ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 4 (2010). С. 58-73.

УДК 517.5

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

О.А. КРИВОШЕЕВА, А.С. КРИВОШЕЕВ

Аннотация. В работе изучается проблема фундаментального принципа для инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространств функций, аналитических в ограниченной выпуклой области комплексной плоскости, допускающих спектральный синтез. Ранее эта проблема была решена при одном ограничении на кратность собственных значений оператора дифференцирования. В данной работе это ограничение снимается. Таким образом, приводится полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных ограниченных выпуклых областях.

Ключевые слова: аналитическая функция, выпуклая область, инвариантное подпространство, фундаментальный принцип.

1. Введение

Пусть D — выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ — пространство функций, аналитических в области D, с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D, $H^*(D)$ — пространство, сильно сопряженное к $H(D)$, называемое еще пространством аналитических функционалов. Символом W будем обозначать нетривиальное замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования, т.е. вместе с каждой функцией φ подпространство W содержит и ее производную φ'. Поскольку W нетривиально, то по теореме Хана-Банаха найдется ненулевой аналитический функционал $\mu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на всех функциях подпространства W. Пусть

$$f(\lambda) = (\mu, \exp(\lambda z))$$

— преобразование Лапласа функционала μ. Известно (см., напр., [1]), что $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа (другими словами, выполнено неравенство

$$|f(\lambda)| \leqslant A\exp(B|\lambda|), \lambda \in \mathbb{C}).$$

Множество всех экспонент полно в пространстве $H(D)$ (см., напр., [2]). Поэтому функция $f(\lambda)$ отлична от тождественного нуля.

Для каждого собственного значения ξ оператора дифференцирования в W (т.е. собственная функция $\exp(\xi z)$ этого оператора лежит в W) верно равенство

$$f(\xi) = (\mu, \exp(\xi)) = 0.$$

O.A. Krivosheyeva, A.S. Krivosheyev, The fundamental principle for invariant subspaces.

Поступила 8 июля 2010 г.

Следовательно, совокупность всех собственных значений $\{\lambda_k\}$ оператора дифференцирования в W является частью нулевого множества целой функции f. Это, в частности, означает, что множество $\{\lambda_k\}$ конечно или счетно. В последнем случае $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Будем считать, что последовательность $\{\lambda_k\}$ пронумерована по неубыванию модулей.

Пусть m_k — кратность собственного значения λ_k в W, т.е. присоединенные функции $z^n \exp(\lambda_k z)$ оператора дифференцирования принадлежат подпространству W для всех $n = 1, \ldots, m_k - 1$, а функция $z^{m_k} \exp(\lambda_k z)$ таким свойством уже не обладает. Тогда верны равенства

$$f^{(n)}(\lambda_k) = (\mu, \exp(\lambda z))^{(n)}_{\lambda=\lambda_k} = (\mu, z^n \exp(\lambda_k z)) = 0, \quad n = 0, \ldots, m_k - 1.$$

Следовательно, число m_k не превосходит кратности нуля λ_k функции $f(\lambda)$. В этом случае говорят, что кратная последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ (которую называют кратным спектром оператора дифференцирования в подпространстве W) является частью кратного нулевого множества функции f. Пусть

$$E(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} -$$

множество всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез, если система $E(\Lambda)$ полна в нем. Примерами таких инвариантных подпространств служат пространства решений однородных уравнений свертки ([3])

$$M(\varphi)(\varsigma) \equiv (\nu, \varphi(z+\varsigma)) \equiv \int \varphi(z+\varsigma) d\sigma(z) \equiv 0,$$

где ν — некоторый функционал из $H^*(D)$, а $d\sigma$ — соответствующая ему (не единственным образом) комплексная мера с компактным носителем в области D. В частности, это относится к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами как конечного, так и бесконечного порядков, к линейным разностным и дифференциально-разностным уравнениям с постоянными коэффициентами как конечного, так и бесконечного порядков (см., напр., [1]). В случае, когда подпространство W является пространством решений однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, хорошо известен фундаментальный принцип Л. Эйлера, согласно которому каждая функция из W представляет из себя линейную комбинацию собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W (их в этом случае конечное число). В связи с этим проблема представления функций из инвариантного подпространства $W \subset H(D)$, допускающего спектральный синтез, посредством рядов по собственным и присоединенным функциям оператора дифференцирования в W

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), \tag{1}$$

сходящихся в топологии пространства $H(D)$, носит также название проблемы фундаментального принципа для инвариантных подпространств.

Ее решение тесно связано с решением интерполяционной задачи в пространствах целых функций и имеет очень богатую историю. Обзор некоторых основных результатов по проблемам фундаментального принципа и интерполяции можно найти в работе [4]. Здесь мы отметим лишь некоторые из работ, а именно [4]–[14], в которых решалась проблема фундаментального принципа. В работе [4] при условии

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{m_k}{|\lambda_k|} = 0$$

найдено полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях комплексной плоскости. Целью данной работы является доказательство того, что в случае ограниченной области D условие $m(\Lambda) = 0$ необходимо для фундаментального принципа. Таким образом, результат этой работы вместе с результатом работы [4] дает полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных ограниченных выпуклых областях уже без всяких дополнительных ограничений.

2. Замкнутость множества сумм рядов экспоненциальных мономов

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата этого параграфа, сделаем некоторые необходимые замечания и докажем вспомогательный результат.

Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ положим

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln j}{|\xi_j|}, \qquad N(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{j}{|\xi_j|},$$

где $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно m_k раз.

Пусть система

$$E(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$$

не полна в пространстве $H(D)$, и W — подпространство в $H(D)$, которое является замыканием в топологии $H(D)$ линейной оболочки системы $E(\Lambda)$. Тогда оно, очевидно, нетривиально (т.е. $W \neq \{0\}, H(D)$), замкнуто в $H(D)$, инвариантно относительно оператора дифференцирования и допускает спектральный синтез. Таким образом можно получить любое нетривиальное замкнутое и инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство пространства $H(D)$, допускающее спектральный синтез. При этом система $E(\Lambda)$ совпадает с множеством всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. Во введении отмечалось, что последовательность Λ является частью нулей целой функции экспоненциального типа $f(\lambda)$. Следовательно, нули $f(\lambda)$, а значит и последовательность Λ, имеют конечную верхнюю плотность (см., например, [15], гл.1, теорема 2.3), т.е. $N(\Lambda) < \infty$. Отсюда легко следует, что величина $\sigma(\Lambda)$ равна нулю.

При помощи функции $f(\lambda)$ всегда можно построить (см., например, [15], [4]) последовательность целых функций $\{f_{k,n}\}$, элементы которой являются преобразованиями Лапласа соответствующих элементов последовательности функционалов $\{\mu_{k,n}\} \subset H^*(D)$, биортогональной к системе функций $E(\Lambda)$, т.е. выполнены равенства:

$$(\mu_{k,n}, z^p \exp(\lambda_j z)) = 1, \quad \text{если } k = j, n = p$$

и $(\mu_{k,n}, z^p \exp(\lambda_j z)) = 0$ в противном случае.

Пусть $W(D, \Lambda)$ — пространство сумм рядов вида (1), которые сходятся в топологии $H(D)$. Существование биортогональной последовательности обеспечивает единственность представления элемента $g \in W(D, \Lambda)$ рядом (1), поскольку в этом случае коэффициенты ряда однозначно определяются по формуле

$$d_{k,n} = (\mu_{k,n}, g), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad n = 0, 1, \ldots, m_k - 1.$$

Из определений множеств $W(D, \Lambda)$ и W сразу следует вложение $W(D, \Lambda) \subset W$. С другой стороны, любая конечная линейная комбинация элементов системы $E(\Lambda)$ представляет из себя ряд (1), в котором отлично от нуля лишь конечное число коэффициентов. Поэтому $E(\Lambda) \subset W(D,\Lambda)$. Таким образом, верны также вложения

$$\overline{E(\Lambda)} \subset \overline{W(D,\Lambda)} \subset \overline{W}.$$

Первое и последнее из этих множеств совпадают с W. Следовательно, мы имеем равенство $\overline{W(D,\Lambda)} = W$.

Проблема фундаментального принципа состоит в том, чтобы выяснить условия, когда W совпадает с пространством функций $W(D,\Lambda)$. В силу последнего равенства эта проблема равносильна проблеме замкнутости множества сумм $W(D,\Lambda)$ в пространстве $H(D)$.

Мы хотим показать, что равенство $m(\Lambda) = 0$ является необходимым условием замкнутости подпространства $W(D,\Lambda)$ в пространстве $H(D)$ в случае ограниченной выпуклой области D. Но прежде сделаем еще одно наблюдение.

Пусть $t > 0$ и D_t — область, полученная из D при помощи преобразования гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом t, т.е.

$$D_t = \{z' = tz : z \in D\}.$$

Положим

$$\Lambda(t) = \{t^{-1}\lambda_k, m_k\}$$

Очевидно, что при любом $t > 0$ из равенств $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ следуют равенства $\sigma(\Lambda(t)) = m(\Lambda(t)) = 0$ и наоборот.

Лемма 1. *Подпространства $W(D,\Lambda)$ и $W(D_t,\Lambda(t))$ замкнуты или незамкнуты соответственно в $H(D)$ и в $H(D_t)$ одновременно.*

Доказательство. Пусть $W(D,\Lambda)$ — замкнутое подпространство в $H(D)$, и последовательность $\{h_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W(D_t,\Lambda(t))$ сходится к функции h_0 в топологии пространства $H(D_t)$. Положим

$$g_l(z) = h_l(tz), \quad z \in D, \quad l = 0,1,2,\dots$$

Тогда последовательность $\{h_l\}_{l=1}^{\infty}$ лежит в $H(D)$ и сходится в топологии этого пространства к функции g_0. По определению $W(D_t,\Lambda(t))$ имеем

$$h_l(w) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n}^{l} w^n \exp(t^{-1}\lambda_k w), \quad l = 1,2,\dots$$

причем ряды сходятся в пространстве $H(D_t)$. Следовательно,

$$g_l(z) = h_l(tz) = h_l(w) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n}^{l} w^n \exp(t^{-1}\lambda_k w) =$$

$$= \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n}^{l} t^n z^n \exp(t^{-1}\lambda_k tz) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n}^{\tilde{l}} z^n \exp(\lambda_k z), \quad l = 1,2,\dots$$

где

$$d_{k,n}^{\tilde{l}} = d_{k,n}^{l} t^n, \quad k,l = 1,2,\dots, \quad n = 0,1,\dots,m_k-1,$$

и последние ряды сходятся в пространстве $H(D)$. Это означает, что последовательность $\{g_l\}_{l=1}^{\infty}$ лежит в подпространстве $W(D,\Lambda)$. Поскольку оно замкнуто, то и функция g_0 также принадлежит $W(D,\Lambda)$, т.е. g_0 раскладывается в ряд вида (1), сходящийся в топологии пространства $H(D)$:

$$g_0(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n}^{\tilde{0}} z^n \exp(\lambda_k z).$$

Но тогда функция h_0 также раскладывается в ряд (1), сходящийся уже в топологии пространства $W(D_t, \Lambda(t))$:

$$h_0(w) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n}^{0} w^n \exp(t^{-1}\lambda_k w),$$

где $d_{k,n}^0 = d_{k,n}^{\tilde{0}}/t^n$, т.е. $h_0 \in W(D_t, \Lambda(t))$. Таким образом, $W(D_t, \Lambda(t))$ — замкнутое подпространство в $H(D_t)$.

Пусть теперь $W(D_t, \Lambda(t))$ является замкнутым подпространством пространства $H(D_t)$. Очевидно, что верны равенства

$$D = \tilde{D}_{1/t}, \quad \Lambda = \tilde{\Lambda}(1/t),$$

где $\tilde{D} = D_t$ и $\tilde{\Lambda}(t)$. Тогда, как и выше, показывается что, подпространство

$$W(\tilde{D_{1/t}}, \tilde{\Lambda}(1/t)) = W(D, \Lambda)$$

замкнуто в пространстве $H(D)$. Лемма доказана.

Символами $B(z,r)$ и $S(z,r)$ будем обозначать соответственно открытый круг и окружность с центром в точке z и радиуса r, а символом $\mathbb{S}$ — окружность $S(0,1)$. Пусть

$$H_M(\lambda) = \sup_{z \in M} Re(z\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

— опорная функция множества $M \subset \mathbb{C}$ (точнее говоря, комплексно сопряженного к M множества). Она является выпуклой, положительно однородной порядка один и полунепрерывной снизу. Если M ограничено, то функция $H_M(\lambda)$ непрерывна в комплексной плоскости (см. [16]).

Сформулируем и докажем, наконец, основной результат параграфа — необходимое условие замкнутости подпространства $W(D, \Lambda)$.

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что система $E(\Lambda)$ неполна в пространстве $H(D)$. Предположим, что $W(D, \Lambda)$ замкнутое подпространство в $H(D)$. Тогда верно равенство $m(\Lambda) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдутся положительное число τ и подпоследовательность $\{\lambda_{k_j}, m_{k_j}\}$ такие, что $\{m_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к τ, когда $j \to \infty$. Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ также сходится к некоторой точке ξ окружности S. Рассмотрим по отдельности три возможные ситуации: начало координат лежит во внешности области D, в самой области D, и на ее границе.

1) Пусть $0 \notin \overline{D}$. Поскольку D — ограниченная область, то согласно сказанному выше (делая, если необходимо, преобразование гомотетии с центром в нуле), можно считать, что для некоторой точки a окружности S (очевидно, неединственной) круг $B(a,1)$ компактно содержит область D. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j (z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \tag{2}$$

где $m(j) = m_{k_j} - 1$, $c_j = \exp(-H_K(\lambda_{k_j}))$ и K — выпуклый компакт в D. Покажем, что при подходящем выборе K этот ряд сходится в топологии пространства $H(D)$. Для этого, прежде всего, заметим, что в силу компактности вложения D в круг $B(a,r)$ найдется радиус $r \in (0,1)$ такой, что $B(a,r)$ все еще содержит область D. Поэтому для каждого $z \in D$ верна оценка

$$|c_j(z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \leqslant c_j r^{m(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \leqslant$$

$$\leqslant r^{m(j)} \exp(H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})), j = 1, 2, \dots$$

При получении последнего неравенства мы воспользовались определением опорной функции области D. Поскольку $\{m(j)/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к τ, когда $j \to \infty$, то, начиная с некоторого номера j_0, имеем: $m(j) \geq \frac{\tau|\lambda_{k_j}|}{2}$. Следовательно, из предыдущего получаем:

$$|c_j(z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-\alpha|\lambda_{k_j}| + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})), j \geq j_0,$$

где $\alpha = -2^{-1}\tau \ln r > 0$. Выберем теперь компакт K из области D настолько большой, что выполнена оценка

$$H_D(\lambda) \leqslant H_K(\lambda) + 2^{-1}\alpha|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда с учетом сделанного выше замечания о том, что $\sigma(\Lambda) = 0$ и леммы 1 из работы [17] для всех $z \in D$, имеем:

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} |c_j(z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j})| \leqslant \sum_{j=j_0}^{\infty} \exp(-2^{-1}\alpha|\lambda_{k_j}|) < \infty.$$

Это означает, что ряд (2) сходится равномерно во всей области D. Поэтому функция

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z) \tag{3}$$

аналитична в D. По условию подпространство $W(D,\Lambda)$ замкнуто в $H(D)$. Следовательно, $\phi(z)$ как предел элементов $W(D,\Lambda)$ (частичных сумм ряда (2)) принадлежит $W(D,\Lambda)$. Поэтому, согласно определению $W(D,\Lambda)$, имеет место представление

$$\phi(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n} z_n \exp(\lambda_k z), z \in D, \tag{4}$$

причем последний ряд сходится в топологии пространства $H(D)$.

Пусть $\{\mu_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ — биортоганальная к семейству $E(\Lambda)$ последовательность функционалов из $H^*(D)$, о существовании которой говорилось выше. Тогда в силу линейности и непрерывности этих функционалов из (4) получаем:

$$\mu_{k_j,0}(\phi(z)) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} \mu_{k_j,0}(d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z)) = d_{k_j,0},$$

для всех $j \geq 1$. С другой стороны, из представления (3) имеем:

$$\mu_{k_j,0}(\phi(z)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{k_j,0}(c_j(z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)) = c_j a^{m(j)}.$$

Поэтому

$$|d_{k_j,0}| = |c_j a^{m(j)}| = c_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

т.к. a лежит на S. Поскольку K — компакт в D, то существует $z_0 \in D$ такая, что

$$Re(z_0 \xi) > H_K(\xi).$$

Тогда из сходимости последовательности $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ к точке ξ, непрерывности и однородности опорной функции компакта для всех достаточно больших номеров j следует соотношение

$$Re(z_0 \lambda_{k_j}) > H_K(\lambda_{k_j}).$$

Отсюда для этих же j с учетом определения коэффициентов c_j получаем:

$$|d_{k_j,0} \exp(\lambda_{k_j} z_0)| = |c_j \exp(\lambda_{k_j} z_0)| = \exp(Re(\lambda_{k_j} z_0) - H_K(\lambda_{k_j})) > 1.$$

Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (19) в точке z_0. Таким образом, предположение о том, что $m(\Lambda) \neq 0$ неверно. Следовательно, в этом случае теорема доказана.

2) Пусть теперь $0 \in D$. Через Γ обозначим пересечение опорной прямой области D в направлении ξ с границей этой области, т.е.

$$T = \{z : Re(z\xi) = H_D(\xi)\} \bigcap \partial D.$$

В силу ограниченности D множество T не пусто и является точкой или отрезком. Как и выше (делая, если это необходимо, преобразование гомотетии с центром в нуле), можно считать, что для некоторой точки a окружности S круг $B(a,1)$ содержит множество T и, кроме того, область D лежит в круге $B(0,1)$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j (z-a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \tag{5}$$

где

$$c_j = \exp(-H_K(\lambda_{k_j}))$$

и K — выпуклый компакт в D. Покажем, что при подходящем выборе K и чисел $n(j)$, $j = 1, 2, \dots$, этот ряд сходится в топологии пространства $H(D)$. Для этого, прежде всего, заметим, что T — компакт, а потому лежит в круге $B(a,1)$ вместе с некоторой своей окрестностью. Следовательно, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество

$$T(\varepsilon) = \{z : Re(z\xi) \geq H_D(\xi) - \varepsilon\} \bigcap D$$

компактно принадлежит $B(a,1)$. Другими словами, $T(\varepsilon)$ содержится в круге $B(a,r)$ при некотором r из интервала $(e^{-1}, 1)$.

Поскольку последовательность $\{m(j)/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к τ, когда $j \to \infty$, то для каждого j, начиная с некоторого номера j_0, мы можем выбрать натуральное число $n(j)$, которое не превосходит $m(j)$ и, кроме этого, удовлетворяет неравенствам

$$\gamma |\lambda_{k_j}| \leqslant n(j) \leqslant \frac{\varepsilon |\lambda_{k_j}|}{2}, \tag{6}$$

где $\gamma = \min\{\varepsilon/4, \tau/2\}$. Выберем компакт K в D настолько большой, что верна оценка (это можно сделать, т.к. $\ln r < 0$)

$$H_D(\lambda) \leqslant H_K(\lambda) - 2^{-1}\gamma|\lambda|\ln r, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Учитывая вложение $T(\varepsilon) \subset B(a,r)$, определение коэффициентов c_j и опорной функции области D, из (6) и (7) получаем

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leqslant \exp(n(j)\ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\gamma|\lambda_{k_j}|\ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(2^{-1}\gamma|\lambda_{k_j}|\ln r), \quad j \geq j_0, \quad z \in T(\varepsilon). \tag{8}$$

Поскольку $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к точке ξ при $j \to \infty$, то, увеличивая при необходимости номер j_0, можно считать, что для $j \geq j_0$ верна оценка

$$|Re(z(\xi - \lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|))| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}, \quad \forall z : |z| \leqslant 1.$$

В частности, эта оценка имеет место для всех $z \in D \subset B(0,1)$. Следовательно,

$$Re(z\lambda_{k_j}) \leqslant |\lambda_{k_j}|Re(z\xi) + \frac{\varepsilon|\lambda_{k_j}|}{16}, \quad z \in D. \tag{9}$$

Кроме того, используя непрерывность опорной функции ограниченной области, можно также считать, что

$$|\lambda_{k_j}|H_D(\xi) \leqslant H_D(\lambda_{k_j}) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}|, \quad j \geq j_0. \tag{10}$$

Пусть теперь $z \in D\backslash T(\varepsilon)$. Тогда, учитывая определение коэффициентов c_j и вложение $D \subset B(0,1)$ (в силу которого $|z-a| \leqslant 2$, $z \in D$) и неравенство (9), имеем:

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leqslant \exp(n(j)\ln|z-a| + Re(z\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(n(j)\ln 2 + |\lambda_{k_j}|Re(z\xi) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(n(j) + |\lambda_{k_j}|Re(z\xi) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})).$$

Отсюда и из определения множества $T(\varepsilon)$ для всех $z \in D\backslash T(\varepsilon)$ имеем:

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leqslant$$

$$\leqslant \exp(n(j) + |\lambda_{k_j}|(H_D(\xi) - \varepsilon) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})), \quad z \in D\backslash T(\varepsilon).$$

Это вместе с (10) дает нам неравенство

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leqslant$$
$$\leqslant \exp(n(j) - \varepsilon|\lambda_{k_j}| + H_D(\lambda_{k_j}) + 8^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})), \quad j \geq j_0, \quad z \in D\backslash T(\varepsilon).$$

Отсюда с учетом (6), (7) и неравенств $0 > \ln r > -1$ (которые выполнены в силу выбора числа r) получаем:

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leqslant \exp(\frac{\varepsilon|\lambda_{k_j}|}{2} - \varepsilon|\lambda_{k_j}| + 8^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - 2^{-1}\gamma|\lambda_{k_j}|\ln r) \leqslant$$

$$\leqslant \exp((\frac{-3\varepsilon|\lambda_{k_j}|}{8} - \frac{\gamma|\lambda_{k_j}|\ln r}{2}) \leqslant \exp(\frac{-3\varepsilon|\lambda_{k_j}|}{8} + \frac{\gamma|\lambda_{k_j}|}{2}), z \in D\backslash T(\varepsilon), j \geq j_0.$$

Вспоминая теперь определение числа γ, окончательно имеем:

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leqslant \exp(-\frac{\varepsilon|\lambda_{k_j}|}{4}), \quad z\in D\backslash T(\varepsilon), \quad j\geq j_0.$$

Отсюда и из (8) для всех $z \in D$ и $j \geq j_0$ получаем неравенство:

$$|c_j(z-a)^{n(j)}\exp(\lambda_{k_j}z)| \leqslant \exp(-\rho|\lambda_{k_j}|),$$

где

$$\rho = \min\{-2^{-1}\gamma\ln r, 4^{-1}\varepsilon\}.$$

Таким образом, как и в случае 1) ряд (5) сходится равномерно в области D (а, значит, и в топологии пространства $H(D)$) к некоторой функции $\phi(z)$, аналитической в D. Все дальнейшие рассуждения дословно повторяют соответствующие рассуждения в случае 1).

Следовательно, равенство $m(\Lambda) = 0$ имеет место и в случае 2).

3) Пусть, наконец, $0 \in \partial D$, и l — опорная прямая к области D, проходящая через начало координат (если таких прямых несколько, то в качестве l выберем любую из них). Через a обозначим одну из точек пересечения l и окружности S. Тогда $-a$ является другой точкой пересечения l и S. Прямая l делит плоскость на две полуплоскости. Область D целиком лежит в одной из этих полуплоскостей. Точку окружности S, которая принадлежит той же полуплоскости, что и D, и лежит на прямой l', перпендикулярной l и проходящей через начало координат, обозначим через b. Прямая l делит круг $B(0, 1/2)$ на два полукруга. Делая преобразование гомотетии с центром в нуле, можно считать, что область D лежит в одном из этих полукругов, который обозначим B' (в том, который лежит по ту же сторону от прямой l что и точка b).

Поскольку последовательность $\{m(j)/|\lambda_{k_j}|\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к числу, отличному от нуля, то переходя к подпоследовательности, можно также считать, что выполнены неравенства

$$2\tau|\lambda_{k_j}| \geq m(j) \geq 2\nu(j) \geq 4\nu|\lambda_{k_j}|,$$

где $\nu > 0$ и $\nu(j)$, $j = 1, 2, \dots$ — любые натуральные числа, удовлетворяющие этим неравенствам. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|)(z(z^2-a^2)(z-b))^{\nu(j)}\exp(\lambda_{k_j}z), \tag{11}$$

где

$$c_j = \exp(-\sup_{z\in D}(\nu(j)\ln(|z|) + Re(z\lambda_{k_j}))).$$

Покажем, что при подходящем выборе числа $\delta > 0$ ряд (11) сходится в топологии пространства $H(D)$. Для этого, прежде всего, оценим модуль многочлена

$$p(z) = (z^2-a^2)(z-b)$$

на границе полукруга B'.

Пусть $z \in [-a, a]$ и положим $x = |z|$. Тогда

$$|p(z)| = (1-x^2)\sqrt{1+x^2}.$$

Непосредственно проверяем, что функция, стоящая в правой части этого равенства строго убывает на отрезке $[0, 1]$ и равна единице при $x = 0$. Следовательно,

$$|p(z)| < 1, z \in [-a, a]\backslash\{0\}, |p(0)| = 1. \tag{12}$$

Пусть теперь z принадлежит той части границы B', которая является полуокружностью. Через x обозначим расстояние от точки z до прямой l', а через y — расстояние от точки z до прямой l (другими словами, (x, y) это координаты точки z в системе координат, образованной прямыми l и l', причем a и b в этой системе координат имеют соответственно координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тогда прямым подсчетом получаем

$$|p(z)| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}\sqrt{(1+x)^2 + y^2}\sqrt{(1-y)^2 + x^2}.$$

Раскрывая скобки и замечая, что $x^2 + y^2 = 1/4$, имеем:

$$|p(z)| = \sqrt{5/4 - 2x}\sqrt{5/4 + 2x}\sqrt{5/4 - 2y} =$$

$$= \sqrt{25/16 - 4x^2}\sqrt{5/4 - 2y} = \sqrt{9/16 + 4y^2}\sqrt{5/4 - 2y}.$$

Легко показать, что последняя функция строго убывает при $y \in [0, 1/2]$, причем на концах этого отрезка принимает значения строго меньше единицы. Таким образом, на всей полуокружности верна оценка: $|p(z)| < 1$. Следовательно, с учетом (12) получаем

$$|p(z)| < 1, z \in \partial B' \backslash \{0\}, |p(0)| = 1.$$

Отсюда и из принципа максимума модуля для аналитических функций следует оценка:

$$|p(z)| < 1, z \in \overline{B'} \backslash \{0\}. \tag{13}$$

Фиксируем какую-нибудь точку z_0 области D. Тогда верны неравенства

$$c_j |z|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \leqslant$$
$$\leqslant \exp(-\nu(j)\ln(|z_0|) - Re(z_0\lambda_{k_j})))|z|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) =$$
$$= \exp(\nu(j)(\ln|z| - \ln|z_0|) + Re(z\lambda_{k_j}) - Re(z_0\lambda_{k_j})), j = 1, 2, \dots.$$

Учитывая, что

$$\nu|\lambda_{k_j}| \leqslant \nu(j) \leqslant \tau|\lambda_{k_j}|, \quad j = 1, 2, \dots,$$

получаем отсюда для всех z из круга $B(0, r)$, где $r \in (0, 1)$:

$$c_j |z|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \leqslant$$
$$\leqslant \exp(\nu|\lambda_{k_j}| \ln r + \tau|\lambda_{k_j}||\ln|z_0|| + (1 + |z_0|)|\lambda_{k_j}|), j = 1, 2, \dots.$$

Выберем $r_0 \in (0, 1)$ настолько малым, что выполнено неравенство

$$\mu \ln r_0 + \tau|\ln|z_0|| + (1 + |z_0|) < -1.$$

Тогда из предыдущего получаем:

$$c_j |z|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \leqslant \exp(-|\lambda_{k_j}|), |z| < r_0, j = 1, 2, \dots \tag{14}$$

Поскольку область D лежит в полукруге B', а $\overline{D} \backslash B(0, r_0)$ является компактом, то согласно (13)

$$\max_{z \in \overline{D} \backslash B(0, r_0)} |p(z)| < 1.$$

Следовательно, с учетом того, что

$$\nu|\lambda_{k_j}| \leqslant \nu(j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

найдется $\varepsilon \in (0, 1)$, для которого имеет место оценка

$$|p(z)|^{\nu(j)} \leqslant \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|), z \in \overline{D} \backslash B(0, r_0), j = 1, 2, \dots \tag{15}$$

Выберем теперь в качестве δ какое-нибудь число из интервала $(0, \varepsilon/2)$. Тогда из (13) и (14) следует неравенство

$$c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|)|z|^{\nu(j)}|p(z)|^{\nu(j)} \exp(Re(\lambda_{k_j} z)) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-|\lambda_{k_j}|)\exp(\varepsilon|\lambda_{k_k}|/2) \leqslant \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2), \quad z \in \overline{D}\bigcap B(0,r_0), \quad j=1,2,\dots$$

Кроме того, в силу (15) и определения чисел c_j получаем

$$c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|)|z|^{\nu(j)}|p(z)|^{\nu(j)}\exp(Re(\lambda_{k_j}z)) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-\sup_{z\in D}(\nu(j)\ln|z| + Re(\lambda_{k_j}z)))\exp(\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2 - \varepsilon|\lambda_{k_j}| + Re(\lambda_{k_j}z))|z|^{\nu(j)} =$$

$$= \exp(-\sup_{z\in D}(\nu(j)\ln|z| + Re(\lambda_{k_j}z)) + Re(\lambda_{k_j}z) + \nu(j)\ln|z| - \varepsilon|\lambda_{k_j}|/2) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2), \quad z \in \overline{D}\bigcap B(0,r_0), \quad j=1,2,\dots$$

Объединяя эту и предыдущую оценку, имеем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|)|z|^{\nu(j)}|p(z)|^{\nu(j)}\exp(Re(\lambda_{k_j}z)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2), \quad z \in \overline{D}.$$

Так же, как и выше, по лемме 1 ряд из работы [17] получаем, что последний ряд сходится.

Таким образом, ряд (11)сходится равномерно во всей области D. Следовательно, его сумма $g(z)$ является функцией, аналитической в D.

С другой стороны, как и в случае 1) имеет место представление (4) (здесь мы учитываем неравенство $m_{k_j} - 1 = m(j) \geq 4\nu(j)$). При этом, как нетрудно убедиться, выполнены неравенства, причем выполнены равенства

$$|d_{k_j,\nu(j)}| = |\mu_{k_j,\nu(j)}(g)| = |\exp(\delta|\lambda_{k_j}|)c_j(a^2b)^{\nu(j)}| = c_j\exp(\delta|\lambda_{k_j}|), \tag{16}$$

для всех $j=1,2,\dots$

Поскольку D ограничена, то для каждого $j=1,2,\dots$ найдется точка $z_j \in \overline{D}$ такая, что

$$|z_j|^{\nu(j)}\exp(Re(z_j\lambda_{k_j})) = \sup_{z\in D}(|z|^{\nu(j)}\exp(Re(z\lambda_{k_j}))) = c_j^{-1}.$$

Выберем подпоследовательность натуральных чисел $j(1), j(2), \dots$ так, что последовательность $\{z_{j(p)}\}_{p=1}^{\infty}$ сходится к некоторой точке $z^* \in \overline{D}$. В силу неравенства (14) точки z_j, $j=1,2,\dots$, а вместе с ними и точка z^* не попадают в круг $B(0,r_0)$.

Фиксируем $\delta' \in (0,\delta/4)$, удовлетворяющее условию

$$\tau\ln(1+\frac{4\delta'}{r_0}) \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Пусть $z' \in D\bigcap B(z^*,\delta')$. Очевидно, можно считать, что $|z'| \geq r_0/2$. Поскольку последовательность $\{z_{j(p)}\}_{p=1}^{\infty}$ сходится к z^*, то для всех номеров p, начиная с некоторого p_0, выполнено неравенство

$$|z' - z_{j(p)}| \leqslant 2\delta', \quad p \geq p_0.$$

Тогда, учитывая еще неравенства $|z'| \geq r_0/2$, $\nu(j) \leqslant \tau|\lambda_{k_j}|$, $j=1,2,\dots$, выбор точек z_j и числа δ' имеем:

$$c_{j(p)}^{-1} = |z_{j(p)}|^{\nu(j(p))}\exp(Re(\lambda_{k_{j(p)}}z_{j(p)})) =$$

$$= |(z_{j(p)} - z') + z'|^{\nu(j(p))}\exp(Re((z_{j(p)} - z' + z')\lambda_{k_{j(p)}})) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\nu(j(p))\ln|z_{j(p)} - z' + z'| + Re((z_{j(p)} - z' + z')\lambda_{k_{j(p)}})) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\nu(j(p))(\ln|z'| + \ln(1 + \frac{|z_{j(p)} - z'|}{|z'|}))) + Re(z'\lambda_{k_{j(p)}}) + |z_{j(p)} - z'||\lambda_{k_{j(p)}}|) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\nu(j(p))(\ln|z'| + \ln(1 + \frac{2\delta'}{|z'|}) + Re(\lambda_{k_{j(p)}} z') + 2\delta'|\lambda_{k_{j(p)}}|) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\nu(j(p))(\ln|z'| + \ln(1 + \frac{4\delta'}{r_0}) + Re(\lambda_{k_{j(p)}} z') + \frac{\delta'|\lambda_{k_{j(p)}}|}{2}) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\nu(j(p))(\ln|z'| + \frac{\delta}{2\tau}) + Re(\lambda_{k_{j(p)}} z') + \frac{\delta'|\lambda_{k_{j(p)}}|}{2}) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\nu(j(p))\ln|z'| + \frac{\delta|\lambda_{k_{j(p)}}|}{2} + Re(\lambda_{k_{j(p)}} z') + \frac{\delta'|\lambda_{k_{j(p)}}|}{2})$$

$$= |z'|^{\nu(j(p))} \exp(Re(z'\lambda_{k_{j(p)}}) + \delta|\lambda_{k_{j(p)}}|), p \geq p_0.$$

Следовательно, с учетом (16) получаем

$$|d_{k_{j(p)},\nu(j(p))}(z')^{\nu(j(p))} \exp(z'\lambda_{k_{j(p)}})| =$$

$$= |c_{j(p)}(z')^{\nu(j(p))} \exp(\delta|\lambda_{k_{j(p)}}|) \exp(\lambda_{k_{j(p)}} z')| \geq 1, \quad p \geq p_0.$$

Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (4) в точке $z' \in D$.

Таким образом, равенство $m(\Lambda) = 0$ имеет место и в этом случае. Теорема полностью доказана.

3. Фундаментальный принцип

В этом заключительном параграфе мы сформулируем и докажем фундаментальный принцип для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез. Как уже отмечалось во введении, этот результат уже был получен ранее в работе [4] при одном ограничении на кратность показателей ряда (0.1): $m(\Lambda) = 0$. В данном параграфе это ограничение устраняется.

Прежде чем привести указанный результат, введем еще некоторые обозначения.

Для выпуклой области D через $K(D)$ обозначим последовательность $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ выпуклых компактов из области D, которая строго исчерпывает ее, т.е. $K_p \subset int K_{p+1}$, $p = 1, 2, \ldots$ (здесь символом int обозначена внутренность множества) и $D = \cup_{p=1}^{\infty} K_p$.

Пусть $d = \{d_{k,n}\}_{k=1,n=o}^{\infty,m_k-1}$ — последовательность комплексных чисел. Для каждого $p = 1, 2, \ldots$ введем банахово пространство

$$Q_p = \{d = \{d_{k,n}\} : ||d||_p = \sup_{k,n} |d_{k,n}| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < \infty\},$$

где $K_p \in K(D)$. Пусть $Q(D) = \cap_p Q_p$. В пространстве $Q(D)$ определим метрику

$$\rho(d, d') = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \frac{||d - d'||_p}{1 + ||d - d'||_p}.$$

С этой метрикой $Q(D)$ становится, очевидно, пространством Фреше.

Пусть $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа. Ее индикатором (верхним индикатором) называется функция

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|F(t\lambda)|}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Символом $\underline{h}_f$ обозначим нижний индикатор функции f

$$\underline{h}_f(\lambda) = \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{B(t\lambda,t|\lambda|)}\frac{\ln|f(z)|}{t}dxdy, \quad z = x+iy.$$

Из определений индикаторов вытекает неравенство

$$\underline{h}_f(\lambda) \leqslant h_f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Говорят, что функция f имеет (вполне) регулярный рост, если верно равенство

$$\underline{h}_f = h_f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть правильной, если она является частью правильно распределенной последовательности при порядке один. Это равносильно тому, что Λ является частью нулевого множества (с учетом кратностей m_k) целой функции экспоненциального типа и вполне регулярного роста. Пусть Λ — правильная последовательность. Через $F(\Lambda)$ обозначим множество всех целых функций экспоненциального типа и вполне регулярного роста, для каждой из которых Λ является частью ее нулевого множества.

Следуя работам [4], [14], для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ введем величину, характеризующую меру сгущения точек λ_j вокруг λ_k. Положим $S_\Lambda = 0$, если Λ состоит из конечного числа элементов, и

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\delta)|}{|\lambda_k|}$$

в противном случае. Здесь

$$q_\Lambda^k(\delta) = \prod_{\lambda_j\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|),k\neq j}\left(\frac{\lambda_j-\lambda_k}{3\delta|\lambda_j|}\right)^{m_j},$$

Величина S_Λ схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна-Леонтьева последовательности Λ (см. [2]) и играет ту же роль, что и последний, при исследовании особых точек суммы ряда (1) (см. [18]).

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что система $E(\Lambda)$ неполна в пространстве $H(D)$. На пространстве $Q(D)$ определим оператор L следующим образом. Последовательности $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$ (возможно, не каждой) поставим в соответствие сумму $g_d(z)$ ряда (1), сходящегося в топологии пространства $H(D)$. Таким образом, оператор L действует из пространства $Q(D)$ в пространство $W(D,\Lambda)$. При этом область его определения не обязана совпадать с $Q(D)$. Пусть W — замкнутое инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство в $H(D)$ со спектром Λ, допускающее спектральный синтез. Другими словами, подпространство W совпадает с замыканием в $H(D)$ линейной оболочки системы $E(\Lambda)$. Следовательно, оно содержит подпространство $W(D,\Lambda)$. Таким образом, оператор L действует из пространства $Q(D)$ в W. Неполнота системы $E(\Lambda)$ в пространстве $H(D)$ равносильна тому, что W является нетривиальным подпространством в $H(D)$.

Теорема 3. *Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, W — нетривиальное замкнутое и инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство в $H(D)$ со спектром Λ, допускающее спектральный синтез. Тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) Оператор L является изоморфизмом линейных топологических пространств $Q(D)$ и W. 2) Каждая функция из W представляется рядом (1), равномерно сходящимся на компактах из области D. 3) $S_\Lambda = 0$, Λ — правильная последовательность и существует функция $f \in F(\Lambda)$ такая, что*

$$h_f(\lambda) = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. 1)→2). Если верно утверждение 1), то оператор

$$L : Q(D) \to W$$

сюръективен. Согласно определению последнего это означает, что каждая функция из W представляется рядом (1), равномерно сходящимся на компактах из области D, т.е. выполнено 2).

2)→1). Пусть верно утверждение 2). Тогда согласно определению подпространства $W(D,\Lambda)$ оно содержит W. Выше отмечалось, что в условиях теоремы имеет место и обратное вложение $W(D,\Lambda) \subset W$. Таким образом, подпространства $W(D,\Lambda)$ и W совпадают. В частности, это означает, что $W(D,\Lambda)$ замкнуто в $H(D)$. Кроме того, W — нетривиально, а потому система $E(\Lambda)$ неполна в $H(D)$. Тогда по теореме 2 верно равенство $m(\Lambda) = 0$. В начале предыдущего параграфа мы отмечали, что неполнота системы $E(\Lambda)$ влечет за собой также равенство $\sigma(\Lambda) = 0$.

В силу утверждения 2) каждая функция $g \in W$ представляется в области D рядом (1), сходящимся в топологии пространства $H(D)$. Тогда (см. [19], [17], теорема 1) последовательность $d = \{d_{k,n}\}$ коэффициентов этого представления является элементом пространства $Q(D)$. Следовательно, оператор $L : Q(D) \to W$ сюръективен. Он также и инъективен. Действительно, в начале второго параграфа было замечено, что неполнота $E(\Lambda)$ в пространстве $H(D)$ влечет за собой существование последовательности функционалов $\{\mu_{k,n}\} \subset H^*(D)$, биортогональной к системе функций $E(\Lambda)$. Поэтому коэффициенты разложения функции $g \in W$ в ряд (1), равномерно сходящийся на компактах из области D, определяются однозначно по формуле

$$d_{k,n} = (\mu_{k,n}, g), \quad k = 1,2,\ldots, \quad n = 0,1,\ldots,m_k.$$

Отметим, что W как замкнутое подпространство пространства Фреше $H(D)$ (см., например, [1]) само является пространством Фреше. Топология в W задается при помощи системы полунорм

$$||g||_p = \sup_{z\in K_p} |g(z)|, \quad p = 1,2,\ldots,$$

где $\{K_p\}_{p=1}^{\infty} = K(D)$. Используя теорему 1 в работе [17] для каждой функции $g \in W$ и каждого $p = 1,2,\ldots$, получаем:

$$||g||_p = \sup_{z\in K_p} |g(z)| \leqslant \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z\in K_p} |z^n \exp(z\lambda_k)| = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| c_{p,k,n} \leqslant C_p ||d||_{p+2},$$

где $\{d_{k,n}\}$ — последовательность коэффициентов разложения функции g в ряд (1), а постоянная $C_p > 0$ зависит от номера p, но не зависит от $d = \{d_{k,n}\}$, а значит, и от g.

Таким образом, оператор $L : Q(D) \to W$ является взаимно однозначным линейным и непрерывным отображением пространств Фреше. Тогда по теореме об открытом отображении (см. [20], приложение 1, теорема 2) для пространств Фреше оператор L осуществляет изоморфизм линейных топологических пространств $Q(D)$ и W. Это дает нам утверждение 1).

2) → 3). Если верно утверждение 2), то, как и выше, имеет место равенство: $m(\Lambda) = 0$. Тогда по теореме 5.2 в работе [4] верно также следующее утверждение: $S_\Lambda = 0$ и существует целая функция экспоненциального типа f, которая обращается в ноль в каждой точке λ_k с кратностью, не меньшей чем m_k, имеет регулярный рост, и ее верхний индикатор равен

H_D, т.е. имеют место тождества $\underline{h}_f \equiv h_f \equiv H_D$. Первое тождество здесь означает, что функция f имеет регулярный рост. Таким образом, Λ — правильная последовательность, $F \in f(\Lambda)$ и выполнено равенство

$$h_f(\lambda) = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тем самым мы показали, что утверждение 3) верно.

3)→2). Пусть верно утверждение 3). Тогда $S_\Lambda = 0$, и согласно определению правильной последовательности существует целая функция экспоненциального типа f, которая обращается в ноль в каждой точке λ_k с кратностью, не меньшей чем m_k, имеет регулярный рост (т.е. $\underline{h}_f \equiv h_f$) и выполнено равенство

$$h_f(\lambda) = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда по теореме 5.2 в работе [4] любая функция $g \in W$ представляется рядом (1), который сходится в каждой точке области D. Согласно же теореме 1 в работе [17] этот ряд будет сходиться также в топологии пространства $H(D)$. Это дает нам утверждение 2). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* // М.: Наука, 1982.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* // М.: Наука. 1976.
3. Красичков-Терновский И.Ф. *Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях* // ДАН СССР. 1971. Т. 197. №1. С. 29–31.
4. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях.* // Известия РАН. Серия матем. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136.
5. G. Valiron, *Sur les solutions des equations differentielles lineaires d'ordre infini et a coefficients constants.* // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 1929. V. 46. № 1. P. 25–53.
6. L. Schwartz, *Theorie generale des fonctions moyenne-periodique.* // Ann. Math. 1947. V. 48. № 4. P. 857–929.
7. Гельфонд А.О. *Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций* // Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова. 1951. Т. 38.
8. D.G. Dickson, *Expansions in series of solutions of linear difference-differential and infinite order differential equations with constant coefficients* // Memor. Amer. Math. Soc. 1957. V. 23. P. 1–72.
9. Левин Б.Я. *О некоторых приложениях интерполяционного ряда Лагранжа к теории целых функций* // Матем. сб. 1940. Т. 8, № 3. С. 437–454.
10. Коробейник Ю.Ф. *Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы* // Известия АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44, № 5. С. 1066–1144.
11. Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы* // УМН. 1981. № 1. С. 73–126.
12. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. *Интерполяционная задача в пространствах целых функций конечного порядка* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, № 5. С. 1102–1127.
13. Братищев А.В. *Базисы Кете, целые функции и их приложения* // Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону . 1995.
14. Кривошеев А.С. *Критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств.* // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 4. С. 457–460.
15. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* // М.: Наука. 1983.
16. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* // М.: Наука, 1985.
17. Кривошеева О.А. *Ряды экспоненциальных мономов в комплексных областях.* // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. Математика. Т. 9, № 3(21). С. 96–104. Уфа. УГАТУ 2007.
18. Кривошеева О.А. *Об особых точках суммы ряда экспонент.* // Уфимский математический журнал. Т. 1, №4. 2009. С. 78–109.

19. Напалков В.В., Кривошеева О.А. *Теоремы Абеля и Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов.* // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 432, № 5. С. 18–20.
20. Робертсон А.П., Робертсон В. Дж. *Топологические векторные пространства.* // М.: Мир. 1967.

Олеся Александровна Кривошеева,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru