ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 4 (2010). С. 52-57.

УДК 517.53+517.98

ПОЛНОТА СИСТЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЭЙРИ И ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

В.Э. КИМ

Аннотация. Изучается задача построения новых классов гиперциклических операторов на пространстве всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах комплексной плоскости. Эта задача тесно связана с задачей о полноте некоторой системы целых функций. В работе доказывается, что система последовательных производных любого ненулевого решения дифференциального уравнения Эйри полна в пространстве всех целых функций. Этот результат применяется для описания новых классов гиперциклических дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, связанных с уравнением Эйри.

Ключевые слова: целые функции, гиперциклические операторы, функции Эйри.

1. Введение

Пусть $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. В 1929 году Дж. Биркгоф получил следующий результат [1]: Для любого $0 \neq a \in \mathbb{C}$ существует целая функция f, такая, что множество ее сдвигов $\{f(z+an),\ n=0,1,2,...\}$ плотно в $H(\mathbb{C})$. В 1952 году МакЛейн [2] доказал, что существует целая функция f, такая, что множество ее производных $\{f^{(n)}(z),\ n=0,1,2,...\}$ плотно в $H(\mathbb{C})$. Эти работы положили начало изучению гиперциклических операторов.

Определение 1. *Пусть X — топологическое векторное пространство. Линейный непрерывный оператор $T: X \to X$ называется гиперциклическим, если существует такой элемент $x \in X$, что его орбита $\{T^n x,\ n=0,1,2,...\}$ плотна в X.*

Данное определение гиперциклического оператора было впервые предложено в работе [3]. С точки зрения этого определения результаты работ [1] и [2] означают соответственно, что операторы сдвига и дифференцирования являются гиперциклическими на пространстве $H(\mathbb{C})$. В 1991 году в работе Годфруа и Шапиро [4] была установлена гиперцикличность для значительно более широкого класса операторов.

Известно (см., например, [5]), что любая целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k\lambda^k$ определяет на пространстве $H(\mathbb{C})$ оператор свертки M, который может быть записан в виде дифференциального оператора (вообще говоря, бесконечного порядка) с постоянными коэффициентами:

$$M[f](z)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k f^{(k)}(z). \tag{1}$$

Функция L называется характеристической функцией оператора (1). В работе [4] было показано, что любой оператор свертки (1) является гиперциклическим, если его характеристическая функция не равна тождественно константе.

V.E. Kim, Completeness of systems of derivatives of Airy functions and hypercyclic operators.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00779).

Поступила 14 июня 2010 г.

Возникает следующий вопрос: какие другие операторы, помимо операторов свертки, являются гиперциклическими на пространстве $H(\mathbb{C})$? Исследованию этого вопроса был посвящен ряд работ (см., например, [6], [7], [8], [9]). В работе [6] было показано, что оператор вида **(a)**: $f(z) \to f'(\lambda z)$ является гиперциклическим при любой константе $\lambda \in \mathbb{C}$, такой, что $|\lambda| \geq 1$ и не является гиперциклическим, если $|\lambda| < 1$. В работе [7] доказывается гиперцикличность обобщенных операторов свертки вида **(b)**: $f(z) \to \sum_{k=0}^{\infty} d_k \Lambda_\alpha^k f(z)$, где $\Lambda_\alpha f(z) = f'(z) + (\alpha + 1/2)\left(\frac{f(z)-f(-z)}{z}\right)$ — оператор Данкла, $\alpha \geq -1/2$. В работе [8] даны некоторые достаточные условия гиперцикличности и указаны примеры операторов, удовлетворяющих этим условиям, и не являющихся операторами свертки. В качестве таких примеров приведены, в частности, операторы вида **(a)** из работы [6], а также операторы вида **(c)**: $f(z) \to \sum_{k=1}^{K} d_k z^{k-1} f^{(k)}(z)$. В работе [9] доказана гиперцикличность операторов обобщенной свертки вида **(d)**: $f(z) \to \sum_{k=0}^{\infty} d_k D^k f(z)$, где D — оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева. Отметим также, что операторы вида **(d)** содержат в себе операторы видов **(a)**, **(b)**, **(c)**.

В данной статье установлен новый класс гиперциклических операторов на пространстве $H(\mathbb{C})$. Отметим, что задача о гиперцикличности операторов из определенного класса связана, как правило, с задачей о полноте некоторой системы функций. В статье устанавливается полнота систем последовательных производных решений дифференциального уравнения Эйри:

$$y'' - zy = 0. \tag{2}$$

На основе этого результата устанавливается гиперцикличность линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, связанных с уравнением (2).

Отметим, что любое ненулевое решение уравнения (2) является трансцендентной целой функцией и имеет порядок, равный 3/2 (см., например, [10, с. 74]). Общее решение уравнения (2) может быть записано в виде $y(z) = c_1\mathrm{Ai}(z) + c_2\mathrm{Bi}(z)$, где $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$ — функции Эйри, c_1, c_2 — произвольные константы. Функции Эйри имеют многочисленные применения в различных задачах математики и физики (см., например, монографию [11]).

Основные результаты статьи сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть целая функция f является решением уравнения Эйри (2) и f не равна тождественно нулю. Тогда система последовательных производных $\{f^{(n)},\ n = 0, 1, ...\}$ полна в пространстве $H(\mathbb{C})$.*

Теорема 2. *Пусть $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{K} c_k \lambda^k$ — произвольный многочлен, не равный тождественно константе, $U : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ — линейный непрерывный оператор вида*

$$U[f] = P(V)f = \sum_{k=0}^{K} c_k V^k[f], \tag{3}$$

где $V[f](z) = f''(z) - zf(z)$. Тогда U — гиперциклический оператор на $H(\mathbb{C})$.

2. Полнота систем целых функций и гиперциклические операторы

Как уже отмечалось во введении, существует тесная связь между гиперцикличностью и полнотой некоторой системы функций. Данная связь устанавливается благодаря следующей теореме [12]:

Теорема 3. *(Gethner, Shapiro) Пусть $T : X \to X$ — линейный непрерывный оператор, X — пространство Фреше. Предположим, что существуют плотные подмножества $\Phi, \Psi \subset X$ и отображение $S : \Psi \to X$, такие, что: 1) $T^n\phi \to 0$, $\forall \phi \in \Phi$, 2) $S^n\psi \to 0$, $\forall \psi \in \Psi$, 3) $TS\psi = \psi$, $\forall \psi \in \Psi$. Тогда T — гиперциклический оператор.*

Используя теорему 3 и схему, использованную Годфруа и Шапиро в [4, Теорема 5.1], получаем следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть T — линейный непрерывный оператор на $H(\mathbb{C})$, такой, что найдутся система целых функций $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ и отличная от константы функция $G \in H(\mathbb{C})$, для которых выполняется $T[f_\lambda(z)] = G(\lambda)f_\lambda(z)$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть система $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ полна в $H(\mathbb{C})$ для любого множества $\Lambda \subset \mathbb{C}$, содержащего хотя бы одну предельную точку. Тогда T — гиперциклический оператор.*

Доказательство. Обозначим $\Lambda_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |G(\lambda)| < 1\}$ и $\Lambda_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |G(\lambda)| > 1\}$. Тогда Λ_1 и Λ_2 являются непустыми открытыми подмножествами в $\mathbb{C}$. Из условий теоремы вытекает, что $\Phi = \operatorname{span}\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda_1\}$ и $\Psi = \operatorname{span}\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda_2\}$ являются плотными подмножествами в $H(\mathbb{C})$. Определим оператор $S : \Psi \to H(\mathbb{C})$:

$$S[f_\lambda](z) = \frac{f_\lambda(z)}{G(\lambda)}, \lambda \in \Lambda_2.$$

Имеем: 1) $T^n[f_\lambda](z) = (G(\lambda))^n f_\lambda(z) \to 0$ равномерно на компактах, $\forall\lambda \in \Lambda_1 \Rightarrow T^n\phi \to 0$, $\forall\phi \in \Phi$; 2) $S^n[f_\lambda](z) = \frac{f_\lambda(z)}{(G(\lambda))^n} \to 0$ равномерно на компактах, $\forall\lambda \in \Lambda_2 \Rightarrow S^n\psi \to 0$, $\forall\psi \in \Psi$; 3) $TS[f_\lambda](z) \equiv f_\lambda(z)$, $\forall\lambda \in \Lambda_2 \Rightarrow TS\psi = \psi$, $\forall\psi \in \Psi$.
Таким образом, по теореме 3, T — гиперциклический оператор. □

3. Доказательство основных результатов

В этом разделе приводится доказательство теорем 1 и 2, сформулированых во введении. Приведем вначале доказательство теоремы 1.

Доказательство. Пусть f удовлетворяет условиям теоремы. Известен следующий результат [14]: для любой функции $F \in H(\mathbb{C})$ полнота в пространстве $H(\mathbb{C})$ системы $\{F^{(n)},\ n = 0, 1, ...\}$ эквивалетна тому, что F не удовлетворяет ни одному однородному уравнению свертки на пространстве $H(\mathbb{C})$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что f не удовлетворяет ни одному однородному уравнению свертки на пространстве $H(\mathbb{C})$.

Предположим, что f является решением некоторого однородного уравнения свертки вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k F^{(k)}(z) = 0, \tag{4}$$

где $L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ — целая функция экспоненциального типа. Отметим вначале, что, если функция L имеет лишь конечное число нулей, то f, очевидно, не может удовлетворять уравнению (4). Действительно, любое решение уравнения (4) является в этом случае конечной суммой экспоненциальных решений и, следовательно, является целой функцией экспоненциального типа. С другой стороны, функция f, являясь решением уравнения Эйри, имеет порядок $3/2$.

Предположим теперь, что L имеет бесконечно много нулей. Обозначим через $\{\lambda_j, m_j\}_{j=1}^{\infty}$ множество нулей функции L, где через m_j обозначена кратность нуля λ_j. Тогда функции $z^a \exp(\lambda_j z)$, $j \in \mathbb{N}$, $a = 0, 1, ..., m_j - 1$, являются решениями уравнения (4). Решения такого вида обычно называют элементарными решениями. Известно, что любое решение однородного уравнения свертки (4) может быть аппроксимировано линейными комбинациями элементарных решений (см. [13]). Следовательно, функцию f можно представить в виде:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{q_n} p_j(z) \exp(\lambda_j z), \tag{5}$$

где $p_j(z)$ — полиномы степени не выше m_j-1; $q_n\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}q_n=+\infty$. Таким образом,

$$f''(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{q_n}\exp(\lambda_j z)(p_j''(z)+2\lambda_j p_j'(z)+\lambda_j^2 p_j(z)), \tag{6}$$

Определим следующие многочлены: $Q_j(z)=p_j''(z)+2\lambda_j p_j'(z)+\lambda_j^2p_j(z)-zp_j(z)$. Так как f является решением уравнени Эйри, то $zf(z)=f''(z)$. Тогда с учетом (5) и (6) получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{q_n}Q_j(z)\exp(\lambda_j z)=0. \tag{7}$$

Покажем, что $Q_j(z)\equiv 0$ для любого $j\in\mathbb{N}$. Для этого зафиксируем произвольное $s\in\mathbb{N}$ и определим функцию

$$L_s(z)=\Big(\frac{L(z)}{(z-\lambda_s)^{m_s}}\Big)^2=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k.$$

Тогда L_s является целой функцией экспоненциального типа и, таким образом, определяет на пространстве $H(\mathbb{C})$ оператор свертки

$$M_s[F](z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k F^{(k)}(z).$$

Очевидно, $L_s(\lambda_s)\neq 0$. Если $j\neq s$, то λ_j является нулем функции L_s кратности $2m_j\geq m_j+1$. Следовательно, $M_s[z^a\exp(\lambda_j z)]=0$ при $j\neq s$, $a=0,1,...,m_j+1$. Применяя к (7) оператор M_s, получаем:

$$M_s[Q_s(z)\exp(\lambda_s z)]=0. \tag{8}$$

Заметим теперь, что для любой функции $F\in H(\mathbb{C})$ и любого $\lambda\in\mathbb{C}$ выполняется:

$$\begin{aligned}(F(z)\exp(\lambda z))'&=\exp(\lambda z)(F'+\lambda F),\\ (F(z)\exp(\lambda z))''&=\exp(\lambda z)(F''+2\lambda F'+\lambda^2F),\\ &\dots\\ (F(z)\exp(\lambda z))^{(N)}&=\exp(\lambda z)(F^{(N)}+b_{N-1}\lambda F^{(N-1)}+...+b_1\lambda^{N-1}F'+\lambda^N F),\end{aligned}$$

где $b_1,...,b_{N-1}$ — определенные константы. Используя эти соотношения, получаем:

$$M_s[Q_s(z)\exp(\lambda_s z)]=\exp(\lambda_s z)\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(Q_s^{(k)}+b_{k-1}\lambda_s Q_s^{(k-1)}+...+b_1\lambda_s^{k-1}Q_s'+\lambda_s^kQ_s)$$

Переобозначив константы, последнее равенство можно записать в виде:

$$M_s[Q_s(z)\exp(\lambda_s z)]=\exp(\lambda_s z)\sum_{k=0}^{\infty}\tilde\beta_k Q_s^{(k)}(z). \tag{9}$$

Тогда из (8) и (9) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\tilde\beta_k Q_s^{(k)}(z)=0. \tag{10}$$

Из (10) вытекает, что, если многочлен Q_s не равен тождественно нулю, то необходимо выполняется $\tilde\beta_0=0$. Действительно, перепишем (10) в виде

$$\tilde\beta_0 Q_s(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\tilde\beta_k Q_s^{(k)}(z).$$

Последнее равенство, очевидно, может выполняться лишь в том случае, если обе его части тождественно равны нулю. Таким образом, при предположении, что многочлен Q_s не равен тождественно нулю, должно выполняться $\tilde{\beta}_0 = 0$. С другой стороны,

$$\tilde{\beta}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda_s^k = L_s(\lambda_s) \neq 0.$$

Следовательно, $Q_s(z) \equiv 0$. Таким образом, многочлен p_s должен удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$p_s''(z) + 2\lambda_s p_s'(z) + \lambda_s^2 p_s(z) = z p_s(z).$$

Тогда, очевидно, $p_s(z) \equiv 0$. Таким образом, с учетом произвольности зафиксированного s, из представления (5) вытекает $f \equiv 0$, что противоречит условиям теоремы. Следовательно, f не может быть решением ни одного однородного уравнения свертки вида (4). □

Приведем теперь доказательство теоремы 2.

Доказательство. Докажем, что оператор (3) является гиперциклическим оператором. Пусть $F \in \ker V$ и F не равна тождественно нулю. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим $F_\lambda(z) \equiv F(z+\lambda)$. Нетрудно видеть, что $V[F_\lambda] = \lambda F_\lambda$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, $U[F_\lambda] = P(\lambda) F_\lambda$. Согласно теореме 1, система $\{F^{(n)},\ n = 0, 1, ...\}$ полна в $H(\mathbb{C})$, что эквивалетно (см. [15]) полноте в $H(\mathbb{C})$ системы $\{F_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$, где Λ — любое подмножество в $\mathbb{C}$, содержащее предельную точку. Следовательно, по теореме 4, оператор U является гиперциклическим. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.D. Birkhoff, *Demonstration d'un theoreme elementaire sur les fonctions entieres* // C. R. Acad. Sci. Paris. T. 189, № 14. 1929. P. 473–475.
2. G. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families* // J. Anal. Math. V. 2. 1952. P. 72–87.
3. B. Beauzamy, *Un operateur sur l'espace de Hilbert dont tous les polynomes sont hypercycliques* // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. V. 303. 1986. P. 923–925.
4. G. Godefroy, J.H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* // J. Funct. Anal. V. 98, № 2. 1991. P. 229–269.
5. R.D. Carmichael, *Linear differential equations of infinite order* // Bull. Amer. Math. Soc. 42, № 4. 1936. P. 193–218.
6. R. Aron, D. Markose, *On universal functions* // J. Korean Math. Soc. V. 41, № 1. 2004. P. 65–76.
7. J.J. Betancor, M. Sifi, K. Trimeche, *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with Dunkl operators on* $\mathbb{C}$ // Acta Math. Hungar. V. 106, № 1-2. 2005. P. 101–116.
8. H. Petersson, *Supercyclic and hypercyclic non-convolution operators* // J. Operator Theory. V. 55, № 1. 2006. P. 133–151.
9. Ким В.Э. *Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда-Леонтьева* // Матем. заметки. Т. 85, № 6. 2009. С. 849–856.
10. I. Laine, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations.* Walter de Gruyter. 1993.
11. O. Vallee, M. Soares, *Airy functions and applications to physics*, Imperial College Press. 2004.
12. R.M. Gethner, J.H. Shapiro, *Universal vectors for operators on space of holomorphic functions* // Proc. Amer. Math. Soc. V. 100, № 2. 1987.P. 281–288.
13. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей.* М.: Физматлит. 1959.

14. В.П. Громов *О полноте систем производных аналитической функции* // Изв. АН СССР, Серия матем. Т. 25. 1961. С. 543–556.
15. Маркушевич А.И. *О базисе в пространстве аналитических функций* // Матем. сборник. Т. 17, № 2. 1945. С. 211–252.

Виталий Эдуардович Ким,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `kim@matem.anrb.ru`