ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 4 (2010). С. 27-38.

УДК 519.63

О ЕДИНСТВЕННОСТИ И ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ

И.И. ГОЛИЧЕВ

Аннотация. В работе построен итерационный процесс решения нелинейной начально-краевой задачи с нелокальными краевыми условиями, сходящийся с любого начального приближения. В частности, такими задачами описывается нестационарный процесс теплообмена излучением.
Единственность решения задачи и сходимость итерационного процесса доказывается в условиях существования гладкого решения задачи.
На каждом шаге итерации решается линейная начально-краевая задача с краевыми условиями третьего рода. Получена оценка скорости сходимости итерационного процесса и необходимые для его построения априорные оценки.

Ключевые слова:нелокальные краевые условия, теплообмен излучением, итерационные методы.

1. Введение

Рассматривается задача:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(t,x,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+b\left(x,t,u,u_x\right)=f,(x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a_{ij}\left(t,x,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\vec{n},x_i)+d\left(x,t,u\right)u+h\left(u\left(x,t\right)\right)= \\ =\int\limits_{\partial G}h\left(u\left(\xi,t\right)\right)\varphi\left(\xi,x,t\right)d\xi+g,(x,t)\in S, \end{aligned} \tag{2}$$

$$u\left(x,0\right)=u^0,x\in G. \tag{3}$$

Здесь $Q=Q_T=G\times(0,T)\,;S=S_T=\partial G\times(0,T)\,,G$ — ограниченная область в $R^n\,(n\geq 2)\,,\partial G$ — ее граница, знак суммирования по повторяющимся индексам опускается.

Глобальная разрешимость таких задач, когда функции $b\left(\cdot\right),d\left(\cdot\right)$ тождественно равны нулю, изучалась в работе [1]. Начало исследований с краевыми условиями вида (2) для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a\Delta u$ положили работы [2], [3].

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\|u\|=\|u\|_2=\|u\|_{L_2(G)}\,,\\ |||u|||=|||u|||_2=\|u\|_{L_2(Q)}\,,\end{gathered}$$

I.I. Golichev, On uniqueness and iteration method of solving of one non-linear non-stationary problem with non-local boundary conditions of «radiation heat transfer» type.

Поступила 23 сентября 2010 г.

$(u,v)\,,((u,v))$ — скалярные произведения в $L_2(G), L_2(Q)$,

$$|u_x|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2, |u_{xx}|^2=\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2,$$
$$V(Q)=V_2(Q)=L_2\left(0,T;W_2^1(G)\right)\cap L_\infty\left(0,T;L_2(G)\right).$$

Через $A\left(\omega\right)=A\left(x,t,\omega\right)$ будем обозначать матрицу $\left(a_{ij}\left(t,x,\omega\right)\right)_{i,j=1}^n$.

Будем далее использовать следующие обозначения:

$$a\left(t,\omega,u_x,v_x\right)=(A(\omega)u_x,v_x)=\int\limits_G a_{ij}\left(t,x,\omega\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$
$$b\left(t,\omega,u_x,v\right)=\int\limits_G b\left(x,t,\omega,u_x\right)vdx,$$
$$d\left(t,\omega,v\right)=\int\limits_{\partial G} d(x,t,\omega(x,t))v(x,t)dx,$$
$$h\left(t,\omega,v\right)=\int\limits_{\partial G} h\left(\omega(x,t)\right)v(x,t)dx,$$
$$h\left(t,\varphi,\omega,v\right)=\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G} h\left(\omega(\xi,t)\right)\varphi(\xi,x,t)v(x)d\xi dx.$$

Решением задачи $(1)-(3)$ называется элемент $u\in V(Q), h(u)\in L_1(S)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$-\int\limits_0^T\left(u,v_t\right)dt+\int\limits_0^T\left[a\left(t,u,u_x,v_x\right)+b\left(t,u,u_x,v\right)\right]dt+$$
$$+\int\limits_0^T d\left(t,u,v\right)dt+\int\limits_0^T h\left(t,u,v\right)dt=$$
$$=\int_0^T h\left(t,\varphi,u,v\right)dt+\int\limits_Q fvdxdt+\int\limits_S gvdxdt$$

при любом $v\in W_2^{1,1}\left(Q\right)$, равным нулю при $t=T$.

2. Условия на данные задачи, решение и дополнительные обозначения

Будем предполагать, что решение задачи $(1)-(3)$ $u(x,t)$ почти всюду в Q удовлетворяет неравенствам:

$$N_1\leqslant u(x,t)\leqslant N_2. \tag{4}$$

Обозначим через P оператор проектирования

$$Pu=\begin{cases} u(x,t), & \text{если}\ \ N_1\leqslant u(x,t)\leqslant N_2,\\ N_1, & \text{если}\ \ u(x,t)<N_1,\\ N_2, & \text{если}\ \ u(x,t)>N_2.\end{cases}$$

Будем предполагать, что выполнены следующий условия на данные задачи:

I. $\rho\in L_\infty(G), 0<\rho_1\leqslant\rho(x)\leqslant\rho_2$ почти для всех $x\in Q$.

II. Матрица $A(u)$ для почти всех $(x,t) \in Q$ и $u, v \in [N_1, N_2]$ удовлетворяет неравенствам

$$\left\| A(x,t,u) - A(x,t,v) \right\| \leqslant L_1 \left| u - v \right|, \tag{5}$$

$$m \left| \xi \right|^2 \leqslant a_{ij}(x,t,u)\, \xi_i \xi_j \leqslant M \left| \xi \right|^2 \ \forall \xi \in R^n, \tag{6}$$

где $L_1 \geq 0, m > 0$.

III. Функция $b(x,t,u,\xi)$ почти для всех $(x,t) \in Q$ удовлетворяет условиям:

$$\left| b\left(x,t,u^1,\xi\right) - b\left(x,t,u^2,\xi\right) \right| \leqslant L_2 \left| u^1 - u^2 \right| \left| \xi \right| \ \forall u^1, u^2 \in [N_1, N_2], \xi \in R^n, \tag{7}$$

$$\left| b\left(x,t,u,\xi^1\right) - b\left(x,t,u,\xi^2\right) \right| \leqslant L_3 \left| \xi - \eta \right| \ \forall u \in [N_1, N_2], \xi^1, \xi^2 \in R^n, \tag{8}$$

где $L_2, L_3 \geq 0$.

IV. Функция $d(x,t,u)$ непрерывна на $S \times [N_1, N_2]$ почти всюду на S, $|d(x,t,0)| \leq \bar{d}$ и по переменной u удовлетворяет условию Липшица

$$\left| d\left(x,t,u^1\right) - d\left(x,t,u^2\right) \right| \leqslant L_4 \left| u^1 - u^2 \right| \ \forall (x,t) \in S. \tag{9}$$

V. Функция $h(u)$ удовлетворяет условиям Липшица на $[N_1, N_2]$

$$\left| h\left(u^1\right) - h\left(u^2\right) \right| \leqslant L_5 \left| u^1 - u^2 \right|. \tag{10}$$

VI. Функция $\varphi(\xi,x,t) \in L_1(\partial G \times \partial G \times [0,T])$, $\varphi(\xi,x,t) = \varphi(x,\xi,t)$ и, кроме того, $\widetilde{\varphi}(\xi,t) = \int\limits_{\partial G} \varphi(\xi,x,t)dx \leqslant C_2$

VII. $u^0 \in L_2(G), f \in L_2(Q), g \in L_2(S)$.

Далее рассматривается вопрос о сходимости последовательности $\{u_k\}$, где u_{k+1} — решение задачи

$$\rho \frac{\partial u_{k+1}}{\partial t} - \mu_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial x_i^2} + \mu_2 u_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x_i} r_{ij}(x,t,Pu_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} -$$

$$- \left(b(x,t,Pu_k,u_{kx}) - \mu_2 Pu_k \right) + f(x,t), (x,t) \in Q, \tag{11}$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_i} \cos(\vec{n}, x_i) + \mu_3 u_{k+1} = -\left(d(x,t,Pu_k)Pu_k + h(Pu_k) - \mu_3 Pu_k \right) +$$

$$+ \int\limits_{\partial G} h\left(Pu_k(\xi,t)\right) \varphi(\xi,x,t) d\xi - r_{ij}(x,t,Pu_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_i) + g(x,t), (x,t) \in S, \tag{12}$$

$$u_{k+1}(x,0) = u^0(x), x \in G. \tag{13}$$

Здесь $r_{ij}(x,t,\omega) = a_{ij}(x,t,\omega) - \mu_1 \delta_{ij}, \delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$, при $i \neq j$, μ_1, μ_2, μ_3 — неотрицательные параметры метода. Далее заметим, что для сходимости рассматриваемого итерационного процесса существенную роль играет выбор параметра μ_1. Параметры μ_2 и μ_3 могут быть произвольными неотрицательными (например, $\mu_2 = \mu_3 = 0$). Однако в некоторых случаях соответствующий выбор этих параметров ускоряет сходимость.

3. Исследование сходимости итерационного процесса

Теорема 1. *Пусть задача* $(1)-(3)$ *имеет решение* $u(x,t) \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, *удовлетворяющее условию* (4), *а данные задачи удовлетворяют условиям* $(I)-(VII)$. *Пусть* $\mu_1 = \dfrac{1}{2}(M+m), \mu_2, \mu_3 \geq 0$ *и* $n \leqslant 3$, *а* $\{u_k\}$ *— последовательность решения задач* $(11), (12)$. *Тогда при любом* $u_0 \in V$ *последовательность* $\{u_k\}$ *сходится к* $u(x,t)$ *при* $k \to \infty$ *и справедлива оценка*

$$\left\| u(x,t - u_k(x,t)) \right\|_V \leqslant C(\theta_1) \theta_1^k \left\| u - u_0 \right\|_V, \tag{14}$$

где $\theta_1 \in (\theta, 1)$, $\theta = \dfrac{M-m}{M+m}$, $\|u\|_V = \operatorname*{vraimax}_{t\in[0,T]} \|u(x,t)\| + \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(G))}$.

Доказательство. Поскольку для решения задачи (1) – (3) справедливо равенство $Pu = u$, то уравнения (1), (2) можно записать в виде:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \mu_1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \mu_2 u = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(r_{ij}(x,t,Pu)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - r_b(x,t,Pu,u_x) + f(x,t), (x,t)\in Q,$$

$$\begin{aligned}&\mu_1\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\vec{n},x_i) + \mu_3 u = -r_d(x,t,Pu)Pu - h(Pu(x,t)) + \\ &+\int\limits_{\partial G} h\left(Pu(\xi,t)\right)\varphi(\xi,x,t)d\xi - r_{ij}(x,t,Pu)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\vec{n},x_i) + g(x,t), (x,t)\in S.\end{aligned}$$

Здесь $r_b(x,t,\omega,u_x) = b(x,t,\omega,u_x) - \mu_2\omega, r_d(x,t,\omega) = (d(x,t,\omega)-\mu_3)\omega$.

Обозначим $\Delta u_k = u - u_k$, тогда Δu_{k+1} является решением задачи:

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial \Delta u_{k+1}}{\partial t} - \mu_1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Delta u_{k+1}}{\partial x_i^2} + \mu_2\Delta u_{k+1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[r_{ij}(x,t,Pu)\frac{\partial u}{\partial x_j} - r_{ij}(x,t,Pu_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right] - \\ &- \left[r_b(x,t,Pu,u_x) - r_b(x,t,Pu_k,u_x)\right], (x,t)\in Q,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\mu_1\frac{\partial \Delta u_{k+1}}{\partial x_i}\cos(\vec{n},x_i) + \mu_3\Delta u_{k+1} = \\ &= -\left[r_{ij}(x,t,Pu)\frac{\partial u}{\partial x_j} - r_{ij}(x,t,Pu_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right]\cos(\vec{n},x_i) - \\ &- \left[r_d(x,t,Pu) - r_d(x,t,Pu_k)\right] - \left[h(Pu(x,t)) - h(Pu_k(x,t))\right] + \\ &+\int\limits_{\partial G}\left[h(Pu(\xi,t)) - h(Pu_k(\xi,t)\right]\varphi(\xi,x,t)d\xi, (x,t)\in S,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\Delta u_{k+1}(x,0) = 0, x\in G. \tag{17}$$

Умножая уравнение (15) на $\Delta u_k e^{-2\lambda t}(\lambda > 0)$ и интегрируя по области $G\times(0,\tau)$, где $\tau \leqslant T$, получим обобщенное энергетическое соотношение

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|\rho\Delta u_{k+1}(x,\tau)e^{-2\lambda\tau}\right\|^2 + \mu_1\int\limits_0^\tau \left\|\Delta u_{k+1,x}(x,t)\right\|^2 e^{-2\lambda t}dt + \\ &+\mu_2\int\limits_0^\tau \left\|u_{k+1}(x,t)\right\|^2 e^{-2\lambda t}dt + \lambda\int\limits_0^\tau\int\limits_G \left|\rho u_{k+1}(x,t)\right|^2 dxdt + \\ &+\mu_3\int\limits_0^\tau\int\limits_G u_{k+1}^2(x,t)e^{-2\lambda t}dxdt = \sum_{i=1}^{5} J_i(\tau),\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$J_1(\tau) = -\int_0^\tau \int_G \left(r_{ij}(Pu)\frac{\partial u}{\partial x_j} - r_{ij}(Pu_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \Delta u_{k+1}}{\partial x_i} e^{-2\lambda t} dxdt,$$

$$J_2(\tau) = -\int_0^\tau \int_G \left(r_b(Pu) - r_b Pu_k \right) \Delta u_{k+1} e^{-2\lambda t} dxdt,$$

$$J_3(\tau) = -\int_0^\tau \int_{\partial G} \left(r_d(Pu) - r_d Pu_k \right) \Delta u_{k+1} e^{-2\lambda t} dxdt,$$

$$J_4(\tau) = \int_0^\tau \int_{\partial G} \left(h(Pu) - hPu_k \right) \Delta u_{k+1} e^{-2\lambda t} dxdt,$$

$$J_5(\tau) = \int_0^\tau \int_{\partial G} \int_{\partial G} \left[h(Pu(\xi,t)) - hPu_k(\xi,t) \right] \varphi(\xi,x,t) \Delta u_{k+1} e^{-2\lambda t} d\xi dxdt.$$

Получим оценки интегралов $J_1 - J_5$. Представим интеграл $J_1(\tau)$ в виде

$$J_1(\tau) = J_{1,1}(\tau) + J_{1,2}(\tau) = \int_0^\tau \int_G \left(r_{ij}(Pu)\frac{\partial u}{\partial x_j} - r_{ij}(Pu_k)\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \Delta u_{k+1}}{\partial x_i} e^{-2\lambda t} dxdt +$$

$$+ \int_0^\tau \int_G r_{ij}(Pu_k)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \frac{\partial \Delta u_{k+1}}{\partial x_i} e^{-2\lambda t} dxdt.$$

Учитывая неравенство (5), очевидное неравенство $\|Pu - Pv\| \leqslant \|u - v\|$ и ограниченность градиента решения ($|u_x| \leqslant C_1$), получаем

$$|J_{1,1}(\tau)| = \left| \int_0^\tau \int_G \left(r_{ij}(Pu)\frac{\partial u}{\partial x_j} - r_{ij}(Pu_k)\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \Delta u_{k+1}}{\partial x_i} e^{-2\lambda t} dxdt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau \int_G (L_1 + \mu_1) |u_x| \, |Pu - Pu_k| \, |\Delta u_{k+1,x}| \, e^{-2\lambda t} dt \leqslant$$

$$\leqslant (L_1 + \mu_1) C_1 \int_0^\tau \left\| \Delta u_k e^{-\lambda t} \right\| \left\| \Delta u_{k+1,x} e^{-\lambda t} \right\| dt.$$

Далее будем использовать обозначения

$$\widetilde{u}_k = u_k e^{-\lambda t}, \widetilde{u}_{k,x} = u_{k,x} e^{-\lambda t}, \Delta\widetilde{u}_k = \Delta u_k e^{-\lambda t}, \Delta\widetilde{u}_{k,x} = \Delta u_{k,x} e^{-\lambda t}.$$

Тогда полученную выше оценку можно записать в виде

$$|J_{1,1}(\tau)| \leqslant (L_1 + \mu_1) C_1 \int_0^\tau \|\Delta\widetilde{u}_{k+1,x}\| \, \|\Delta\widetilde{u}_k\| \, dt. \tag{19}$$

Для оценки интеграла $J_{1,2}$ воспользуемся неравенствами (6) и, учитывая, что $\mu_1 = \frac{1}{2}(m + M)$, получим

$$|r_{ij}(Pu_k)\xi_j\xi_i| \leqslant \theta\mu_1 |\xi|^2, \ \forall \xi \in R^n.$$

В силу симметричности матрицы (r_{ij}) из последнего равенства следует, что

$$|r_{ij}(Pu_k)\xi_i\eta_j| \leqslant \theta \left(\mu_1 |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mu_1 |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Откуда следует, что

$$|J_{1,2}(\tau)| \leqslant \theta\mu_1 \left(\int\limits_0^\tau \|\Delta\widetilde{u}_{k,x}\|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^\tau \left\|\Delta\widetilde{u}_{(k+1),x}\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

При оценке $J_2(\tau)$, используя неравенства (7)–(8) и ограниченность градиента u_x, получаем

$$\begin{gathered}
|J_2(\tau)| = \left|\int\limits_0^\tau \int\limits_G [b(x,t,Pu,u_x) - b(x,t,Pu_k,u_{k,x}) - \right.\\
\left. -\ \mu_2(Pu - Pu_k)]\, \Delta u_{(k+1)} e^{-2\lambda t} dxdt\right| \leqslant\\
\leqslant (L_2C_1 + \mu_2) \int\limits_0^\tau \int\limits_G (Pu - Pu_k) \left|\Delta u_{(k+1)}\right| e^{-2\lambda t} dxdt +\\
+ L_3 \int\limits_0^\tau \int\limits_G |u_x - u_{k,x}| \left|\Delta u_{(k+1)}\right| e^{-2\lambda t} dxdt \leqslant\\
\leqslant (L_2C_1 + \mu_2) \int\limits_0^\tau \|\Delta\widetilde{u}_k\| \|\Delta\widetilde{u}_{k+1}\|\, dt + L_3 \int\limits_0^\tau \|\Delta\widetilde{u}_{k,x}\| \|\Delta\widetilde{u}_{k+1}\|\, dt.
\end{gathered} \tag{21}$$

Используя неравенство (9), получим оценку интеграла $J_3(\tau)$

$$\begin{gathered}
|J_3(\tau)| = \left|\int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial G} [d(x,t,Pu)Pu - d(x,t,Pu_k)Pu_k - \right.\\
\left. - \mu_3(Pu - Pu_k)]\, \Delta u_{(k+1)} e^{-2\lambda t} dxdt\right| =\\
= \left|\int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial G} [d(x,t,Pu) - d(x,t,Pu_k)Pu + \right.\\
\left. + (d(x,t,Pu_k) - \mu_3)(Pu - Pu_k)]\, \Delta u_{(k+1)} e^{-2\lambda t} dxdt\right| \leqslant\\
\leqslant (2L_4N + \bar{d} + \mu_3) \int\limits_0^\tau \|\Delta\widetilde{u}_k\|_{\partial G} \|\Delta\widetilde{u}_{k+1}\|_{\partial G}\, dt \leqslant\\
\leqslant (2L_4N + \bar{d} + \mu_3) \left(\int\limits_0^\tau \|\Delta\widetilde{u}_k\|_{\partial G}^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^\tau \|\Delta\widetilde{u}_{k+1}\|_{\partial G}^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{gathered} \tag{22}$$

Здесь $\|v\|_{\partial G}^2 = \int\limits_{\partial G} |v(x)|^2\, dx$. Используя известное неравенство (см. [4])

$$\|v\|_{\partial G}^2 \leqslant \varepsilon \|v_x\|^2 + c_\varepsilon \|u\|^2, \tag{23}$$

получаем, что

$$\begin{gathered}
|J_3(\tau)| \leqslant (2L_4N + \bar{d} + \mu_3) \left(\int\limits_0^\tau \left(\varepsilon \|\Delta\widetilde{u}_{k,x}\|^2 + C(\varepsilon) \|\Delta\widetilde{u}_k\|^2\right) dt\right)^{\frac{1}{2}} \times\\
\times \left(\int\limits_0^\tau \left(\varepsilon \|\Delta\widetilde{u}_{k+1,x}\|^2 + C(\varepsilon) \|\Delta\widetilde{u}_{k+1}\|^2\right) dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{gathered} \tag{24}$$

Для оценки интеграла $J_4(\tau)$ достаточно воспользоваться неравенствами (10),(23). В результате получим

$$|J_4(\tau)| \leqslant L_5 \left(\int\limits_0^\tau \left(\varepsilon \left\| \Delta \widetilde{u}_{k,x} \right\|^2 + C(\varepsilon) \left\| \Delta \widetilde{u}_k \right\|^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\int\limits_0^\tau \left(\varepsilon \left\| \Delta \widetilde{u}_{k+1,x} \right\|^2 + C(\varepsilon) \left\| \Delta \widetilde{u}_{k+1} \right\|^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Оценим, наконец, интеграл $J_5(\tau)$. В силу ограничений, наложенных на функции $h(u), \varphi(\xi, x, t)$, легко убедиться в справедливости следующих соотношений

$$\left| \int\limits_{\partial G} \int\limits_{\partial G} \left[h(Pu(\xi,t)) - h(Pu_k(\xi,t)) \right] \Delta u_{k+1} e^{-2\lambda t} \varphi(\xi,x,t) d\xi dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant L_5 \left(\int\limits_{\partial G} \int\limits_{\partial G} \left| Pu(\xi,t) - Pu_k(\xi,t) \right|^2 \left| \varphi(\xi,x,t) \right| e^{-2\lambda t} d\xi dx \right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\partial G} \int\limits_{\partial G} \left| \varphi(\xi,x,t) \right| \left| \Delta u_{k+1}(x,t) \right|^2 e^{-2\lambda t} d\xi dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= L_5 \left(\int\limits_{\partial G} \left| Pu(\xi,t) - Pu_k(\xi,t) \right|^2 \widetilde{\varphi}(\xi,t) e^{-2\lambda t} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\partial G} \left| \widetilde{\varphi}(x,t) \right| \left| \Delta u_{k+1}(x,t) \right|^2 e^{-2\lambda t} d\xi dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant L_5 C_2 \left\| \Delta \widetilde{u}_k \right\|_{\partial G} \left\| \Delta \widetilde{u}_{k+1} \right\|_{\partial G}.$$

Вновь, используя неравенство (23), получаем

$$|J_5(\tau)| \leqslant L_5 C_2 \left(\int\limits_0^\tau \left(\varepsilon \left\| \Delta \widetilde{u}_{k,x} \right\|^2 + C(\varepsilon) \left\| \Delta \widetilde{u}_k \right\|^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\int\limits_0^\tau \left(\varepsilon \left\| \Delta \widetilde{u}_{k+1,x} \right\|^2 + C(\varepsilon) \left\| \Delta \widetilde{u}_{k+1} \right\|^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

Введем вспомогательную норму в $W_2^1(G)$

$$\|v\|_\lambda^2 = \mu_1 \|v_x\|^2 + (\lambda + \mu_2) \|v\|^2, \lambda \geq 0.$$

Тогда очевидно, что

$$\|v\| \leqslant (\lambda + \mu_2)^{-\frac{1}{2}} \|v\|_\lambda, \ \|v_x\| \leqslant \mu_1^{-\frac{1}{2}} \|v\|_\lambda^2.$$

Учитывая последние неравенства, оценки (19)–(21) и обозначая $|||v|||_{\lambda\tau}^2 = \int\limits_0^\tau \|v\|_\lambda^2 dt$, получим

$$|J_{1,1}(\tau)| \leqslant K_1 (\lambda + \mu_2)^{-\frac{1}{2}} |||\Delta \widetilde{u}_k|||_{\lambda\tau} |||\Delta \widetilde{u}_{k+1}|||_{\lambda\tau} \tag{27}$$

$$|J_{1,2}(\tau)| \leqslant \bar{\bar{\theta}} |||\Delta u_k|||_{\lambda\tau} |||\Delta \widetilde{u}_{k+1}|||, \tag{28}$$

$$|J_2(\tau)| \leqslant K_2(\lambda) (\lambda + \mu_2)^{-\frac{1}{2}} |||\Delta \widetilde{u}_k|||_{\lambda\tau} |||\Delta \widetilde{u}_{k+1}|||, \tag{29}$$

где $K_1 = (L_1 + \mu_1)C_1\mu_1^{-\frac{1}{2}}$, $K_2(\lambda) = (L_2C_1 + \mu_2)(\lambda + \mu_2)^{-\frac{1}{2}} + L_3\mu_1^{-\frac{1}{2}}$.
Обозначим $q = 1 - \theta$ и выберем ε настолько малым, что

$$(2L_4N + \mu_3 + L_5(1 + C_2))\varepsilon \leqslant \frac{1}{4}q. \tag{30}$$

Далее, выбирая $\lambda \geq C(\varepsilon)\mu_1\varepsilon^{-1}$ и учитывая оценки (24)–(26), получаем оценку

$$\sum_{i=3}^{5} |J_i(\tau)| \leqslant \frac{1}{4}q\, |||\Delta\widetilde{u}_k|||_{\lambda\tau}\, |||\Delta\widetilde{u}_{k+1}|||_{\lambda\tau}\,. \tag{31}$$

В случае необходимости, увеличивая λ, можно считать выполненным неравенство

$$(K_1 + K_2(\lambda))(\lambda + \mu_2)^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{4}\, q. \tag{32}$$

Тогда получаем, что

$$\sum_{i=3}^{5} |J_i(\tau)| \leqslant \theta_1\, |||\Delta\widetilde{u}_k|||_{\lambda\tau}\, |||\Delta\widetilde{u}_{k+1}|||_{\lambda\tau}\,, \tag{33}$$

где $0 < \theta_1 = \theta + \frac{1}{2}\, q < 1$.
Из условия I следует, что

$$\|\rho\Delta\widetilde{u}_{k+1}(x,\tau)\| \geq \rho_1\, \|\Delta\widetilde{u}_{k+1}(x,\tau)\|\,.$$

Принимая во внимание последнее неравенство и соотношение (18), получаем

$$\frac{1}{2}\rho_1\, \|\Delta\widetilde{u}_{k+1}(x,\tau)\|^2 + |||\Delta\widetilde{u}_{k+1}|||^2_{\lambda\tau} \leqslant \theta_1\, |||\Delta\widetilde{u}_k|||_{\lambda\tau}\, |||\Delta\widetilde{u}_{k+1}|||_{\lambda\tau}\,. \tag{34}$$

Откуда следует, что

$$|||\Delta\widetilde{u}_{k+1}|||_{\lambda\tau} \leqslant \theta_1^{k+1}\, |||\Delta\widetilde{u}_0|||_{\lambda\tau}\,,\ \forall\tau \in (0,T],$$

и

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{2}}\, ||\Delta u_{k+1}(x,\tau)|| \leqslant \theta_1^{k+1}\, |||\Delta\widetilde{u}_0|||_{\lambda\tau}\,,\ \forall\tau \in (0,T].$$

Из последних неравенств следует, что

$$\operatorname*{vraimax}_{t\in(0,T]} \|\Delta\widetilde{u}_k(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\theta_1^k\, ||\Delta\widetilde{u}_0||_{\lambda T}\,,$$

поэтому

$$\operatorname*{vraimax}_{t\in(0,T]} \|\Delta\widetilde{u}_k(t)\| + |||\Delta\widetilde{u}_k|||_{\lambda T} \leqslant \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\right)\theta_1^k\, ||\Delta\widetilde{u}_0||_{\lambda T}\,. \tag{35}$$

Можно считать, что $\lambda + \mu_2 \geq \mu_1$, тогда $\|v\|^2_{\lambda T} \geq \mu_1\, \|v\|^2_{W_2^1(G)}$ и

$$|||v|||^2_{\lambda T} \geq \mu_1 \int\limits_0^T \|v(t)\|^2_{W_2^1(G)}\, dt = \mu_1\, \|v\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(G))}\,.$$

Учитывая неравенства

$$\operatorname*{vraimax}_{t\in(0,T]} \|\widetilde{v}(t)\| \geq e^{-\lambda T}\operatorname*{vraimax}_{t\in(0,T]} \|v(t)\|\,,$$
$$|||\widetilde{v}(t)|||_{\lambda T} \geq e^{-\lambda T}\mu_1^{\frac{1}{2}}\, \|v\|_{L_2(0,T;W_2^1(G))}\,,$$
$$|||\widetilde{v}|||_{\lambda T} \leqslant |||v|||_{\lambda T} \leqslant (\lambda + \mu_2)^{\frac{1}{2}}\, \|v\|_V\,,$$

получаем

$$\operatorname*{vraimax}_{t\in(0,T]} \|\Delta\widetilde{u}_k(t)\| + |||\Delta\widetilde{u}_k|||_{\lambda T} \geq e^{-\lambda T}\min[1, \mu_1^{\frac{1}{2}}]\|\Delta u_k\|_V,$$
$$|||\Delta\widetilde{u}_0|||_{\lambda T} \leqslant (\lambda + \mu_2)^{\frac{1}{2}}\, \|\Delta u_0\|_V\,.$$

Далее фиксируем параметр λ, удовлетворяющий условиям (31), (32) и условию $\lambda+\mu_2 \geq \mu_1$. Учитывая два последних неравенства и неравенство (35), получим доказываемое неравенство (14).

Докажем единственность решения задачи (1), (3) при условии, что существует решение $u \in G^1(\overline{Q})$. Предположим, что кроме решения u существует решение $v(x,t) \in V$, удовлетворяющее ограничению (4). Тогда u и v удовлетворяют соотношениям вида (15), (16), в которых $u_{k+1} = u_k = v$. В этом случае неравенство (34) для $\Delta\tilde{u} = \tilde{u} - \tilde{v}$ примет вид

$$\frac{1}{2}\rho_1 \left\|\Delta\widetilde{u}(x,t)\right\| + |||\Delta\widetilde{u}|||^2_{\lambda\tau} \leqslant \theta_1 \, |||\Delta\widetilde{u}|||^2_{\lambda\tau} \, , \ \forall\tau \in (0,T] \, .$$

Откуда следует, что $\Delta\widetilde{u} = (u-v)e^{-\lambda t} = 0$ почти всюду в Q.

4. Априорная оценка классического решения

Для применения итерационного процесса 11–13 необходимо задать ограничения сверху и снизу для решения задачи 1–3. В работе [1] получена оценка слабого решения в $L_\infty(\overline{Q})$ задачи вида (1) – (3), где $b_0(x,t,u,u_x) \equiv 0$, $d(x,t,u) \equiv 0$. Однако эти оценки содержат неявно заданные константы, что не позволяет использовать их в предлагаемом итерационном методе.

Для классического решения, то есть решения непрерывного в $\overline{Q}_T$, имеющего непрерывные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ в Q_T и $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ в $Q_T \cup S_T$, можно найти явную и более точную оценку.

Далее будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1^0. $a_{ij}(x,t,u)\xi_i\xi_j \geq 0 \ \forall (x,t) \in \overline{Q}_T, u \in R^1, \xi \in R^n$;
производные $\dfrac{\partial a_{ij}(x,t,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial a_{ij}(x,t,u)}{\partial u}$ непрерыны и ограничены в любом ограниченном цилиндре $Z_N = \overline{Q}_T \times [-N,N]$;

2^0. Функцию $b(x,t,u,u_x)$ можно представить в виде

$$b(x,t,u,u_x) = b_i(x,t,u,u_x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(x,t,u)u,$$

где

$$b_0(x,t,u) \geq C_b + \overline{C}_b \, |u|^{\alpha_1} \, \forall (x,t) \in \overline{Q}_T, u \in R^1, \tag{36}$$

где $C_b \in R^1, \overline{C}_b$ и $\alpha_1 \geq 0$;

3^0.

$$d(x,t,u) \geq C_d + \overline{C}_d \, |u|^{\alpha_2} \, \forall (x,t) \in \overline{S}_T, u \in R^1, \tag{37}$$

где C_d и $\overline{C}_d \geq 0$;

4^0. Функция $\varphi(\xi,x,t)$ удовлетворяет условиям VI, где $C_2 < 1$;

5^0. Функция $h(u)$ задана на R^1, непрерывна, не убывает и удовлетворяет условию

$$|h(u)| \geq C_h \, |u|^{\alpha_3} \ \ \forall u \in R^1, \tag{38}$$

где $C_h \geq 0$;

6^0. $C_d + \overline{C}_d + C_h > 0$.

Запишем уравнение (1) в виде

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} - a_{ij}\left(t,x,u\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + B_i(x,t,u,u_x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b\left(x,t,u,\right)u = f(x,t),$$

где

$$B_i(x,t,u,u_x) = b_i(x,t,u,u_x) - \frac{\partial a_{ij}(x,t,u)}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Перейдем от функции $u(x,t)$ к функции $v(x,t) = u(x,t)e^{-\lambda t}$. Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}-a_{ij}\left(t,x,u\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+B_i(x,t,u,u_x)\frac{\partial v}{\partial x_j}+\left(b\left(x,t,u,\right)+\lambda\right)v=f(x,t)e^{-\lambda t},$$

и условиям

$$a_{ij}\left(t,x,u\right)\frac{\partial v}{\partial x_j}\cos(\vec{n},x_i)+d\left(x,t,u\right)v+h\left(u\left(x,t\right)\right)e^{-\lambda t}-$$
$$-e^{-\lambda t}\int\limits_{\partial G}h\left(u\left(\xi,t\right)\right)\varphi\left(\xi,x,t\right)d\xi=ge^{-\lambda t}.$$

Пусть неотрицательный максимум функции v в области $\overline{Q}_{t_1}=\overline{G}\times[0,t_1]$ достигается в точке $(x_0,t_0)\in G\times[0,t_1]$, тогда, учитывая условие (36), получаем

$$(C_b+\lambda)v(x_0,t_0)+\overline{C}_b\left|u(x_0,t_0)\right|^{\alpha_1}v(x_0,t_0)\leqslant f(x_0,t_0)e^{-\lambda t}. \tag{39}$$

Далее будем считать, что $\lambda>-C_b$, и условимся обозначать символом $g_+(y)\,(g_-(y))$ функцию, равную $g(y)$, если $g(y)\geq 0$ $(g(y)\leqslant 0)$ и $g_+(y)=0\,(g_-(y)=0)$, если $g(y)<0$ $(g(y)>0)$. Введем обозначение

$$l_+(x,t,\lambda)=\min\left[\frac{f_+(x,t)}{C_b+\lambda},\ \left(\frac{f_+(x,t)}{\overline{C}_b}\right)^{1/(\alpha_1+1)}\right], \tag{40}$$

если $\overline{C}_b=0$, то $l_+=f_+/(C_b+\lambda)$. Учитывая неравенство (39), получаем

$$v(x_0,t_0)\leqslant l_+(x_0,t_0,\lambda)e^{-\lambda t}.$$

Пусть неотрицательный максимум достигается в точке $(x_0,t_0)\in S_{t_1}$, тогда в этой точке вектор v_x имеет направление внешней нормали, поэтому в силу положительной определенности матрицы A

$$a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cos(\vec{n},x_i)\geq 0.$$

Заметим еще, что из неравенства $v(x_0,t_0)\geq v(\xi,t_0)\ \forall\xi\in G$ следует неравенство $u(x_0,t_0)\geq u(\xi,t_0)\ \forall\xi\in G$.
Учитывая краевое условие (2), получаем, что

$$d(x_0,t_0,u(x_0,t_0))v(x_0,t_0)+e^{-\lambda t}\left(h(u(x_0,t_0))-\int\limits_{\partial G}h(u(\xi,t_0))\varphi(\xi,x_0,t_0)d\xi\right)\leqslant$$
$$\leqslant g(x_0,t_0)e^{-\lambda t}. \tag{41}$$

Принимая во внимание условия $4^0,5^0$, получаем

$$h(u(x_0,t_0))-\int\limits_{\partial G}h(u(\xi,t_0))\varphi(\xi,x_0,t_0)d\xi=\int\limits_{\partial G}\left[h(u(x_0,t_0))-h(u(\xi,t_0))\right]\times$$
$$\times\varphi(\xi,x_0,t_0)d\xi+h(u(x_0,t_0))\left(1-\int\limits_{\partial G}\varphi(\xi,x_0,t_0)\right)\geq(1-C_2)h(u(x_0,t_0)).$$

Воспользовавшись неравенствами (37), (38), получаем

$$\left(C_d+\overline{C}_d e^{\alpha_2\lambda t_0}v^{\alpha_2}(x_0,t_0)\right)v(x_0,t_0)+(1-C_2)e^{-\lambda t}C_h e^{\alpha_3\lambda t_0}v^{\alpha_3}(x_0,t_0)\leqslant ge^{-\lambda t_0}.$$

Откуда получаем

$$C_d v(x_0,t_0)+\overline{C}_d e^{\alpha_2\lambda t_0}v^{(\alpha_2+1)}(x_0,t_0)+(1-C_2)e^{-\lambda t}C_h e^{(\alpha_3-1)\lambda t_0}v^{\alpha_3}(x_0,t_0)\leqslant ge^{-\lambda t_0}. \tag{42}$$

Полагаем

$$m_+(x,t)=\min\left[\frac{g_+}{C_d},\left(\frac{g_+}{\overline{C}_d}\right)^{1/(\alpha_2+1)},\left(\frac{g_+}{C_h(1-C_2)}\right)^{1/\alpha_3}\right]. \tag{43}$$

Тогда из (44) следует оценка

$$v(x_0,t_0) \leqslant m_+(x_0,t_0)e^{-\lambda t_0}.$$

Очевидно, что если положительный максимум достигается в точке $(x_0,0)$, то $v(x_0,0)=u(x_0,0)=u^0(x_0)$. Таким образом, во всех случаях справедлива оценка

$$\max_{Q_{t_1}} v(x,t) \leqslant \max\left[\max_G u_{+(x)}, \max_{S_{t_1}} m_+(x,t)e^{-\lambda t}, \max_{Q_{t_1}} l_+(x,t)e^{-\lambda t}\right].$$

Откуда следует оценка сверху

$$u(x,t_1) \leqslant e^{\lambda t_1}\max\left[\max_G u^0_+(x), \max_{S_{t_1}} m_+(x,t)e^{-\lambda t}, \max_{Q_{t_1}} l_+(x,t,\lambda)e^{-\lambda t}\right].$$

Аналогичным образом получаем оценку снизу неположительного минимума

$$u(x,t_1) \geq e^{\lambda t_1}\min\left[\min_G u^0_-(x), \min_{S_{t_1}} m_-(x,t)e^{-\lambda t}, \min_{Q_{t_1}} l_-(x,t,\lambda)e^{-\lambda t}\right], \tag{44}$$

где

$$l_-(x,t,\lambda) = \max\left[\frac{f_-(x,t)}{C_b+\lambda}, -\left(\frac{|f_-(x,t)|}{\overline{C}_h}\right)^{1/(\alpha_1+1)}\right] \tag{45}$$

$$m_-(x,t) = \max\left[\frac{g_-(x,t)}{C_d}, -\left(\frac{|g_-(x,t)|}{\overline{C}_d}\right)^{1/(\alpha_2+1)}, -\left(\frac{|g_-(x,t)|}{C_h(1-C_2)}\right)^{1/\alpha_3}\right] \tag{46}$$

Таким образом установлено следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1) – (3) и пусть выполнены условия 1^0-6^0. Тогда для решения $u(x,t)$ при любом $t_1\in[0,T]$ справедливы оценки*

$$\sup_{\lambda>C_b} e^{\lambda t_1}\min\left[\min_G u^0_-(x), \min_{S_{t_1}} m_-(x,t)e^{-\lambda t}, \min_{Q_{t_1}} l_-(x,t,\lambda)e^{-\lambda t}\right] \leqslant$$

$$\leqslant u(x,t_1) \leqslant \inf_{\lambda>C_b} e^{-\lambda t}\max\left[\max_G u^0_+(x), \max_{S_{t_1}} m_+(x,t)e^{-\lambda t}, \max_{Q_{t_1}} l_+(x,t,\lambda)e^{-\lambda t}\right],$$

где $l_\pm(x,t,\lambda), m_\pm(x,t)$ определяется формулами (40), (45), (43), (46).

Замечание. В модели теплообмена излучением по закону Стефана-Больцмана без учета конвективного переноса тепла

$$b_i(x,t,u,u_x)\equiv 0\ (i=\overline{0,n}), d(x,t,u)\equiv 0, h(u)=\varkappa\,|u|^3\,u.$$

Функция u имеет физический смысл абсолютной температуры. При естественных предположениях, что $f\geq 0, g\geq 0, u^0\geq 0$ получим соотношения

$$l_-(x,t,\lambda)\equiv 0,\ m_-(x,t)\equiv 0,\ u^0_-\equiv 0,\ l_+(x,t,\lambda)=\frac{f(x,t)}{\lambda},\ m_+(x,t)=\left[\frac{g}{\varkappa(1-C_2)}\right]^{1/4}.$$

Тогда при любом $\lambda>0$

$$0\leqslant u(x,t_1)\leqslant e^{\lambda t_1}\max\left[\max_G u^0(x), \max_{S_{t_1}}\left(\frac{g}{\varkappa(1-C_2)}\right)^{\frac14} e^{-\lambda t}, \max_{Q_{t_1}}\frac{f}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]. \tag{47}$$

Полагая в последнем неравенстве $\lambda=\frac{1}{t_1}$, получим

$$0\leqslant u(x,t_1)\leqslant e\max\left[\max_G u^0, \max_{S_{t_1}}\left(\frac{g}{\varkappa(1-C_2)}\right)^{\frac14}, t_1\max_{Q_{t_1}} f\right]. \tag{48}$$

Если нет внутренних источников тепла, то есть $f \equiv 0$,то, устремляя λ к нулю в неравенстве (47), получим оценку

$$0 \leqslant u(x,t_1) \leqslant \max\left[\max_G u^0, \max_{S_{t_1}}\left(\frac{g}{\varkappa(1-C_2)}\right)^{\frac{1}{4}}\right]. \tag{49}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А.А. *Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальными краевыми условиями типа теплообмена излучением* // Дифференциальные уравнения. Т. 41. 2005. №1. С. 93–104.
2. Тихонов А.Н. *О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики* // Бюллетень МГУ (А). Т. 1. 1938. №8. С. 1–25.
3. Тихонов А.Н. *Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных* // Бюллетень МГУ. Сер. А. Т. 1. №9. 1938. С. 1–45.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М: Наука, 1967. 736 с.

Иосиф Иосифович Голичев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `shaig@anrb.ru`