489.
6. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982. 240 с.
7. Трутнев В.М. *Уравнения свертки в пространствах целых функций экспоненциального типа* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2006. Т. 108. С. 158–180.
8. D.G. Dickson, *Convolution equations and harmonic analysis in spaces of entire functions* // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. 184, № 2. P. 373–385.

Сергей Георгиевич Мерзляков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `msg2000@mail.ru`