30.03.1952-23.03.2010

Номер посвящается памяти члена редакционной коллегии „Уфимского математического журнала“ доктора физико-математических наук, профессора Бакирова Наиля Кутлужановича

Письмо в редакцию академика РАН И.А. Ибрагимова

Памяти Н.К. Бакирова.

Известие о безвременной смерти моего ученика и друга Наиля Кутлужановича Бакирова принесло мне сильную боль. Он был моим учеником, работать с которым было легко, весело и интересно, он стал моим другом, общение с которым, хотя и редкое, доставляло мне много радости.

Наиболее выдающееся научное достижение Наиля — решение ряда трудных и важных экстремальных задач теории вероятностей. Для этого он разработал эффективные общие методы, которые, по видимому, долго еще будут полезны. Эти его исследования оказались нужными и для решения ряда проблем математической статистики. Работы эти потребовали не только интуиции и таланта, но и упорства и преданности делу.

Кончина Н. К. Бакирова — тяжелая утрата для нашей теории вероятностей и большая личная потеря для меня. Я считаю большой удачей для себя учить и знать такого замечательного ученого и духовно прекрасного человека.

И. А. Ибрагимов.

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 5-7.

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ БАКИРОВА НАИЛЯ КУТЛУЖАНОВИЧА

1. Бакиров Н.К. *Локальная асимптотическая нормальность для стационарно связанных наблюдений* // ТВП. 1977. Т. 22, вып. 3. С. 662–663.
2. Бакиров Н.К. *Об отношении правдоподобия для плотностей с особенностями* // Зап. научн. сем. ЛОМИ. Исследования по статистической теории оценивания. Ленинград. Т. 74. 1977. С. 66–82.
3. Бакиров Н.К., Султанов А.Х. *О вероятности превышения уровня траекторией случайного процесса* // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 1. С. 93–95.
4. Бакиров Н.К., Султанов А.Х., Тимофеев А.А. *О восстановлении сигнала по интегральным отсчетам с учетом ошибок измерения* // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29, № 10. С. 1961–1965.
5. Бакиров Н.К. *Экстремальное свойство распределения Стьюдента* // Зап. научн. сем. ЛОМИ. Исследования по математической статистике. VII. Ленинград. 1986. Т. 153. С. 16–26.
6. Бакиров Н.К. *Уточнение асимптотики мощности квантильного критерия* Зап. научн. сем. ЛОМИ. Исследования по математической статистике. VII. Ленинград. 1986. Т. 153. С. 5–15.
7. Бакиров Н.К. *Экстремумы распределения квадратичных форм от случайных величин и связанные задачи статистики* // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 525–528.
8. Бакиров Н.К. *Центральная предельная теорема для слабозависимых случайных величин* Математические заметки. 1987. Т. 41 , вып. 1. С. 104–109.
9. Бакиров Н.К. *Экстремумы распределения статистики* S^2 // ТВП. 1988. Т. 33, вып. 1. С. 184–188.
10. Бакиров Н.К. *Неравноточный подход в проблеме Беренса-Фишера* // Зап. научн. сем. ЛОМИ, Исследования по математической статистике. VIII. Ленинград. 1988. Т. 166. С. 6–8.
11. Бакиров Н.К. *Экстремумы распределения квадратичных форм от гауссовских величин* // ТВП. 1989. Т. 34, вып. 2, С. 241–250.
12. Бакиров Н.К. *Критерии проверки непараметрических гипотез для случайных процессов* // Зап. научн. сем. ЛОМИ, Исследования по математической статистике. IX. Ленинград. 1990. Т. 184. С. 8–13.
13. Бакиров Н.К. *Одно применение леммы Неймана-Пирсона к гауссовским процессам* // Зап. научн. сем. ЛОМИ, Исследования по математической статистике. XII. Ленинград. 1993. Т. 207. С. 5–12.
14. N.K. Bakirov *An extremal property of the binomial distribution* // Mathematical methods of statistics. N.Y. 1993. V. 2, №. 2. P. 165–170.
15. N.K. Bakirov *Testing nonparametric hypothesis for multivariate data* // Mathematical methods of statistics. N.Y. 1994. V. 3, №. 3. P. 267–278.
16. Бакиров Н.К. *Свойство единственности распределения хи-квадрат* // ТВП. 1995. Т. 40, вып. 1. С. 159–165.
17. Бакиров Н.К. *Теоремы сравнения для функций распределения квадратичных форм от гауссовских величин* // ТВП. 1995. Т. 40, вып. 2. С. 404–412.

18. Бакиров Н.К. *Экстремумы функции распределения отношения двух квадратичных форм от гауссовских величин* // ТВП. 1995. Т. 40, вып. 3. С. 642–646.
19. Бакиров Н.К. *Уточнение асимптотики в принципе инвариантности Донскера-Прохорова для интегральных функционалов* // ТВП. 1995. Т. 40, вып. 4. С. 705–731.
20. Бакиров Н.К. *Свойство ЛАН для стационарных гауссовских последовательностей с вырождающейся спектральной плотностью* Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32, вып. 2. С. 68–76.
21. Бакиров Н.К. *Локальная асимптотическая нормальность для стационарных гауссовских последовательностей с вырождающейся спектральной плотностью* // Пробл. передачи информ. 1996. Т. 32, № 2. С. 68–76.
22. N.K. Bakirov *Nonhomogenuous samples in Berens-Fisher problem* // Journal of Mathematical Scienses. 1998. V. 89, №. 5. P. 1460–1467.
23. Бакиров Н.К., Султанов А.Х., Дыбленко С.В. *Использование методов поиска "разладки"в задаче различения стохастических текстур* // Автометрия. 2000. № .2. С. 46–51.
24. Бакиров Н.К., Лукманов Н.Ф. *Распределение супремума приращения винеровского процесса на отрезке* // Вестник УГАТУ. 2003. Т. 4, вып. 2. С. 84–88.
25. Бакиров Н.К., Мустафаев А.А. *Среднеквадратический тренд* // Автоматика и телемеханика. 2003. № 7. С. 143–152.
26. N.K. Bakirov, G.J. Szekely *Extremal properties for Gaussian quadratic forms* // Probability theory and related fields. 2003. V. 126, № 2. P. 184–202.
27. Бакиров Н.К. *Оптимальное свойство доверительного шара, содержащего регрессионные коэффициенты* // Вестник УГУТУ. 2006. Т. 7, № 2(15). С. 139–141.
28. Бакиров Н.К. *Коррекция формул расчета толстостенных цилиндров и сферических оболочек* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8, № 4(24). С. 3–6.
29. N.K. Bakirov, G.J. Szekely *Student's t-test for Gaussian scale mixtures* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2005. Т. 328. Часть 9. С. 5–19.
30. Бакиров Н.К., Лукманов Н.Ф. *Вероятность нахождения броуновской траектории между двумя другими* // Вестник УГАТУ. 2006. Т. 7, № 1(14). С. 133–136.
31. Бакиров Н.К., Бакиров К.Х., Макаров В.Д. *Новые геологические факты на востоке Прикаспийской впадине* // Нефть и газ. г. Алматы. № 2. 2006. С. 20–25.
32. N.K. Bakirov, G.J. Szekely *Student's t-test for Gaussian scale mixtures* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2006. Т. 328. С. 5–19.
33. N.K. Bakirov, G.J. Szekely *Student's t-test for Gaussian scale mixtures* // Journal of Mathematical Sciences. 2006. V. 139, №. 3. P. 6497–6505.
34. N.K. Bakirov, M.L. Rizzo, G.J. Szekely *A multivariate nonparametric test of independence* // Journal of Multivariate Analysis. 2006. V. 97. Issue 8. P. 1742–1756.
35. Бакиров Н.К. *Оптимальная погрешность численного интегрирования с учетом значений функции в узлах интегрирования* // Сибирский журнал вычислительной математики. 2007. Т. 10, № 1. С. 29–42.
36. G.J. Szekely, M.L. Rizzo, N.K. Bakirov *Measuring and Testing Dependence by Correlation of Distances* // The Annals of Mathematical Statistics. 2007. 35/6. P. 2769–2794.
37. N.K. Bakirov. *Correction of the formulas for calculating thick-walled cylinders and spherical shells* // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2007. V. 1, №. 2. P. 148–151.
38. N.K. Bakirov *Correction of the formulas for calculating thick-walled cylinders and spherical shells* // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2007. V. 1, №. 2. P. 148–151.

39. Бакиров Н.К., Сначев М.В., Бенинг В.Е. *Точная формула пропускной способности одноканальной СМО с отказами* // Вестник МГУ. Серия вычислительная математика и кибернетика. 2009. Т .33, № 1. С. 32–38.
40. Бакиров Н.К. *Асимптотика вероятности невыхода за криволинейную границу траектории гауссовского случайного блуждания* // Известия РАН, Серия математическая. 2009. Т. 73, № 1. С. 49–78.
41. Бакиров Н.К. *Проверка гипотез об однородности и симметричности распределений для многомерных данных* // Уфимский математический журнал. 2009. Т. 1, № 4. С. 3–23.
42. Бакиров Н.К., Галлямов И.Р. *О сравнении формул численного интегрирования* // Известия высших учебных заведений. Математика. № 12. 2010. Принята в печать.
43. Бакиров Н.К., Секеи Г. *Brownian covariance and CLT for stationary sequences* // ТВП. 35 с. Принята в печать.
44. Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А. *Асимптотическое поведение вариограммы в нуле (Модель Черный шум)* // Уфимский математический журнал. Т. 2, № 3. С. 8–14.
45. Бакиров Н.К., Сначев М.В. *Тест: растет ли интенсивность потока заявок в СМО?* // Уфимский математический журнал. Т. 2, № 3. С. 15–28.
46. Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А. *Новые подходы в теории геостатистического моделирования* // Вестник УГАТУ. 2010. Т. 14. № 2(37). С. 209–215.

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 8-14.

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВАРИОГРАММЫ В НУЛЕ (МОДЕЛЬ ЧЕРНЫЙ ШУМ)

В.А. БАЙКОВ, Н.К. БАКИРОВ , А.А. ЯКОВЛЕВ

Аннотация. Известно, что большую роль в топологии и геометрии стационарных гауссовых случайных полей играет вторая производная ковариации в нуле. Исходя из внешней информации о реализации случайной функции в прикладных науках возникает вопрос ее учета, в частности, по средством задания степенного поведения в нуле. В данной работе предложена модель, обеспечивающая заданное асим-тотическое поведение.

Ключевые слова: геостохастическое моделирование, спектральная теория стационарных случайных полей, эйлерова характеристика, фрактальная размерность.

1. Введение

На практике, ввиду неполноты знания о системе и возможной противоречивости входной информации, для воспроизведения реальности необходим вероятностный подход (см, например,[1, 2, 3, 4, 5, 6]). При моделировании случайных полей, как правило, используют (1) Гауссово моделирование, (2) спектральную теорию, (3) Байесовский подход. Однако предполагается знание случайного поля (с вероятностной точки зрения), а именно для моделирования стационарных Гауссовых случайных полей необходимо знание математическиго ожидания и ковариации.

Большую роль при моделировании стационарных гауссовых случайных полей играет вторая производная ковариации в нуле. А именно, в геометрии случайных полей известно, что среднее Эйлеровой характеристики ϕ множества экскурсии $A_u = A_u(X_t, T) = \{X_t \in T : x_t \geq u\}$, ($x_t$ — реализация случайного поля X_t) $u \in R$, $T = \oplus_{i=1}^{N} T_i$, $T_i \subset R$ (T — прямоугольная область из R^N) процесса $\{X_t\}_{t \in T}$ можно определить [7] по формуле

$$E\{\phi(A_u)\} = e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \sum_{k=1}^{N} \sum_{J \in Q_k} \frac{|J||\Lambda_J|^{1/2}}{(2\pi)^{\frac{k+1}{2}} \sigma^k} H_{k-1}\left(\frac{u}{\sigma}\right) + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right), \tag{1}$$

где $J_k = J_k(T)$ — число $2^{N-k} C_N^k$ граней объекта размерности k в T; $H_n(x)$ — полиномы Эрмита; переменная Q_k определяет C_N^k элементов J_k, которые содержат нулевую точку; k−мерный объем $|J|$ некоторого $J \in J_k$ определяется как $|J| = \prod_{i \in \sigma(J)} T_i$; Λ — матрица спектральных моментов второго порядка. Отметим, что эта формула справедлива только в случае существования спектральных моментов второго порядка, которые, в свою очередь, определяются второй производной от ковариационной функции в нуле (см, например, [8]), и это существенно ввиду использования при доказательстве теории Морса. В случае линейного поведения ковариации в нуле (вторые производные не существуют) также определены оценки экскурсии, например, ее средних размеров [9].

V.A. Baikov, N.K. Bakirov, A.A. Yakovlev, Asymptotic behaviour of the variogramm in the zero.

Поступила 7 июня 2010 г.

Связь поведения ковариации в нуле с естественными процессами отмечали многие исследователи. Барроу [10] провел анализ обширного ряда измерений параметров окружающей среды и получил оценки фрактальных размерностей различных процессов. Например, фрактальная размерность содержания натрия в почве — от 1,7 до 1,9, камней — от 1,1 до 1,8. Установлено, что фрактальная размерность выражается как $D = 2 - H$, где H есть показатель степени пропорциональности дисперсии приращения случайного процесса к разности координат: $V(\Delta x) \approx |\Delta x|^{2H}$, другими словами, пропорциональности разности дисперсии и ковариации в нуле.

Данная работа посвящена обеспечению заданного степенного поведения ковариационной функции в нуле моделью степенных хвостов спектральной плотности $f(\lambda) = \lambda^{-\beta}$. Такая модель в одномерном случае часто называется *шумом*. Среди шумов различают белый шум со спектральным показателем $\beta = 0$, коричневый шум со спектром мощности, пропорциональным λ^{-2}, розовый шум со спектром λ^{-1} и черный шум, пропорциональный $\lambda^{-\beta}$, где $\beta > 2$.

Черные шумы описывают развитие во времени многих природных и искусственных катастроф, таких как наводнения, засухи, рынки с тенденцией к понижению курсов и различные аварийные ситуации — например, перебои в электроэнергии [11].

Поскольку данная работа имеет непосредственное прикладное значение, и мы работаем с реальными данными, нам необходима удобная мера устойчивости статистического явления, которой, на наш взгляд, является показатель Херста, определяемый как $H = ln(R/S)/ln(\Delta t)$. R/S есть *нормированный размах*, который по существу представляет собой размах $R(\Delta t)$ данных на временном интервале Δt (после вычитания любого линейного тренда), деленный на стандартное отклонение выборки $S(\Delta t)$ [12, 13]. Отметим, что между показателем Херста и спектральным показателем β существует простое отношение[11] $\beta = 2H + 1$.

2. Модель степенных хвостов

Рассмотрим стационарное случайное поле $\{X_t\}_{t\in T\subset R^2}$. Предположим, что выполнено условие эргодичности и известны значения реализации $\{x_t\}_{t\in T_k\subset T}$ случайного поля $\{X_t\}_{t\in T\subset R^2}$, для дискретного $T_k \subset T$. Предположим также, что существует характерный шаг дискретизации Δ множества T_k, а именно, для любого $t \in T_k$ существует $\epsilon > 0 : \Delta - \epsilon < \min_{t_1\in T} |t - t_1| < \Delta + \epsilon$ и выполнено $T \subset \bigcup_{t\in T_k} U_{\Delta+\epsilon}(t)$.

Таким образом, мы имеем можем говорить об отсутствии входной информации на масштабе от 0 до Δ. Данный масштаб заполняется внешней информацией о системе (поведение ковариационной функции в нуле), исходя из ее топологии, фрактальных свойств и др.

При оценивании спектральной плотности одномерного стационарного случайного поля $X(t)$ с нулевым средним, заданного на области $D \subset R^2$, традиционно используется периодограмма:

$$I_D(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2|D|}\left|\int\limits_D e^{-i(t,\lambda)}X(t)\,dt\right|,$$

где $|D|$ — площадь области D. Известно, что если спектральная плотность распределения $f(\lambda)$ непрерывна в точке λ_0, то тогда при неограниченном расширении области D

$$EI_D(\lambda_0) \to f(\lambda_0).$$

Известно, что периодограмма $I_D(\lambda)$ не является состоятельной оценкой спектральной плотности, однако, линейные интегральные функционалы от нее состоятельно оценивают аналогичные линейные интегральные функционалы от спектральной плотности.

Непосредственное вычисление периодограммы в нашем случае невозможно, поэтому мы приближаем векторную периодограмму соответствующей интегральной суммой следующего вида:

$$\hat{I}_D(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2|D|}\left(\sum_{k=1}^{N}\eta(x_k)\int\limits_{D_k} e^{-i(x,\lambda)}\,dx\right)\times\left(\overline{\sum_{k=1}^{N}\eta(x_k)\int\limits_{D_k} e^{-i(x,\lambda)}\,dx}\right)^T, \tag{2}$$

где D_k, $k = 1,\ldots,N$ – суть некоторые подобласти области D (разбиение Вороного), с $x_k \in D_k$. Причем данная оценка периодограммы справедлива в интервале $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, где $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi\Delta}$ — частота Найквиста, определяемая из следующего соображения: наименьшая длина волны, которую мы можем себе позволить оценивать по имеющимся данным, вдвое больше наименьшего расстояния между данными.

Пусть $f(x)$ — спектральная плотность случайного поля X_t. Положим, что $\int\limits_{R^2} f(\lambda)\,d\lambda = 1$. Согласно теореме Бохнера-Хинчина ковариационная функция является преобразованием Фурье спектральной плотности. Обозначим $\gamma(\lambda) = \int\limits_{R^2}\left(1 - e^{i(h,\lambda)}\right)f(\lambda)\,d\lambda$.

Задача заключается в обеспечении асимптотики $\gamma(h) \sim h^{2H}$, $|h| \to 0$, $H \in (0,1)$ моделью степенных хвостов для $f(\lambda)$ — спектральной плотности распределения стационарного процесса X_t. Итак, запишем спектральное представление

$$\gamma(h) = \int\limits_{R^2}(1 - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{|\lambda|\le\lambda_0}(1 - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{|\lambda|>\lambda_0}(1 - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda = A_1 + A_2,$$

где λ_0 – частота Найквиста.

Функцию $f(\lambda)$ представим в виде $f(\lambda) = \begin{cases} f_1(\lambda) & |x| \leqslant \lambda_0 \\ f_2(\lambda) & |x| \geq \lambda_0 \end{cases}$, где f_1 — спектральная плотность на множестве $\{\lambda \in R^2 : |\lambda| \leqslant \lambda_0\}$, оцениваемая с помощью соответствующей периодограммы (2), $f_2(\lambda)$ — предлагаемая модель тяжелых хвостов. Далее вычисляем интеграл A_1. Ясно, что

$$A_1 = \int\limits_{|\lambda|\le\lambda_0}(1 - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{|\lambda|\le\lambda_0}(1 + i(h,\lambda) - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda,$$

ввиду центральной симметричности $f(\lambda)$. С другой стороны,

$$|1 + i(h,\lambda) - e^{i(h,\lambda)}| \leqslant \frac{|h|^2|\lambda^2|}{2}, \qquad \forall\, h, \lambda,$$

и, стало быть,

$$|A_1| \leqslant C_0|h|^2, \qquad C_0 = \int\limits_{|\lambda|\le\lambda_0}|\lambda|^2\,d\lambda.$$

На множестве $\{\lambda \in R^2 : |\lambda| \leqslant \lambda_0\}$ для учета необходимого поведения функции $\gamma(h)$ вблизи нуля (учет фрактальных и топологических свойств реализации случайного поля) определим

$$f_2(\lambda) = \frac{C_1}{|\lambda|^{2+\alpha}}, \qquad \alpha > 0,$$

то есть спектральная плотность имеет тяжелый степенной хвост.

Покажем, что такое определение $f_2(\lambda)$ обеспечит нам необходимую асимптотику A_2 в нуле, то есть при $|h| \to 0$. Обозначим через S_r окружность радиуса r с центром в начале координат. Переходя в полярную систему коортдинат, получим

$$A_2 = C_1 \int\limits_{\lambda:|\lambda|>\lambda_0} \frac{1-e^{i(h,\lambda)}}{|\lambda|^{2+\alpha}}\, d\lambda = C_1 \int\limits_{\lambda_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{2+\alpha}} \int\limits_{S_r} (1-e^{i(h,\lambda)})\, ds. \tag{3}$$

Функцией Бесселя первого рода нулевого порядка называется функция $J_0(x)$ вида [14]

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ix\sin\phi}\, d\phi. \tag{4}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{S_r} (1-e^{i(h,\lambda)})\, ds = r \int\limits_0^{2\pi} 1 - e^{i[h_1|r|\sin\phi + h_2|r|\cos\phi]}\, d\phi.$$

Переходя в полярные координаты $h_1 = |h|\sin\psi$, $h_2 = |h|\cos\psi$, $|h| = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$, имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{S_r} (1-e^{i(h,\lambda)})\, ds = r \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - e^{i|r||h|(\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\cos\phi)}\right)\, d\phi = \\ = r\int\limits_0^{2\pi} \left(1-e^{i|r||h|\cos(\psi-\phi)}\right)\, d\phi = \left|\psi-\phi = \frac{\pi}{2} - \acute{\phi}\right| = r\int\limits_0^{2\pi}\left(1-e^{i|r||h|\sin\acute{\phi}}\right)\, d\phi = \\ = r\left(2\pi - 2\pi J_0(|r||h|)\right).\end{gathered} \tag{5}$$

Хорошо известно, что $J_0(x)$ представима в виде [15]

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k (k!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4), \qquad x \to 0. \tag{6}$$

Итак, учитывая (3)–(6), получаем для $0 < \alpha < 2$

$$A_2 = 2\pi C_1 \int\limits_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1-J_0(r|h|)}{r^{1+\alpha}}\, dr.$$

Применяя замену переменных $r|h| = y$, получаем

$$A_2 = |h|^{\alpha} 2\pi C_1 \int\limits_{\lambda_0|h|}^{\infty} \frac{1-J_0(y)}{y^{1+\alpha}}\, dy = C_2|h|^{\alpha}(1+o(1)), \qquad h \to 0,$$

$$C_2 = 2\pi C_1 \int\limits_0^{\infty} \frac{1-J_0(y)}{y^{1+\alpha}}\, dy.$$

Здесь мы учли сходимость интеграла в определении константы C_2, справедливую ввиду (6) и ограниченности функции Бесселя: $|J_0(y)| \leqslant 1$, $\forall y$.

Из последней формулы следует, что

$$\alpha = 2H.$$

Следовательно, учет тяжелых хвостов спектральной плотности $f(\lambda)$ при построении стационарного случайного гауссова поля сведется к учету дополнительного стохастического интеграла

$$C_1 \int_{|\lambda|>\lambda_0} e^{i(h,\lambda)} d\Phi(\lambda) = C_1 \int_{\lambda_1>|\lambda|>\lambda_0} e^{i(h,\lambda)} d\Phi(\lambda) +$$

$$+ C_1 \int_{|\lambda|>\lambda_1} e^{i(h,\lambda)} d\Phi(\lambda) = B_1 + B_2,$$

где величину λ_1 выбираем из условия малости отношения дисперсий

$$\frac{DB_2}{D(B_1+B_2)} = \frac{\int_{|\lambda|>\lambda_1} f(\lambda) d\lambda}{\int_{|\lambda|>\lambda_0} f(\lambda) d\lambda} =$$

$$= \frac{\int_{|\lambda|>\lambda_1} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2+\alpha}}}{\int_{|\lambda|>\lambda_0} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2+\alpha}}} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{\alpha} = \varepsilon, \quad \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_0 \varepsilon^{-1/\alpha}.$$

Например, при $\alpha = 1, \varepsilon = 1/20$ получаем $\lambda_1 = 20\lambda_0$. При этом для подсчета соответствующих стохастических интегралов мы можем использовать следующее представление

$$\int_{\lambda_1>|\lambda|>\lambda_0} e^{i(t,\lambda)} d\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(t),$$

$$\xi_k(t) = \int_{z_{k+1}>|\lambda|>z_k} e^{i(t,\lambda)} d\Phi(\lambda), \qquad \lambda_0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_N = \lambda_1,$$

где случайные процессы $\xi_k(t), k = 0, 1, \ldots, N-1$ независимы и имеют гауссовское распределение ввиду того, что случайная мера $d\Phi(\lambda)$ в соответствии с общей теорией гауссовская и имеет независимые приращения. Ясно, что $E\xi_k(t) = 0$ и

$$Cov(\xi_k(t), \xi_k(s)) = \int_{z_{k+1}>|\lambda|>z_k} e^{i(t-s,\lambda)} f(\lambda) d\lambda =$$

$$= 2\pi C_1 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{J_0(r|t-s|)}{r^{1+\alpha}} dr \approx 2\pi C_1 (z_{k+1} - z_k) \frac{J_0(r_k|t-s|)}{r_k^{1+\alpha}}, \qquad r_k = \frac{z_k + z_{k+1}}{2}.$$

Выберем в качестве z_k равномерное разбиение отрезка $[\lambda_0, \lambda_1]$:

$$z_{k+1} - z_k = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{N}, \qquad r_k = \lambda_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{N}.$$

Итак, если $\eta(t)$ гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $J_0(|t-s|)$, то тогда случайный процесс $\xi_k(t)$ распределен также, как и случайный процесс

$$\eta(r_k t) \sqrt{\frac{2\pi C_1 (z_{k+1} - z_k)}{r_k^{1+\alpha}}}.$$

Таким образом, сначала мы моделируем N независимых, одинаково распределенных гауссовских процессов $\eta_k(t)$ с нулевыми средними и общей ковариационной функцией $J_0(|t-s|)$, и затем используем приближенную формулу

$$\int_{\lambda_1>|\lambda|>\lambda_0} e^{i(t,\lambda)} d\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \eta(r_k t) \sqrt{\frac{2\pi C_1 (z_{k+1} - z_k)}{r_k^{1+\alpha}}}.$$

Реализации процессов $\eta_k(t)$ моделируем следующим образом

$$\eta_k(t) = \int_{S_1} e^{i(t,\lambda)} d\Phi_1(\lambda) \approx \sum_{k=0}^{2M-1} e^{i(t,\lambda_k)} \psi_k, \qquad t \in R^2,$$

$$\lambda_k = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2M}(k+\frac{1}{2})\right), \sin\left(\frac{\pi}{2M}(k+\frac{1}{2})\right)\right], \qquad \forall k,$$

где комплекснозначные случайные величины $\psi_k, k = 0, 1, ..., M-1$ независимы с нулевыми средними и дисперсиями $D\psi_k = E|\psi_k|^2 = 1/(2M)$, при этом $\psi_k = -\psi_{k+M}, k = 0, 1, ..., M-1$, тем самым

$$\eta_k(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2M}} 2Re \sum_{k=0}^{M-1} e^{i(t,\lambda_k)} \frac{u_k + iv_k}{\sqrt{2}} = \frac{Re}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} e^{i(t,\lambda_k)}(u_k + iv_k),$$

где $u_k, v_k, k \geq 0$ — совокупность независимых стандартных гауссовских величин $N(0,1)$.

Величины M, N выбираем достаточно большими.

3. Приложение в нефтяной промышленности

Тремя главными компонентами неидеальности пласта являются анизотропность, нестационарность (неоднородность), неравномерность. Эти термины могут применятся к любому свойству пласта, будь то геофизическое поле или фильтрационно-емкостные свойства. Анизотропность означает изменение свойства согласованно с углом измерения, тензорная характеристика. Стационарность предполагает, в вероятностном смысле (например, средние характеристики), инвариантность свойства к трансляциям. Неравномерность определяет постоянную изменчивость и далее будет связана со случайностью.

Учитывая сложный характер залегания коллекторов, процессов, происходящих во время и после, не вызывает никаких сомнений тот факт, что ни один из рассматриваемых пластов не является однородным. Конечно, это не означает, что всегда неравномерность является ключевым фактором, однако, ввиду введения в разработку низкопроницаемых-сильнорасчлененых коллекторов, тех, у которых дебет жидкости на скважине падает в короткий срок в пять и более раз, данный факт является одним из основных. Ясно также, что в чистом виде не встречается изотропность, и, как правило, особенно на больших масштабах, нет и стационарности.

Применяя новый подход моделирования (см. [16]) к геологическому конструированию месторождения, основанный на спектральной теории случайных полей, который позволяет строить нестационарные, анизотропные, в строгом смысле, не гауссовы случайные поля, и модель степенных хвостов, позволило в случаях низкопроницаемых коллекторов без дополнительных гипотез перейти к гидродинамическому моделированию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D.G. Krige *A statistical approach to some mine valuations and allied problems at the Witwatersrand.* Master's thesis. University of Witwatersrand. 1951.
2. G. Matheron *The theory of regionalized variables and its applications.* Fontainebelau: Center of Geostistics. 1971. 212 p.
3. G. Matheron *The intrisic random functions and their applications* // Adv. Appl. Probability. 1973. №.5. P. 439–468.
4. G. Matheron *Estimer et choisir.* Fontainebelau: Centre de Geostistique. 1978. 175 p.
5. C.V. Deutsch, A.G. Journe *GSLIB, Geostatistical software library and User's guide.* New York: Oxford university press. 1992. 340 p.
6. Дюбрюль О. *Использование геостатистики для включения в геологическую модель данных.* EAGE: Изд-во SEG. 2002. 295 с.
7. R.J. Adler, J.E. Taylor. *Random fields and their geometry.* New York: Springer Science. 2003. 288 p.
8. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. *Экстремумы случайных последовательностей и процессов.* М.: Мир. 1989. 392 с.
9. W. Robert, Jr. Ritzi *Behavior of indicator variograms and transitions probabilities in relation to the variance in lengths of hydrofacies* // Water resources research. 2000. Vol. 36, №. 11. P. 3375–3381.

10. P.A. Burrough *Fractal dimentions of landscapes and other environmental data* // Nature. 294 (1981). P. 240–242.
11. М. Шредер *Фракталы, хаос, степенные законы.* Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 528 с.
12. H.E. Hurst, R.P. Black, Y.M. Simaika *Long Term Storage: An Experimental Study.* L.: Constable. 1965.
13. B.B. Mandelbrot *Fractals and Multifractals, Selecta.* Vol. 1. N.Y.: Springer. 1991.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцентдентные функции.* Том 2. М.: Издательство «Наука». 1974. 296 с.
15. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. *Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции.* М.: Государственное издательство физико-математическсой литературы. 1963. 500 с.
16. Байков В.А., Бакиров Н.К.,Яковлев А.А. *Новые подходы в теории геостатистического моделирования* // Вестник УГАТУ: научн. журн. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-та. 2010. Т. 37. №2.

Виталий Анварович Байков,
РН-УфаНИПИнефть,
ул. Революционная, 96/2,
450078, г. Уфа, Россия
E-mail: baikov@ufanipi.ru

Наиль Кутлужанович Бакиров
ИМВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Андрей Александрович Яковлев,
РН-УфаНИПИнефть,
ул. Революционная, 96/2,
450078, г. Уфа, Россия
E-mail: YakovlevAA@ufanipi.ru, yakovlevandrey@yandex.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 15-28.

УДК 519.248

ТЕСТ: РАСТЕТ ЛИ ИНТЕНСИВНОСТЬ ПОТОКА ЗАЯВОК В СМО?

Н.К. БАКИРОВ , М.В. СНАЧЕВ

Аннотация. Рассматривается математическая модель функционирования СМО, когда в пуассоновские моменты времени поступают заявки от клиентов на обслуживание. В приложениях (например, в банковском деле или страховании) может быть актуален следующий вопрос: растет или не растет на данном промежутке времени скорость поступления заявок от клиентов. В работе предлагаются тесты для проверки соответствующей статистической гипотезы и изучаются их асимптотические свойства.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, пуассоновский поток, интенсивность потока заявок, критерий отношения правдоподобия, метод наименьших квадратов, гипотеза об однородности пуассоновского потока.

1. Введение

При анализе работы систем массового обслуживания (СМО) может возникнуть следующий вопрос: растет ли на данном промежутке времени скорость поступления заявок от клиентов. В настоящей работе предлагаются тесты для проверки соответствующей статистической гипотезы и изучаются их свойства.

Математическая модель. Рассматривается вероятностная модель функционирования СМО, когда заявки от клиентов поступают в пуассоновские моменты времени, при этом соответствующий пуассоновский процесс $\eta(t), t \in [0, \infty]$ предполагается, вообще говоря, неоднородным с параметром $\lambda(t)$, являющимся выпуклой функцией, то есть скорость поступления заявок не убывает во времени.

В частном случае мы будем предполагать, что

$$\lambda(t) = \int_0^t (A + Bs)ds = At + \frac{Bt^2}{2}, \quad A > 0. \tag{1}$$

Другими словами, на промежутке времени $[0, t]$ в СМО поступает $\eta(t)$ заявок, при этом, в случае, когда $\lambda(t) = A, B = 0$, процесс поступления заявок равномерен во времени: в среднем в единицу времени поступает A заявок, и рассматриваемый пуассоновский процесс $\eta(t)$ однороден. Если же в формуле (1) $B > 0$, то тогда среднее число заявок, поступивших в СМО на интервале времени $[0, t]$, растет с темпом

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = A + Bt,$$

то есть скорость роста количества поступающих заявок не постоянна, а пуассоновский процесс $\eta(t)$ — неоднороден. При этом вероятностный смысл параметра B раскрывается равенством:

$$B = [\lambda(T+1) - \lambda(T)] - [\lambda(T) - \lambda(T-1)], \qquad \forall T,$$

N.K. Bakirov, M.V. Snachev, The test: does the input flow intensity grow in queueing system?

Поступила 1 марта 2010 г.

иными словами, величина B равна приросту среднего числа заявок на соседних единичных интервалах времени. Если единица измерения времени равна одному дню, то тогда в рассматриваемой математической модели каждый новый день в СМО поступает на B заявок больше, чем в предыдущий день.

Исходные данные. На интервале времени $[0, T]$ фиксируются все моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$ поступления в СМО заявок от клиентов, тем самым фиксируется соответствующая траектория (реализация) пуассоновского процесса $\eta(t), t \in [0, T]$, при этом, очевидно,

$$\eta(t_k) = k, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Отметим, что величина n — количество точек t_k на отрезке времени $[0, T]$ случайно и равно $\eta(T)$. Начало периода наблюдения мы отождествляем с моментом времени $t = 0$.

Задача. По исходным данным требуется проверить нулевую гипотезу H_0 об однородности пуассоновского процесса $\eta(t), t > 0$ против альтернатив: H_{01} — о том, что скорость поступления заявок в СМО растет во времени, точнее, производная $\lambda'(t)$ не убывает с ростом t и в модели (1) — $H_{11} : B > 0$ — о том, что рассматриваемое среднее количество заявок за единичный интервал времени растет во времени с ненулевой постоянной скоростью. Отметим, что альтернативу, в соответствии с которой интенсивность поступления заявок в СМО убывает во времени, формально можно свести к случаю возрастания интенсивности, рассматривая на интервале времени $[0, T]$ процесс с обратным временем: $\eta(T) - \eta(t)$.

Задачи проверки параметрических и непараметрических гипотез для пуассоновских и других точечных процессов рассматривались в работах И.А.Ибрагимова, Р.З.Хасьминского, Р.Ш.Липцера, А.Н.Ширяева, Ю.А.Кутоянца, Ю.Н.Линькова и др., [1]–[5].

2. Критерий отношения правдоподобия

В данном параграфе определяется алгоритм вычисления статистики критерия отношения правдоподобия в случае альтернатив H_{01}, который, однако, оказывается достаточно сложным для анализа его асимптотических свойств. Мы приводим близкий к нему по своей конструкции критерий проверки H_0, для которого определяется асимптотическая значимость и доказывается состоятельность против специальных альтернатив.

Распределение рассматриваемого пуасоновского процесса абсолютно непрерывно относительно распределения стандартного пуассоновского процесса с $\lambda(t) = \lambda_0(t) = t$, соответствующая плотность Радона-Никодима равна, [1], [2], стр.168:

$$\pi(\lambda) = e^{\lambda_0(T) - \lambda(T) + \int_0^T \ln \frac{\mu(t)}{\mu_0(t)} d\eta(t)}, \qquad \mu(t) = \lambda'(t), \qquad \mu_0(t) = \lambda_0'(t).$$

Критерий отношения правдоподобия базируется на статистике

$$T_n = \ln \frac{\sup_{\lambda \in H_{01}} \pi(\lambda)}{\sup_{\lambda \in H_0} \pi(\lambda)} = T_{n,1} - T_{n,0},$$

где

$$T_{n,0} = \sup_{\lambda \in H_0} \left(-\lambda(T) + \int_0^T \ln \mu(t) d\eta(t) \right) = \sup_{A > 0} \left(-AT + \int_0^T \ln A d\eta(t) \right) =$$

$$= \eta(T) \ln \frac{\eta(T)}{T} - \eta(T) = n \ln \frac{n}{T} - n,$$

и для $t_{n+1} = T, t_0 = 0, \Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, учитывая монотонное неубывание $\mu(t)$, мы можем записать

$$T_{n,1} = \sup_{\lambda \in H_{01}} \left(-\lambda(T) + \int_0^T \ln \mu(t) d\eta(t) \right) = \sup_{\lambda \in H_{01}} \left(-\lambda(T) + \sum_{k=1}^n \ln \mu(t_k) \right) =$$

$$= \sup_{\lambda \in H_{01}} \sum_{k=1}^n \left[\ln \mu(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(t) dt \right] = \sup_{\lambda \in H_{01}} \sum_{k=1}^n \left[\ln \mu(t_k) - (t_{k+1} - t_k)\mu(t_k) \right] =$$

$$= \sup_{0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n} \sum_{k=1}^n \left[\ln a_k - \Delta t_k a_k \right],$$

Наша ближайшая цель — указать алгоритм вычисления максимума функции

$$F(a) = \sum_{k=1}^n \left[\ln a_k - \Delta t_k a_k \right], \qquad a = (a_1, a_2, ..., a_n),$$

на множестве

$$a: \quad 0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n. \tag{2}$$

Заметим, что функция $F(a)$ строго вогнута и, стало быть, принимает свое максимальное значение на выпуклом множестве (2) в единственной точке, более того, любой ее локальный максимум на (2) является глобальным. Следующую элементарную лемму мы приводим без доказательства.

Лемма 1. *Функция* $\ln b_1 - \Delta s_1 b_1$ *достигает максимума в точке* $b_1 = 1/\Delta s_1$*, она строго возрастает на* $(0, 1/\Delta s_1]$ *и строго убывает на* $[1/\Delta s_1, \infty)$.

В точке максимума функции $F(a)$ некоторые из чисел a_k могут совпадать, поэтому в этой точке

$$\sup_{0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n} F(a) = \sum_{j=1}^M m_j \left[\ln b_j - \Delta t_j^* b_j \right], \tag{3}$$

где

$$\Delta t_j^* = \frac{1}{m_j} \sum_{j_s \in D_j} \Delta_{j_s}, \qquad \sum_{j=1}^M m_j = n,$$

и непересекающиеся подмножества D_j состоят из подряд идущих индексов, и каждое следующее множество лежит правее предыдущего, при этом имеют место строгие неравенства

$$b_1 < b_2 < ... < b_M.$$

В силу строгости этих неравенств и леммы 1 имеем, что $b_j = 1/\Delta t_j^*, \forall j$, тем самым, в точке глобального максимума выполнены строгие неравенства

$$1/\Delta t_1^* < 1/\Delta t_2^* < ... < 1/\Delta t_M^*, \tag{4}$$

более того, для каждого слагаемого в экстремальной сумме в (3) должно быть выполнено необходимое условие локального экстремума, которое мы рассмотрим для простоты для первого слагаемого, то есть для $j = 1$. Итак, пусть

$$L(a_1, a_2, ..., a_{m_1}) = \sum_{k=1}^{m_1} \left[\ln a_k - \Delta t_k a_k \right],$$

тогда при $a_1 = a_2 = ... = a_{m_1} = b_1$

$$m_1[\ln b_1 - \Delta t_1^* b_1] = m_1 L(a_1, a_2, ..., a_{m_1}),$$

а упомянутое необходимое условие экстремума означает следующее:

$$Q = L(b_1 + \delta_1, b_1 + \delta_2, , ..., b_1 + \delta_{m_1}) - L(b_1, b_1, , ..., b_1) \le 0, \qquad \forall \delta_1 \le \delta_2 \le ... \le \delta_{m_1},$$

для достаточно малых δ_j. Для главного члена асимптотики Q при $\delta_j \to 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{m_1} \delta_k \left[\frac{1}{b_1} - \Delta t_k\right] = \sum_{k=1}^{m_1} \delta_k \left[\Delta t_1^* - \Delta t_k\right] = \sum_{k=2}^{m_1} (\delta_k - \delta_{k-1})(m_1 - k + 1)\left[\Delta t_1^* - \Delta t_{1,k}^*\right] \le 0,$$

где

$$\Delta t_{1,k}^* = \frac{1}{m_1 - k + 1} \sum_{j=k}^{m_1} \Delta t_j, \qquad \Delta t_1^* = \frac{1}{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} \Delta t_j,$$

таким образом, необходимое условие экстремума для первого слагаемого в (3) состоит в выполнении системы неравенств

$$\sum_{j=k}^{m_1} \Delta t_j \ge (m_1 - k + 1)\Delta t_1^*, \qquad \forall k = 2, 3, ..., m_1, \tag{5}$$

при этом, очевидно, вероятность равенств здесь равна нулю.

Наоборот, при наличии такого разбиения множества индексов $\{1, 2, ..., n\} = \cup_{j=1}^{M} D_j$, для которого выполнены соотношения (4) и соотношения, аналогичные (5) для всех элементов этого разбиения, соответствующее значение целевой функции $F(a)$ будет максимально и равно

$$T_{n,1} = \sum_{j=1}^{M} m_j \left[\ln b_j - \Delta t_j^* b_j\right] = \sum_{j=1}^{M} m_j \ln \frac{1}{\Delta t_j^*} - n.$$

и, значит, статистика критерия отношения правдоподобия будет равна

$$T_n = T_{n,1} - T_{n,0} = \sum_{j=1}^{M} m_j \ln \frac{\Delta t^*}{\Delta t_j^*}, \qquad \Delta t^* = \frac{\sum_{k=0}^{n} \Delta t_k}{n} = \frac{T}{n}.$$

Альтернатива H_{01} будет приниматься, если $T_n > R_n$ для некоторого порога R_n, подбираемого так, чтобы асимптотическая значимость критерия равнялась бы заданному числу. Отметим, что асимптотическая значимость данного критерия не зависит от A, то есть он подобный, действительно, предел при $T \to \infty$ можно заменить на предел при $n \to \infty$ и заметить, что при нулевой гипотезе сл.в. $A\Delta t_k, k = 0, 1, 2, ...$ образуют последовательность независимых сл.в. с одинаковым экспоненциальным распределением с параметром 1, см. [6], так что распределение статистики T_n в силу ее конструкции при неслучайном n не зависит от параметра A.

Для построения разбиения $\cup_{j=1}^{M} D_j$ нам потребуется выяснить вопрос: сохраняется ли свойство (5) при объединении двух подмножеств индексов, скажем, D_1 и D_2.

Лемма 2. *Пусть*

$$D_1 = \{1, 2, ..., m_1\}, \qquad D_2 = \{m_1 + 1, m_1 + 2, ..., m_1 + m_2\},$$

и для обоих множеств выполнено условие (5). Если $1/\Delta t_1^* \ge 1/\Delta t_2^*$, то тогда условие (5) выполнено и для объединенного множества $D_1 \cup D_2$.

Доказательство: Обозначим

$$\Delta t^* = \frac{m_1 \Delta t_1^* + m_2 \Delta t_2^*}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \sum_{j=1}^{m_1 + m_2} \Delta t_j.$$

Условие (5) выполнено для D_1 и $\Delta t_2^* \ge \Delta t_1^*$, поэтому при $k \le m_1$

$$\sum_{j=k}^{m_1+m_2} \Delta t_j = \sum_{j=k}^{m_1} \Delta t_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \Delta t_j \ge (m_1 - k + 1)\Delta t_1^* + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \Delta t_j =$$

$$= (m_1 - k + 1)\Delta t_1^* + m_2 \Delta t_2^* \geq (m_1 + m_2 - k + 1)\Delta t^*.$$

И, аналогично, для $m_1 < k \leq m_1 + m_2$

$$\sum_{j=k}^{m_1+m_2} \Delta t_j \geq (m_1 + m_2 - k + 1)\Delta t_2^* \geq (m_1 + m_2 - k + 1)\Delta t^*.$$

Доказанные неравенства означают выполнимость условия (5) для множества $D_1 \cup D_2$.

Лемма доказана.

Алгоритм построения разбиения $\cup_{j=1}^M D_j$. В соответствии с алгоритмом сначала строятся некоторые подмножества D'_k, а затем и множества D_k путем последовательного объединения некоторых из подмножеств D'_k.

Шаг 1. Построим сначала D'_1. Включим в D'_1 индекс $j = 1$ и затем последовательно будем включать следующие по величине индексы пока выполняется система неравенств (5). Формирование D'_1 прекращается, когда добавление к D'_1 следующего по величине индекса ведет к нарушению системы неравенств (5). Аналогично и последовательно формируются подмножества индексов $D'_2, D'_3, ..., D'_M$.

Шаг 2. Построенное разбиение укрупняется путем объединения некоторых D'_j. Если система строгих неравенств (4) выполняется, то построенное на первом шаге разбиение и есть искомое, в противном случае, если для некоторого индекса j имеем $1/\Delta t_j^* \geq 1/\Delta t_{j+1}^*$, тогда мы объединяем D'_j и D'_{j+1}, что в силу леммы 2 сохранит для нового разбиения выполнимость свойства (5). После серии таких объединений добиваемся выполнения (4).

Анализ асимптотических свойств статистики критерия отношения правдоподобия в случае альтернатив H_{01} достаточно сложен, мы предполагаем провести его в отдельной публикации.

Рассмотрим следующий упрощенный критерий. Ввиду вогнутости логарифмической функции и неравенства Йенсена

$$T_n \leq T'_n = \sum_{j=1}^n \ln \frac{\Delta t^*}{\Delta t_j},$$

причем в случае справедливости нулевой гипотезы с $A = 1$ при $n \to \infty$ по закону больших чисел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} T'_n = \lim_{n\to\infty} \left(\ln \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \xi_k \right) = \ln E\xi_1 - E \ln \xi_1 =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = C = 0,577..., \tag{6}$$

здесь $\xi_k = \Delta t_k, k = 1, 2, ...$ последовательность независимых сл.в., имеющих показательное распределение с единичным математическим ожиданием, C — постоянная Эйлера, см. [7], стр.587. Кроме того, при справедливости нулевой гипотезы с $A = 1$ при $n \to \infty$ по центральной предельной теореме имеет место слабая сходимость

$$\frac{T'_n - Cn}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Longrightarrow}} N(0, \sigma^2),$$

где

$$\sigma^2 = E(\xi_1 - 1 - \ln \xi_1)^2 = \int_0^\infty (x - 1 - \ln x)^2 e^{-x} \, dx = \frac{\pi^2}{6} + C^2 - 1 = 0.978...,$$

см. [7], стр. 588. Тем самым, критерий, отвергающий H_0 при

$$T'_n > R'_n = Cn + \sqrt{n}\sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha), \tag{7}$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной гауссовской величины, имеет асимптотический уровень значимости $\alpha, \forall \alpha \in (0, 1)$.

Рассмотрим асимптотическое поведение данного критерия при альтернативах. Пусть $F_T(x) = \lambda(xT)/\lambda(T), x \in [0,1]$ и $F_T^{-1}(x)$ — обратная функция, в частности, при $\lambda(T) = AT$ (т.е. когда пуассоновский процесс однороден) имеем $F_T(x) = x$. Рассмотрим последовательность альтернатив

$$H_1^\alpha : \lim_{T\to\infty} F_T(x) = x^{\alpha+1}, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{dF_T^{-1}(x)}{dx} = \frac{x^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0,$$

равномерно по x (тем самым, в частности, функция интенсивности $\lambda(t)$ является правильно меняющейся функцией и сверхлинейно возрастает).

Нетрудно видеть, что распределение случайного вектора $(t_1/T, t_2/T, ..., t_n/T)$ при условии $\{\eta(T) = n\}$ совпадает с распределением набора порядковых статистик, построенных по выборке независимых сл.в. с общей ф.р. $F_T(x)$, в частности при $\lambda(T) = AT$ получаем набор порядковых статистик для равномерного распределения на $[0,1]$. Следовательно, мы можем записать, что $t_k = TF_T^{-1}(u_k)$, где u_k — порядковые статистики для равномерного распределения и по теореме о среднем

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = T(u_{k+1} - u_k)\psi_k, \quad \psi_k = \frac{d}{dx}\left[F^{-1}(u_k^*)\right], \qquad u_k^* \in [u_k, u_{k+1}].$$

Запишем с учетом сделанных замечаний

$$\frac{1}{n}T_n' = \ln\Delta^* - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\Delta t_k = \ln\frac{T}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln[T(u_{k+1} - u_k)\psi_k] =$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln[n(u_{k+1} - u_k)] - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\psi_k,$$

здесь при $n \to \infty$ сумма первое слагаемое стремится к C — константе Эйлера, поскольку набор сл.в. $\{n(u_{k+1} - u_k)\}_{k=1}^n$ распределен так же, как и набор $\{\xi_k/S_n^*\}_{k=1}^n$, где ξ_k — суть независимые показательные сл.в. с единичным математическим ожиданием, $S_n^* = (\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n)/n$, см. [8], тем самым мы можем получить требуемый предел, используя (6). Нижний предел по вероятности второго слагаемого по закону больших чисел не меньше, чем

$$E\ln\left[(\alpha+1)U^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right] = \ln(\alpha+1) + \frac{\alpha}{\alpha+1}\int_0^1 \ln x\, dx =$$

$$= \ln(\alpha+1) - \frac{\alpha}{\alpha+1} > 0, \qquad \forall\alpha > 0,$$

где сл.в. U равномерно распределена на $[0,1]$. Следовательно,

$$\frac{T_n' - Cn}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \infty$$

и, стало быть, критерий (7) состоятелен против альтернатив H_1^α.

3. Конструкция критерия в модели (1)

В модели (1) мы рассматриваем два критерия, базирующихся соответственно на оценке параметра B, близкой к оценке наибольшего правдоподобия, и на оценке по методу наименьших квадратов (МНК). Эти оценки наглядны, несмещены и сохраняют хорошие свойства при отклонениях от модели (1), см. п.4 . Оценки наибольшего правдоподобия в модели (1) асимптотически эффективны при $T \to \infty$, но могут быть смещены. Нас, однако, интересует и случай конечных T, когда мы хотим распознать возрастание интенсивности пуассоновского процесса как можно раньше.

Если в модели (1) известно, что $A = 0$, то тогда оценка наибольшего правдоподобия $\hat{B} = 2\eta(T)/T^2$ несмещена и имеет наименьшую дисперсию в классе несмещенных оценок параметра B, [2], стр. 174. Однако, нам интересен случай, когда $A > 0$, а B мало, то есть мы хотим заметить малое возрастание B от нуля.

Учитывая вид функции правдоподобия $\pi(\lambda)$, запишем уравнения для оценок A^*, B^* наибольшего правдоподобия:

$$\int_0^T \frac{d\eta(t)}{A+Bt} = T, \qquad \int_0^T \frac{td\eta(t)}{A+Bt} = \frac{T^2}{2},$$

справедливые, если максимум $\pi(\lambda)$ достигается при $A^*B^* \neq 0$. Из этих уравнений сразу вытекает линейное соотношение $A^*T + B^*T^2/2 = \eta(T)$. Выражая отсюда A^* и подставляя получающуюся формулу во второе уравнение, получаем при малых B

$$\frac{T^2}{2} = \int_0^T \frac{td\eta(t)}{A+Bt} = \int_0^T \frac{td\eta(t)}{\frac{\eta(T)}{T} + B\left(t - \frac{T}{2}\right)} \approx$$

$$\approx \frac{T}{\eta(T)} \int_0^T td\eta(t) - \frac{BT^2}{\eta^2(T)} \int_0^T t\left(t - \frac{T}{2}\right) d\eta(t),$$

откуда получаем приближенную формулу

$$B^* \approx \frac{\int_0^T \left(t - \frac{T}{2}\right) d\eta(t)}{\frac{T}{\eta(T)} \int_0^T t\left(t - \frac{T}{2}\right) d\eta(t)}.$$

Взяв здесь только числитель, который при $A = 0$ имеет нулевое математическое ожидание, сформируем несмещенную оценку

$$\overline{B} = \frac{12}{T^3} \int_0^T \left(t - \frac{T}{2}\right) d\eta(t),$$

которая, как нетрудно подсчитать, имеет дисперсию асимптотически (при $T \to \infty$) втрое больше нижней границы дисперсий Рао-Крамера, [2], стр. 174. Известно, что оценка B^* состоятельна, асимптотически нормальна и эффективна, однако она смещена, [5].

Теорема 1. *1) При справедливости нулевой гипотезы H_0 имеет место сходимость по распределению:*

$$\frac{T^{3/2}\overline{B}}{\sqrt{A}} \xrightarrow[T\to\infty]{D} \gamma_0 N(0,1), \tag{8}$$

где $\gamma_0 = \sqrt{12} = 3.464...$, $N(0,1)$ — стандартная гауссовская случайная величина.

2) при справедливости альтернативы H_{11}

$$\overline{B} \xrightarrow[T\to\infty]{P} B.$$

Доказательство теоремы 1 дается ниже в Приложении.

Для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_{11} теперь мы можем использовать критерий, отвергающий H_0, если

$$\frac{T^2\overline{B}}{\sqrt{\eta(T)}} \geq \gamma_0 \lambda_\varepsilon,$$

где λ_ε — квантиль уровня ε для стандартного гауссовского распределения. Данный критерий при $T \to \infty$ имеет асимптотический уровень значимости, равный ε, он состоятелен против альтернативы H_{11} в силу теоремы 1. Критерий получен заменой в (8) параметра A на его состоятельную оценку $\eta(T)/T$, здесь также учтено, что при нулевой гипотезе

$\eta(T)/(AT) \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1$ и при альтернативе $\eta(T)/T^2 \xrightarrow[T\to\infty]{P} B/2$, см. формулы (11),(15) Приложения. В случае принятия альтернативы заключаем, что в среднем в СМО каждую новую единицу времени поступает на $\overline{B}$ заявок больше.

Рассмотрим теперь критерий проверки H_0, базирующийся на МНК оценке параметра B, соответствующей приближению траектории пуассоновского процесса $\eta(t)$ параболой. Точнее, оценим параметры A, B исходя из минимизации суммы квадратов отклонений

$$J = \sum_{k=1}^{n} \left(\eta(t_k) - At_k - \frac{Bt_k^2}{2} \right)^2 .$$

Обозначим

$$\overline{\eta(t)t^p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta(t_k)t_k^p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kt_k^p, \quad \overline{t^p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k^p, \quad p = 1,2,3,...$$

Решая систему нормальных уравнений: $\partial J/\partial A = 0, \partial J/\partial B = 0$, или эквивалентно

$$A\overline{t^2} + \frac{B}{2}\cdot\overline{t^3} = \overline{\eta(t)t}, \quad A\overline{t^3} + \frac{B}{2}\cdot\overline{t^4} = \overline{\eta(t)t^2},$$

получаем МНК-оценку параметра B:

$$\widehat{B} = 2\,\frac{\overline{t^2}\cdot\overline{\eta(t)t^2} - \overline{t^3}\cdot\overline{\eta(t)t}}{\overline{t^2}\cdot\overline{t^4} - \overline{t^3}\cdot\overline{t^3}}. \tag{9}$$

Отметим, что знаменатель в (9) положителен с вероятностью 1 ввиду неравенства Коши-Буняковского:

$$|E\xi^3| = |E\xi\cdot\xi^2| \le \sqrt{E\xi^2 E\xi^4},$$

где ξ — дискретная случайная величина с равновероятными значениями $t_k, k = 1,2,..,n$. При этом равенство здесь может достигаться только, если сл.в. ξ пропорциональна ξ^2 с вероятностью 1, то есть, если сл.в. ξ — константа п.н.. В рассматриваемом случае все моменты времени t_k различны, так что ξ — не константа и, стало быть, в (9) знаменатель отличен от нуля с вероятностью 1.

Асимптотические при $T \to \infty$ свойства оценки $\widehat{B}$ приведены в следующей теореме.

Теорема 2. *1) При справедливости нулевой гипотезы H_0 имеет место сходимость по распределению:*

$$\frac{T^{3/2}\widehat{B}}{\sqrt{A}} \xrightarrow[T\to\infty]{D} \gamma_1 N(0,1),$$

где $\gamma_1 = \sqrt{128,254} = 11,324...$,

2) при справедливости альтернативы H_{11}

$$\widehat{B} \xrightarrow[T\to\infty]{P} B.$$

Доказательство теоремы 2 дается ниже в Приложении.

Рассуждая далее как и после теоремы 1, мы можем рассмотреть критерий, отвергающий H_0, при

$$\frac{T^2\widehat{B}}{\sqrt{\eta(T)}} \ge \gamma_1\lambda_\varepsilon. \tag{10}$$

Этот критерий при $T \to \infty$ состоятелен против альтернатив H_{11} в силу теоремы 2 и имеет асимптотический уровень значимости ε. Критерий получен заменой в 1) параметра A на его состоятельную оценку $\eta(T)/T$. В случае принятия альтернативы заключаем, что в среднем в СМО каждую новую единицу времени поступает на $\widehat{B}$ заявок больше. Отметим, что в случае справедливости H_0 распределение статистики критерия зависит от параметров T, A через единственный параметр AT ввиду того, что при нулевой гипотезе A — масштабный параметр для распределения сл.в. t_k.

4. Обобщение

Критерий (10) применим для проверки более общих гипотез. Предположим, что интенсивность потока заявок имеет вид

$$B(t) \stackrel{def}{=} \frac{d\lambda(t)}{dt} = A + t^\alpha L(t),$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ — действительное число. Напомним, что функция $L(x), x \in (0, \infty)$ называется медленно меняющейся по Карамата (ММФ), если она положительна, измерима и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1, \qquad \forall \lambda > 0.$$

Рассмотрим сложную альтернативу

$$H_1^L : B(t) = A + t^\alpha L(t), \alpha > 0$$

и сложную гипотезу

$$H_0^L : B(t) = A \pm t^\alpha L(t), \alpha < 0, B(t) > 0, \forall t, \qquad \text{либо} \qquad B(t) = A, \forall t,$$

где в обоих случаях $L(t)$ — ММФ и константа $A > 0$.

Ясно, что при $t \to \infty$ в случае справедливости альтернативы параметр $\lambda(t)$ растет по t быстрее, чем линейно, а при справедливости нулевой гипотезы — линейно или почти линейно.

Теорема 3. *1) При справедливости альтернативы H_1^L*

$$\frac{T^2 \widehat{B}}{\sqrt{\eta(T)}} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \infty,$$

2) при справедливости нулевой гипотезы H_0^L имеет место сходимость по распределению:

$$\frac{T^2 \widehat{B}}{\sqrt{\eta(T)}} \xrightarrow[T\to\infty]{D} \gamma_1 N(0,1).$$

Следствие. При $T \to \infty$ критерий (10) состоятелен и имеет асимптотический уровень значимости равный ε.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2: Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *1) При справедливости нулевой гипотезы H_0 для натуральных p имеет место сходимость по вероятности:*

$$\frac{\overline{t^p}}{T^p} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{1}{p+1}, \qquad \frac{\overline{\eta(t)t^p}}{T^{p+1}} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{A}{p+2}.$$

2) При справедливости альтернативы H_1

$$\frac{\overline{t^p}}{T^p} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{2}{p+2}, \qquad \frac{\overline{\eta(t)t^p}}{T^{p+2}} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{B}{p+4}.$$

Доказательство: 1) Хорошо известно [6], что для однородного пуассоновского процесса $E\eta(t) = \lambda(t) = At, D\eta(t) = E\eta(t) = At$, поэтому

$$\frac{\eta(T)}{\lambda(T)} = \frac{\eta(T)}{AT} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1. \tag{11}$$

С другой стороны, центрированный случайный процесс $\eta^*(t) = \eta(t) - \lambda(t)$ имеет ортогональные приращения и нулевое среднее [6]. Обозначим

$$\psi \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} t_k^p = \int_0^T t^p d\eta(t) = \int_0^T t^p d\eta^*(t) + \int_0^T t^p d\lambda(t) = \int_0^T t^p d\eta^*(t) + \frac{AT^{p+1}}{p+1}.$$

Ввиду сказанного выше

$$E\psi = \frac{AT^{p+1}}{p+1}, \quad D\psi = \int_0^T t^{2p} dD\eta^*(t) = \frac{AT^{2p+1}}{2p+1}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\frac{\psi}{E\psi} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1,$$

и, значит,

$$\frac{\overline{t^p}}{T^p} = \frac{1}{T^p\eta(T)} \int_0^T t^p d\eta(t) = \frac{\psi}{T^p\eta(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{1}{p+1}.$$

Второе соотношение в 1) рассматриваем аналогично, обозначим

$$\psi_1 \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \eta(k_k) t_k^p = \int_0^T \eta(t) t^p d\eta(t) =$$

$$= \int_0^T \eta(t) t^p d\eta^*(t) + \int_0^T \eta^*(t) t^p d\lambda(t) + \int_0^T \lambda(t) t^p d\lambda(t), \tag{12}$$

и, стало быть,

$$E\psi_1 = \int_0^T \lambda(t) t^p d\lambda(t) = A^2 \int_0^T t^{p+1} dt = \frac{A^2 T^{p+2}}{p+2}. \tag{13}$$

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\psi_2 \overset{def}{=} \psi_1 - E\psi_1 = \int_0^T \eta(t) t^p d\eta^*(t) + \int_0^T \eta^*(t) t^p d\lambda(t) = \int_0^T \eta(t) t^p d\eta^*(t) + \frac{AT^{p+1}\eta^*(T)}{p+1} -$$

$$- \frac{A}{p+1} \int_0^T t^{p+1} d\eta^*(t) = \int_0^T \left[\eta(t) - \frac{At}{p+1}\right] t^p d\eta^*(t) + \frac{AT^{p+1}\eta^*(T)}{p+1},$$

поэтому $E\psi_2 = 0$ и

$$D\psi_2 = \int_0^T E\left[\eta(t) - \frac{At}{p+1}\right]^2 t^{2p} d\lambda(t) + \frac{A^2 T^{2p+2}\lambda(T)}{(p+1)^2} \le CT^{2p+3}, \tag{14}$$

где C — константа, что позволяет, учитывая (12)-(14), записать, что

$$\frac{\psi_1}{E\psi_1} = \frac{\psi_2}{E\psi_1} + 1 \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1.$$

Итак, учитывая (11), имеем

$$\frac{\overline{\eta(t)t^p}}{T^{p+1}} = \frac{\psi_1}{T^{p+1}\eta(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{A}{p+2},$$

что и требовалось доказать.

При справедливости альтернативы H_{11}, рассуждая аналогично, получаем, что
$$\frac{\eta(T)}{T^2} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{B}{2}. \tag{15}$$

Далее
$$E\psi = \int_0^T t^p d\lambda(t) = \frac{AT^{p+1}}{p+1} + \frac{BT^{p+2}}{p+2},$$
$$D\psi = \int_0^T t^{2p} dD\eta^*(t) = \frac{AT^{2p+1}}{2p+1} + \frac{BT^{2p+2}}{2p+2},$$
и, значит,
$$\frac{\psi}{E\psi} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1, \tag{16}$$
из (15)–(16)следует первое соотношение в 2). Докажем второе соотношение в 2). Действуя так же как и ранее, получаем при $T \to \infty$
$$E\psi_1 = \int_0^T \lambda(t) t^p d\lambda(t) = \frac{B^2 T^{p+4}(1+o(1))}{2(p+4)}$$
и
$$D\psi_1 \le CT^{2p+4}.$$
где C — константа, и, значит,
$$\frac{\overline{\eta(t)t^p}}{T^{p+2}} = \frac{\psi_1}{T^{p+2}\eta(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{B}{p+4}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 базируется на применении функциональной центральной предельной теоремы, точнее, ее частного случая [9]:
$$W_T(s) \stackrel{def}{=} \frac{\eta(Ts) - E\eta(Ts)}{\sqrt{AT}} \xrightarrow[T\to\infty]{D} W(s),$$
где $W(s)$ — стандартный винеровский процесс, а слабая сходимость имеет место в пространстве функций без разрывов второго рода непрерывных справа и имеющих левосторонний предел с метрикой Скорохода.

Рассмотрим сначала асимптотику случайной величины ψ при справедливости нулевой гипотезы. Интегрируя по частям и делая замену переменных, запишем
$$\frac{\psi - E\psi}{T^p\sqrt{AT}} = \frac{1}{T^p\sqrt{AT}} \int_0^T t^p d\eta^*(t) = \frac{\eta^*(T)}{\sqrt{AT}} - \frac{1}{T^p\sqrt{AT}} \int_0^T \eta^*(t) dt^p =$$
$$= W_T(1) - \int_0^1 W_T(s) ds^p \xrightarrow[T\to\infty]{D} W(1) - \int_0^1 W(s) ds^p = \int_0^1 s^p dW(s). \tag{17}$$
Из (17) в частности следует, что
$$\frac{\psi}{T^{p+1}} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{A}{p+1}.$$

Аналогично, с тем же самым процессом $W(s)$ имеем
$$\frac{\psi_1 - E\psi_1}{T^{p+1}\sqrt{AT}} = \frac{1}{T^{p+1}\sqrt{AT}} \left(\int_0^T \eta(t) t^p d\eta^*(t) + \int_0^T \eta^*(t) t^p d\lambda(t) \right) =$$
$$= \int_0^1 \left(A + \sqrt{\frac{A}{T}} \cdot W_T(s) \right) s^p dW_T(s) + A \int_0^T W_T(s) s^p ds \xrightarrow[T\to\infty]{D}$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{D} A\int_0^1 s^p dW(s) + A\int_0^T W(s)s^p ds. \tag{18}$$

Таким образом, применяя (17),(18) и лемму 3, окончательно получаем, что при справедливости нулевой гипотезы H_0

$$\frac{T^{3/2}\widehat{B}}{\sqrt{A}} \xrightarrow[T\to\infty]{D} 480\left\{\frac{1}{4}\int_0^1 s^2 dW(s) + \frac{1}{3}\left[\int_0^1 s^2 dW(s) + \int_0^1 s^2 W(s)ds\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{3}\int_0^1 s^3 dW(s) - \frac{1}{4}\left[\int_0^1 s dW(s) + \int_0^1 sW(s)ds\right]\right\} \stackrel{def}{=} Z. \tag{19}$$

Интегрируя здесь по частям и учитывая, что $W(1) = \int_0^1 dW(s)$, находим, что

$$\int_0^1 sW(s)ds = \int_0^1 W(s)d\,\frac{s^2}{2} = \frac{1}{2}W(1) - \int_0^1 \frac{s^2}{2}\,dW(s) = \int_0^1 \frac{1-s^2}{2}dW(s),$$

$$\int_0^1 s^2 W(s)ds = \int_0^1 W(s)d\,\frac{s^3}{3} = \frac{1}{3}W(1) - \int_0^1 \frac{s^3}{3}\,dW(s) = \int_0^1 \frac{1-s^3}{3}dW(s),$$

поэтому в (19)

$$Z = \int_0^1 f(s)\,dW(s),$$

$$f(s) = 480\left(\frac{17s^2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{s}{4} - \frac{4s^3}{9}\right).$$

Таким образом, ввиду известных свойств интеграла Ито [6]

$$EZ = 0, \qquad \gamma_1^2 = DZ = \int_0^1 f^2(s)\,ds = 128,254.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3: 1) Нам потребуются следующие факты из теории ММФ.

Предложение 1 ([10], с.26). *Пусть ММФ $L(x)$ локально ограничена на $[A,\infty)$ и $\alpha > -1$, тогда*

$$\int_A^T t^\alpha L(t)\,dt = \frac{T^{\alpha+1}L(T)}{\alpha+1}(1+o(1)), \qquad T\to\infty. \tag{20}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что при $\alpha < -1$ интеграл $\int_A^T t^\alpha L(t)\,dt$ сходится к положительному числу.

Предложение 2 ([10], с.16). *1) Пусть $L(x)$ — ММФ и $\beta > 0$, тогда*

$$t^\beta L(t) \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty, \qquad t^{-\beta}L(t) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \tag{21}$$

2) пусть $L_1(t), L_2(t)$ суть ММФ, тогда $L_1(t)L_2(t)$ и $L_1(t)+L_2(t)$ суть также ММФ.

В случае справедливости альтернативы, учитывая свойство ММФ (20), запишем в принятых выше обозначениях: при $T\to\infty$

$$E\psi = \int_0^T t^p\,d\lambda(t) = \frac{AT^{p+1}}{p+1} + \frac{T^{p+\alpha+1}L(T)}{p+\alpha+1}(1+o(1)),$$

$$D\psi = \int_0^T t^{2p}\,d\lambda(t) = \frac{AT^{2p+1}}{2p+1} + \frac{T^{2p+\alpha+1}L(T)}{2p+\alpha+1}(1+o(1)),$$

поэтому в силу (21) $D\psi/(E\psi)^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, следовательно

$$\frac{\psi}{E\psi} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1,$$

и, значит,

$$\psi = \left(\frac{AT^{p+1}}{p+1} + \frac{T^{p+\alpha+1}L(T)}{p+\alpha+1} \right) (1+o(1)) = \frac{T^{p+\alpha+1}L(T)}{p+\alpha+1}(1+o(1)), \tag{22}$$

по вероятности. Далее, в силу (20)

$$\lambda(t) = \int_0^t B(s)\,ds = \int_0^t \left(A + s^\alpha L(s)\right)\,ds = At + \frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}(1+o(1)) = \frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}(1+o(1)),$$

следовательно, $\lambda(t)$ есть правильно меняющаяся функция. В принятых выше обозначениях: при $T \to \infty$

$$E\psi_1 = \int_0^T \lambda(t)t^p d\lambda(t) = \int_0^T \lambda(t)B(t)t^p dt = \frac{T^{2\alpha+p+2}L^2(T)}{(\alpha+1)(2\alpha+p+2)}(1+o(1)). \tag{23}$$

Далее, для

$$G_p(t) \overset{def}{=} \int_0^t s^p d\lambda(s) = \int_0^t s^p B(s)ds = \frac{t^{p+\alpha+1}L(t)}{p+\alpha+1}(1+o(1)), \qquad t \to \infty$$

имеем, интегрируя по частям

$$\psi_1 - E\psi_1 = \int_0^T \eta(t)t^p d\eta^*(t) + \int_0^T \eta^*(t)t^p d\lambda(t) = \int_0^T \eta(t)t^p d\eta^*(t) + \eta^*(T)G_p(T) -$$

$$- \int_0^T G_p(t)d\eta^*(t) = \int_0^T \left[\eta(t)t^p - G_p(t)\right] d\eta^*(t) + \eta^*(T)G_p(T),$$

поэтому

$$D\psi_1 \le 2E(\eta^*(T))^2 G_p^2(T) + 2\int_0^T E\left[\eta(t)t^p - G_p(t)\right]^2 d\lambda(t) = 2\lambda(t)G_p^2(T) +$$

$$+2\int_0^T \left\{ \left[\lambda(t)t^p - G_p(t)\right]^2 + t^{2p}\lambda(t) \right\} d\lambda(t) = o((E\psi_1)^2),$$

так, что

$$\frac{\psi_1}{E\psi_1} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1.$$

Таким образом, учитывая (22)–(23), определяем, что

$$\widehat{B} = \frac{T^{\alpha-1}L(T)2\alpha(\alpha+4)(\alpha+5)}{(\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+4)}(1+o(1)).$$

Учитывая теперь, что

$$\eta(T) = \lambda(T)(1+o(1)) = \frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}(1+o(1)),$$

окончательно получаем

$$\frac{T^2\widehat{B}}{\sqrt{\eta(T)}} = \frac{2\alpha(\alpha+4)(\alpha+5)}{(2\alpha+3)(2\alpha+4)}\sqrt{\frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}}(1+o(1)) \xrightarrow[T\to\infty]{P} \infty.$$

Доказательство пункта 2) теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 2. Здесь необходимо только учесть, что при $t \to \infty$

$$\lambda(t) = \int_0^t B(s)ds = At \pm \frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}(1+(1)) = At(1+(1)),$$

то есть поведение параметра $\lambda(t)$ асимптотически такое же, как и в случае однородного пуассоновского процесса.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1: Доказательство легко получить, используя методы теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кабанов Ю.М„ Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Мартингальные методы в теории точечных процессов.*– Труды школы-семинара по теории случайных процессов , Друскининкай, Вильнюс, 1975, т.2, с.269-354.
2. Кутоянц Ю.А. *Оценивание параметров случайных процессов.* Ереван: И-во АН Армянской ССР. 1980. 253 с.
3. Линьков Ю.Н. *Асимптотические методы статистики случайных процессов.* Киев: Наукова думка. 1993. 255 с.
4. G. Peskir, A.N. Shiryaev Sequental testing problems for Poisson processes // The Annals of Statistics. 2000. Vol. 28. № 3. P.837—859.
5. Y.A. Kutoyants On properties of estimators in nonregular situations for Poisson processes // Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 363. 2009. С. 26–47.
6. Вентцель А.Д. *Курс теории случайных процессов.* М.: Наука. 1975. 320 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: И-во Физико-математической литературы. 1963. 1100 с.
8. Невзоров В.Б. *Рекорды. Математическая теория.* М.: Фазис. 2000. 256 с.
9. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер.* М:Наука. 1977. 352 с.
10. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Tuegels *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications, volume 27.* Cambridge University Press / Cambridge/ New York/ New Rochelle/ Melbourne/ Sydney. 1987. 510 p.

Наиль Кутлужанович Бакиров
ИМВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: bakirovnk@rambler.ru

Михаил Владимирович Сначев,
ИМВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: Snachev@yandex.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 29-36.

УДК 517.16 + 517.574 + 517.555

ТРИ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ИНТЕГРАЛОВ

Р.А. БАЛАДАЙ, Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. В работе выдвигается гипотеза о точной оценке некоторого определенного несобственного интеграла, зависящего от параметра $\lambda \in (0,+\infty)$, через заданную оценку другого определенного интеграла, зависящего от двух параметров $t \in [0,+\infty)$ и λ. Такая точная оценка доказана здесь для $\lambda \leqslant 1$. Кроме того, получена некоторая оценка и при $\lambda > 1$. Последняя оценка, по-видимому, не точная. Мы приводим также две гипотезы, эквивалентные исходной. Истоки наших гипотез — экстремальные задачи для целых, мероморфных и плюрисубгармонических функций нескольких переменных.

Ключевые слова:несобственный интеграл, оценка, неравенство, целая функция, мероморфная функция, плюрисубгармоническая функция, проблема Пэли.

1. Введение

«*Положительность*» («*отрицательность*») всюду в работе означает “$\geqslant 0$” (соотв.[1] “$\leqslant 0$”), где отношение порядка $\leqslant$ и нулевой элемент 0 на рассматриваемом множестве, как правило, естественны по контексту.

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ обозначаем множества всех соотв. *натуральных*, *целых*, *вещественных* и *комплексных* чисел; $[-\infty,+\infty] := \{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ — *расширенная вещественная ось* с естественным отношением порядка.

Функция $\phi\colon I \to [-\infty,+\infty]$, $I \subset [-\infty,+\infty]$, *возрастающая* (соотв. *убывающая*), если для любых $x_1, x_2 \in I$ неравенство $x_1 \leqslant x_2$ влечет за собой *нестрогое неравенство* $\phi(x_1) \leqslant \phi(x_2)$ (соотв. $\phi(x_1) \geqslant \phi(x_2)$). Если же для любых $x_1, x_2 \in I$ из *строгого неравенства* $x_1 < x_2$ следует *строгое неравенство* $\phi(x_1) < \phi(x_2)$ (соотв. $\phi(x_1) > \phi(x_2)$), то ϕ — *строго возрастающая* (соотв. *строго убывающая*) функция на I. Через $\operatorname{Inc}(I)$ обозначаем множество всех возрастающих функций на I. Верхний индекс “$^+$”, наряду с тем, что обозначает положительную часть $a^+ := \max\{a,0\}$ (соотв. $\phi^+ := \sup\{\phi,0\}$) числа a или функции $\phi\colon \cdot \to [-\infty,+\infty]$, используется также для обозначения всех положительных элементов из множества или класса функций. Так, подмножество всех положительных функций из $\operatorname{Inc}(I)$ обозначаем $\operatorname{Inc}^+(I)$.

Функция $\phi\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, $[a,b) \subset [0,+\infty]$, *выпуклая относительно*[2] $\log$, если функция $x \mapsto \phi(e^x)$ выпуклая на интервале $[\log a, \log b) \subset [-\infty,+\infty]$.

В связи с исследованием в работе [1, Теоремы 1, 2] экстремальных задач о росте плюрисубгармонических, целых и мероморфных функций комплексных переменных в завершение обзора [2, Commentary] была выдвинута

R.A.Baladai, B.N. Khabibullin, Three equivalent conjectures on an estimate of integrals.

Работа поддержана РФФИ (гранты 09-01-00046-а, 08-01-97023-р_поволжье_а) и программой “Государственная поддержка ведущих научных школ”, проект НШ–3081.2008.1.

Поступила 15 июня 2010 г.

[1]Далее сокращение «соотв.» используется для наречия или предлога «соответственно».

[2]Если не указано основание логарифма у log, то оно равно числу e, т. е. это функция ln.

Гипотеза 1. *Пусть функция* $S \in \operatorname{Inc}^+\bigl([0,+\infty)\bigr)$ *выпуклая относительно* $\log$ *и для* $\lambda \geqslant 1/2$ *и* $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство*

$$\int_0^1 S(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x \leqslant t^\lambda \quad \text{для всех} \quad t \in [0,+\infty). \tag{1}$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} S(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi(n-1)}{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr). \tag{2}$$

Если Гипотеза 1 верна, то в точности оценки (2) при условии (1) легко убедиться на примере возрастающей выпуклой относительно log функции

$$S_{\lambda,n}(t) := 2(n-1)\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr)\,t^\lambda =: c_{\lambda,n}t^\lambda, \quad t\in[0,+\infty), \quad \lambda \geqslant \frac{1}{2}\,,$$

где постоянная $c_{\lambda,n}$ определена последним равенством. Для $S_{\lambda,n}$ в (1) и (2) достигается равенство. Действительно, в обозначениях Γ и B для классических гамма- и бета-функций Эйлера [3, гл. VII, § 1] получаем (см. (1))

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_{\lambda,n}(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x &= \frac{c_{\lambda,n}}{2}\,t^\lambda\int_0^1 x^{(\lambda/2+1)-1}(1-x)^{(n-1)-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{c_{\lambda,n}}{2}\,t^\lambda \mathrm{B}(\lambda/2+1,n-1) = \frac{c_{\lambda,n}}{2}\,t^\lambda\frac{\Gamma(\lambda/2+1)\;\Gamma(n-1)}{\Gamma(\lambda/2+n)}\\ &= \frac{c_{\lambda,n}}{2}\,t^\lambda\frac{(\lambda/2)\Gamma(\lambda/2)\;(n-2)!}{\Gamma(\lambda/2)\;(\lambda/2)\;(\lambda/2+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda/2+(n-1))}\\ &= c_{\lambda,n}\,\frac{1}{2(n-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\dfrac{\lambda}{2\,k}\Bigr)}\,t^\lambda = t^\lambda,\end{aligned} \tag{3}$$

а также (см. (2))

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} S_{\lambda,n}(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{c_{\lambda,n}}{2\lambda}\int_0^{+\infty} t^\lambda\,\mathrm{d}\frac{1}{1+t^{2\lambda}}\\ &= \frac{c_{\lambda,n}}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^{2\lambda}}\,\mathrm{d}t^\lambda = \frac{c_{\lambda,n}}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi(n-1)}{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr).\end{aligned} \tag{4}$$

2. Случай лишь положительной возрастающей функции S

В этом разделе мы получим некоторые оценки для интеграла (2) от функции S *без каких-либо условий выпуклости.* Так, при $\lambda \leqslant 1$ справедлив следующий более общий вариант Гипотезы 1.

Утверждение 1. *Пусть* $S \in \operatorname{Inc}^+\bigl([0,+\infty)\bigr)$ *— непрерывная функция и для*

$$\frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1$$

и $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ *выполнено* (1). *Тогда имеет место неулучшаемая оценка* (2).

Доказательство. Сначала дадим грубую оценку функции S при *произвольном* значении параметра λ. Такая оценка, в частности, необходима нам для сходимости возникающих в ходе доказательства различных интегралов и для существования некоторых пределов. Применения этой Леммы 1 далее не объявляются.

Лемма 1. *Пусть* $S \in \mathrm{Inc}^+\big([0,+\infty)\big)$, $\lambda \geqslant 0$ *и для* $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ *выполнено* (1). *Тогда*

$$S(x) \leqslant 2(n-1)\left(1+\frac{\lambda}{2(n-1)}\right)^{n-1}\left(1+\frac{2(n-1)}{\lambda}\right)^{\lambda/2} x^\lambda \quad \text{при всех } x \geqslant 0.$$

Доказательство леммы 1. Для произвольного числа $a \in [0,1]$ в силу возрастания S имеем

$$S(at) \leqslant \int_a^1 S(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x \Big/ \int_a^1 (1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{(1)}{\leqslant} t^\lambda \Big/ \int_a^1 (1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x = \frac{2(n-1)}{(1-a^2)^{n-1}}\,t^\lambda = 2(n-1)\frac{1}{a^\lambda(1-a^2)^{n-1}}\,(at)^\lambda.$$

Используя замену $x = at$, а затем минимизируя по $a \in [0,1]$ дробь в правой части, получаем требуемое (1). □

Далее нам удобнее перейти к новым переменным: обозначить переменную t через r, rx заменить на t, а вместо функции S рассмотреть функцию

$$T := \frac{1}{2(n-1)}\,S.$$

Тогда неравенство (1) записывается в виде

$$2(n-1)\int_0^r T(t)(r^2-t^2)^{n-2}t\,\mathrm{d}t \leqslant r^{\lambda+2(n-1)} \quad \text{для любых } r \geqslant 0, \tag{5}$$

а неравенство (2) перейдет в требующее доказательства неравенство

$$\int_0^{+\infty} T(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t \overset{?}{\leqslant} \frac{\pi}{4\lambda}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\lambda}{2k}\Big). \tag{6}$$

Для непрерывной функции f на $[0,+\infty)$ введем интегральный оператор

$$I_k(r;f) := \int_0^r f(t)(r^2-t^2)^k t dt, \quad r \geqslant 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

В частности, интеграл из (5) есть в точности $I_{n-2}(r;T)$.

Далее, введем в рассмотрение операторы L и M, действующие на дифференцируемые функции $g\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ по правилу

$$L[g](r) := \frac{1}{r}\cdot g'(r), \quad M[g](r) := -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\cdot g(t)\right)\Bigg|_{t=r}, \quad r > 0. \tag{8}$$

Легко показать, что

$$L^p[I_k(\cdot;f)](r) = 2^p\frac{k!}{(k-p)!}\,I_{k-p}(r;f), \quad p \leqslant k, \tag{9}$$
$$L^{k+1}[I_k(\cdot;f)](r) = 2^k k!\,f(r), \tag{10}$$

где p-ая степень оператора означает его k-кратную суперпозицию.

Лемма 2. *Предположим, что функции* g *и* φ *соотв.* p *раз и* $q+1$ *раз непрерывно дифференцируемы на* $(0,+\infty)$ *и существуют пределы*

$$\lim_{t\to 0,+\infty}\frac{1}{t}\,L^{p-1}[g](t)\cdot M^q[\varphi](t) = 0.$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} L^p[g](t)\,M^q[\varphi](t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} L^{p-1}[g](t)\,M^{q+1}[\varphi](t)\,\mathrm{d}t,$$

если интегралы сходятся.

Лемму 2 легко доказать интегрированием по частям.

Лемма 3. *Пусть*

$$\varphi_\lambda(t) := \frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}, \quad t \geqslant 0. \tag{11}$$

Тогда для всех $q = 0, 1, \ldots$ имеют место соотношения

$$M^q[\varphi_\lambda](t) = O(t^{-2\lambda-1-2q}) \quad \text{при } t \to +\infty, \tag{12}$$

$$M^q[\varphi_\lambda](t) = O(t^{2\lambda-1-2q}) \quad \text{при } t \to 0. \tag{13}$$

Кроме того, при $\lambda \leqslant 1$ выполнено условие положительности

$$M^q[\varphi_\lambda](t) \geqslant 0 \quad \text{для всех } t \geqslant 0. \tag{14}$$

Доказательство. Соотношения (12) и (13) можно получить, представляя функцию φ_λ в виде ряда по степеням от соотв. $t^{-\lambda}$ при $t \to +\infty$ и t^λ при $t \to 0$.

Для доказательства (14) при $\lambda \leqslant 1$ введем для $0 \leqslant \beta \leqslant 2$ класс функций $K(\beta)$, являющихся линейными комбинациями с положительными коэффицентами функций вида

$$\psi(t) = \frac{1}{t^\alpha(1+t^\beta)^k}, \quad \alpha \geqslant -1,\ k \geqslant 0.$$

Например, для нашей функции из (11) имеем $\varphi_\lambda \in K(2\lambda)$ при $\lambda \leqslant 1$. Поэтому для получения (14) достаточно показать, что $M[\psi] \in K(\beta)$ для $\psi \in K(\beta)$. Для $0 \leqslant \beta \leqslant 2$ и $\alpha \geqslant -1$ получаем

$$M[\psi](t) = -\frac{d}{dt}\frac{1}{t^{1+\alpha}(1+t^\beta)^k} = \frac{1+\alpha}{t^{2+\alpha}(1+t^\beta)^k} + \frac{k\beta}{t^{2-\beta+\alpha}(1+t^\beta)^{k+1}} \in K(\beta).$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Для всех $k = 0, 1, \ldots$ и $p = 0, 1, \ldots, k+1$*

$$L^p[I_k(\cdot; T)](r) = O\left(r^{\lambda+2(k+1-p)}\right), \quad r \to 0, +\infty. \tag{15}$$

Доказательство. Для $p = k+1$ из равенства (10) имеем

$$L^{k+1}[I_k(\cdot; T)](r) = 2^k \cdot k!\, T(r) = O(r^\lambda) = O\big(r^{\lambda+2(k+1-p)}\big), \quad r \to 0, +\infty.$$

Для $p \leqslant k$ из равенства (9) следует

$$L^p[I_k(\cdot; T)](t) = O\big(I_{k-p}(r; T)\big) = O\Big(\int_0^r t^{\lambda+1}(r^2-t^2)^{k-p}\,\mathrm{d}t\Big)$$
$$= O\Big(r^{2(k-p)}\int_0^r t^{\lambda+1}\,\mathrm{d}t\Big) = O\big(r^{\lambda+2(k+1-p)}\big), \quad r \to 0, +\infty.$$

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Для $p + q = n - 1$, где $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$, имеем*

$$\lim_{t \to 0, +\infty} \frac{1}{t}\, L^{p-1}[I_{n-2}(\cdot, T)](t)\, M^q[\varphi_\lambda](t) = 0.$$

Доказательство. По Леммам 3 и 4 при $t \to 0$ получаем

$$\frac{1}{t}\, L^{p-1}[I_{n-2}(\cdot, T)](t)\, M^q[\varphi_\lambda](t) = \frac{1}{t}\, O\big(t^{\lambda+2(n-p)}\big) \cdot O\big(t^{2\lambda-1-2q}\big) = O(t^{3\lambda}).$$

По тем же Леммам 3 и 4 при $t \to +\infty$ имеем

$$\frac{1}{t}\, L^{p-1}[I_{n-2}(\cdot, T)](t)\, M^q[\varphi_\lambda](t) = \frac{1}{t}\, O\big(t^{\lambda+2(n-p)}\big) \cdot O\big(t^{-2\lambda-1-2q}\big) = O(t^{-\lambda}).$$

Лемма 5 доказана. □

Закончим доказательство Гипотезы 1 для $\lambda \leqslant 1$. По (10) левая часть (6) равна

$$J \overset{(11)}{:=} \int_0^{+\infty} T(t)\varphi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \overset{(8)-(7)}{=} \frac{1}{2^{n-2}\cdot(n-2)!}\int_0^{+\infty} L^{n-1}[I_{n-2}(\cdot,T)](t)\,M^0[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t$$

Используем $n-1$ раз Лемму 2 и получим

$$J = \frac{1}{2^{n-2}\cdot(n-2)!}\int_0^{+\infty} L^0[I_{n-2}(\cdot,T)](t)\,M^{n-1}[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n-2}\cdot(n-2)!}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t T(\tau)(t^2-\tau^2)^{n-2}\tau\,\mathrm{d}\tau\right)M^{n-1}[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t.$$

Отсюда по соотношению (14) Леммы 2 из условия (5) ввиду положительности функции $M^{n-1}[\varphi_\lambda]$ для $\lambda \leqslant 1$ получаем

$$J \leqslant \frac{1}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{\lambda+2(n-1)}\,M^{n-1}[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\int_0^{+\infty} L^0\big[t^{\lambda+2(n-1)}\big]\,M^{n-1}[\varphi_\lambda](t)\,\mathrm{d}t.$$

Вновь, используя $n-1$ раз Лемму 2, устанавливаем оценку

$$J \leqslant \frac{1}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\int_0^{+\infty} L^{n-1}\big[t^{\lambda+2(n-1)}\big]\varphi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{t^{3\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}dt\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda+2k) = \frac{1}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2}}{(1+t)^2}dt\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\lambda}{2k}\Big).$$

Отсюда, интегрируя по частям последний интеграл, получаем

$$J \leqslant \frac{1}{4\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-1/2}}{(1+t)}\,\mathrm{d}t\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\lambda}{2k}\Big).$$

Интеграл здесь легко (после Л. Эйлера) вычисляется с помощью вычетов и равен π [3, гл. V, 74, Пример 3]. Значит последнее неравенство совпадает с неравенством (6). Это завершает доказательство Гипотезы 1 для $\lambda \leqslant 1$. □

3. Эквивалентные версии Гипотезы 1

Лемма 6 ([4, Предложение 5.1]). *Функция $S\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ с $S(0)=0$ — возрастающая и выпуклая относительно* log, *если и только если найдется возрастающая функция $s\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$, дающая представление*

$$S(x) = \int_0^x \frac{s(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Используя Лемму 6 вместе с Леммой 1 для условия $S(0)=0$, можем записать интеграл из (1) в виде

$$\int_0^1 S(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1\left(\int_0^{tx}\frac{s(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)\,\mathrm{d}(1-x^2)^{n-1}.$$

Интегрирование по частям дает равенство

$$\int_0^1 S(tx)(1-x^2)^{n-2}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1\frac{s(tx)}{x}(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$

Аналогично для интеграла (2) имеем

$$\int_0^{+\infty}S(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{s(t)}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^{2\lambda})}\,.$$

Таким образом, соотношения (1) и (2) переходят соотв. в неравенства

$$\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1\frac{s(tx)}{x}(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x\leqslant t^{\lambda}\quad\text{для всех }\ 0\leqslant t<+\infty\,,$$

$$\frac{1}{2\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{s(t)}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{2\lambda}}\leqslant\frac{\pi(n-1)}{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr)=\frac{\pi(n-1)}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{B}(\lambda/2,n)}\,,$$

где функция $s\geqslant 0$ — возрастающая, а в последнем равенстве использованы те же свойства бета-функции Эйлера [3, гл. VII, § 1], что и в (3). Но мы не уменьшим общности рассмотрения, если вместо такой произвольной функции s будем рассматривать произвольную возрастающую функцию $h\geqslant 0$, определенную заменой $h(x^2):=\frac{1}{4(n-1)}\,s(x)$, $x\geqslant 0$, что преобразует последнюю пару соотношений в условие и неравенство

$$2\int_0^1\frac{h(t^2x^2)}{x}(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x\leqslant (t^2)^{\lambda/2}\quad\text{для всех }\ 0\leqslant t<+\infty\,,$$

$$2\int_0^{+\infty}\frac{h(t^2)}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{2\lambda}}\leqslant\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr)=\frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mathrm{B}(\lambda/2,n)}\,,$$

Отсюда после замен

$$x^2=x',\quad t^2=t',\quad \lambda/2=\alpha>1/2$$

и переобозначения переменных x' и t' прежними x и t получаем

$$\int_0^1\frac{h(tx)}{x}\,(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\leqslant t^{\alpha}\quad\text{для всех }\ 0\leqslant t<+\infty\,,\tag{18a}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{h(t)}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{2\alpha}}\leqslant\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\alpha}{k}\Bigr)=\frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,n)}\,.\tag{18b}$$

Таким образом, Гипотезе 1 с $\lambda>1$ эквивалентна более простая

Гипотеза 2. *Пусть $\alpha>1/2$. Для любой возрастающей функции $h\geqslant 0$ на $[0,+\infty)$ из условия* (18a) *следует неравенство* (18b).

Возможна еще одна версия рассмотренных гипотез. Во-первых отметим, что из некоторых соображений достаточно доказывать наши гипотезы для гладких функций. Так, можем предполагать, что функция h в Гипотезе 2 непрерывно дифференцируема, т. е. $q:=h'\geqslant 0$ на $(0,+\infty)$. Тогда интегрированием по частям получается эквивалентная Гипотезам 1 и 2

Гипотеза 3. *Пусть $\alpha>1/2$. Если q — положительная непрерывная функция на* $[0,+\infty)$, *то из условия*

$$\int_0^1\Bigl(\int_x^1(1-y)^{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{y}\Bigr)q(tx)\,\mathrm{d}x\leqslant t^{\alpha-1}\quad\textit{для всех }\ 0\leqslant t<+\infty\tag{19}$$

следует оценка

$$\int_0^{+\infty} q(t)\log\Big(1+\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant \pi\alpha\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\alpha}{k}\Big) = \frac{\pi}{\mathrm{B}(\alpha,n)}\,.$$

Внутренний интеграл в левой части (19) легко вычисляется и может быть заменен на сумму:

$$\int_x^1 (1-y)^{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\log x + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}\,(1-x^k).$$

4. Некоторые оценки интеграла из (2) при условии (1)

В этом последнем разделе мы приведем некоторые оценки, которые не “дотягивают” до Гипотезы 1, но представляют некоторый интерес. Первая из них сразу следует из заключения eqrefest:S Леммы 1 и цепочки равенств (4).

Утверждение 2. *Пусть* $S\in\mathrm{Inc}^+\big([0,+\infty)\big)$, $\lambda\geqslant 0$ *и для* $2\leqslant n\in\mathbb{N}$ *выполнено условие* (1). *Тогда справедлива оценка*

$$\int_0^{+\infty} S(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+2\cdot\frac{n-1}{\lambda}\right)^{\lambda/2}. \tag{20}$$

По схеме доказательства последнего неравенства в [1, Основная лемма] может быть установлено

Утверждение 3. *В условиях Гипотезы* 1 *справедлива оценка*

$$\int_0^{+\infty} S(t)\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi(n-1)}{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1} b\Big(\frac{\lambda}{2k}\Big), \tag{21}$$

где функция $b\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *определена по правилу*

$$b(x) := \begin{cases} e^x & \text{при } x\leqslant 1,\\ ex & \text{при } x>1,\end{cases}$$

и удовлетворяет неравенству $b(x)\leqslant e(1+x)$ *при всех* $x\geqslant 0$.

Обсуждения Гипотезы 1 приведены также в [5] и [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хабибуллин Б. Н., *Проблема Пэли для плюрисубгармонических функций конечного нижнего порядка* // Математический сборник. 1999. Т. 190. №2. С. 145–157.
2. Хабибуллин Б. Н., *The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in* $\mathbb{C}^n$*: survey of some results* // Математическая физика, анализ, геометрия (Украина). 2002. Т. 9. № 2. С. 146–167. Электронная версия по адресам http://arxiv.org/abs/math.CV/0502433 или http://math.bsunet.ru/khb .
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного* «Наука». Москва. 1987. 688 стр.
4. Кондратюк А. А. *Ряды Фурье и мероморфные функции* Изд-во «Вища школа». Львов. 1988.
5. Khabibullin B. N. *A conjecture on some estimates for integrals* // В электронном архиве http://arxiv.org/abs/1005.3913 , arXiv:1005.3913v1 [math.CV]
6. *Khabibullin's conjecture on integral inequalities* // Статья в Википедии. 2010. Электронный адрес http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Inequalities .

Рустам Алексеевич Баладай,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `baladaichik@mail.ru`

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Khabib-Bulat@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 37-43.

УДК 517.537.7

ПОВЕДЕНИЕ МИНИМУМА МОДУЛЯ РЯДА ДИРИХЛЕ НА СИСТЕМЕ ОТРЕЗКОВ

А.М. ГАЙСИН, Ж.Г. РАХМАТУЛЛИНА

Аннотация. Рассматривается задача об асимптотической эквивалентности логарифмов точной верхней грани модуля суммы целого ряда Дирихле на вертикальной прямой и ее минимума модуля. В общем случае минимум модуля берется по некоторому компакту, в определенном смысле мало отличающемуся от вертикального отрезка фиксированной длины.

Найдены оптимальные ограничения на последовательность показателей ряда, при которых требуемое соотношение имеет место всюду на положительном луче кроме, быть может, множества конечной меры.

Ключевые слова: ряды Дирихле, минимум модуля.

1. Формулировка теоремы.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it) \tag{1}$$

— ряд Дирихле, абсолютно сходящийся на всей плоскости.

Если выполняется условие

$$S_\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty\,, \tag{2}$$

то говорят, что последовательность Λ имеет лакуны Фейера, а ряды вида (1) называют *рядами Дирихле с лакунами Фейера.*

Пусть

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|, \quad m_F(\sigma, h) = \min_{|t|\leqslant h} |F(\sigma + it)|, \quad 0 < h < \infty.$$

Через $\mu(\sigma) = \max_n \{|a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}$ обозначим максимальный член ряда (1).

Предположим дополнительно, что

$$\int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2}\, dt < \infty\,, \tag{3}$$

A.M. Gaisin, Zh.G. Rakhmatullina, Behaviour of the minimum of the modulus of the Dirichlet series on the system of segments.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00779-а, грант 08-01-97023-Р-а Поволжье).

Поступила 1 июля 2010 г.

где $c(t) = \max\limits_{\lambda_n \leqslant t} q_n$, $q_n = -\ln|q'(\lambda_n)|$,

$$q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\Big)\,. \tag{4}$$

Отметим, что (2) есть условие роста, а (3) — условие на шаг (близость) и концентрацию точек последовательности Λ.

Справедливы следующие утверждения:

1. Для того чтобы для любой функции F вида (1) при $\sigma \to \infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset [0,\infty)$ нулевой плотности имело место асимптотическое равенство
$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1))\ln|F(\sigma)|\,, \tag{5}$$
необходимо [1] и достаточно [2], чтобы выполнялись условия (2) и (3).
2. Пусть выполняется условие (3). Если
$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}\ln\frac{\lambda_n}{n} < \infty\,, \tag{6}$$
то при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0,\infty)$ нулевой плотности [2]
$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1))\ln m_F(\sigma, h)\,. \tag{7}$$
3. Если выполнены условия (2) и (3), то для любой кривой γ, уходящей в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \to \infty$, то $\operatorname{Re} s \to +\infty$, верно равенство [1]
$$d(F;\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{\substack{s\in\gamma\\ s\to\infty}} \frac{\ln|F(s)|}{\ln M_F(\operatorname{Re} s)} = 1 \tag{8}$$
(необходимость условий доказана в [3] и [1] соответственно).

Таким образом, видим, что если γ лежит в некоторой горизонтальной полосе $S_h = \{s\colon |\operatorname{Im} s| \leqslant h\}$, а пару условий (2), (3) заменить на условия (3), (6), то вместо (8) имеет место более сильное асимптотическое равенство (7). Возникает естественный вопрос: сохранится ли асимптотическое равенство (7), если отказаться от условия (6)? Оказывается, в этом случае имеет место некоторое промежуточное между равенствами (7) и $d(F;\gamma) = 1$ утверждение, а именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (2), (3). *Тогда существует множество $E \subset [0,\infty)$ конечной меры, такое, что для любого вертикального отрезка $I_H(\sigma) = \{s = \sigma + it\colon |t - t_0| \leqslant H\}$ ($H = \text{const}$) для всех $\sigma \geqslant \sigma_0$ вне E найдется измененный отрезок $I_H^*(\sigma)$, обладающий свойствами:*

1) $\operatorname{mes}(I_H(\sigma) \cap I_H^*(\sigma)) \to 2H$ *при* $\sigma \to \infty$;
2) $\ln M_F(\sigma + d(\sigma)) < \ln M_F(\sigma) + o(1)$ *при* $\sigma \to \infty$ *вне* E,
где $d(\sigma) = \max\limits_{s\in I_H^*(\sigma)} |\operatorname{Re} s - \sigma|$;
3) $\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1))\ln m_F^*(\sigma)$ *при* $\sigma \to \infty$ *вне* E,
где $m_F^*(\sigma) = \min\limits_{s\in I_H^*(\sigma)} |F(s)|$.

Заметим, что в данной теореме отрезок $I_H(\sigma)$ — любой, и он, вообще говоря, не обязан содержаться при всех значениях σ в какой-то фиксированной полосе S_h.

2. Вспомогательные леммы.

Для различных классов монотонных функций введем следующие обозначения. Пусть L — класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функций $w = w(x)$, таких, что $0 < w(x) \uparrow \infty$, $x \to \infty$, $W = \Big\{ w \in L \colon \int\limits_1^\infty \dfrac{w(x)}{x^2}\, dx < \infty \Big\}$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность показателей ряда Дирихле (1), $n(t)$ — считающая функция последовательности Λ: $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Вместе с $n(t)$ рассмотрим также функцию $N(t) = \int\limits_0^t \dfrac{n(x)}{x}\, dx$.

Заметим, что при условии (2) функция $N(t)$ принадлежит классу W. Действительно, $S_\Lambda < \infty$ равносильно сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{dn(t)}{t} < \infty$, и все следует из равенства

$$\int\limits_1^\infty \frac{N(t)}{t^2}\, dt = -\left.\frac{N(t)}{t}\right|_1^\infty + \int\limits_1^\infty \frac{dN(t)}{t} = -\left.\frac{N(t)+n(t)}{t}\right|_1^\infty + \int\limits_1^\infty \frac{dn(t)}{t}\,.$$

Для характеристики исключительных множеств вещественной оси, вне которых будут получены оценки, будем пользоваться понятием ν-меры.

Пусть $\nu(r)$ — неубывающая абсолютно непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция. Она определяет ν-меру на $\mathbb{R}_+$ по правилу

$$\nu\text{-}\mathrm{mes}\,(e) = \int\limits_e \nu'(r)\, dr,$$

где e — произвольное борелевское множество из $\mathbb{R}_+$.

Верхней ν-плотностью измеримого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ называется величина

$$\nu\text{-}\overline{\mathrm{dens}}\, E = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\nu\text{-}\mathrm{mes}\, E_r}{\nu(r)}, \quad E_r = E \cap [0, r].$$

Если в последнем равенстве знак $\overline{\lim}$ заменить знаком $\underline{\lim}$, получим определение нижней ν-плотности (ν-$\underline{\mathrm{dens}}\, E$). Если ν-$\overline{\mathrm{dens}}\, E = \nu$-$\underline{\mathrm{dens}}\, E$, то говорят, что множество E имеет ν-плотность (ν-$\mathrm{dens}\, E$). При $\nu(r) \equiv r$ ν-плотность называется линейной, а при $\nu(r) \equiv \ln r$ — логарифмической.

В дальнейшем (если не оговорено противное) считаем, что все исключительные множества E из $\mathbb{R}_+$ допускают покрытие отрезками вида $\Delta_n = [a_n, a'_n]$, $a_n \uparrow \infty$ (отрезки попарно не имеют общих внутренних точек), причем, говоря о мере множества E, всегда будем иметь в виду меру множества $E' = \bigcup\limits_n \Delta_n$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 ([4], [5])**.** *Пусть функция $g(z)$ аналитична и ограничена в круге $\{z \colon |z| < R\}$, $|g(0)| \geqslant 1$. Если $0 < r < 1 - N^{-1}$ $(N > 1)$, то существует не более чем счетное множество кружков*

$$V_n = \big\{ z \colon |z - z_n| \leqslant \rho_n \big\}, \quad \sum_n \rho_n \leqslant R r^N (1 - r),$$

таких, что для всех z из круга $\{z \colon |z| \leqslant Rr\}$, но вне $\bigcup\limits_n V_n$ справедлива оценка

$$\ln|g(z)| \geqslant \frac{R - |z|}{R + |z|} \ln|g(0)| - 5NL\,, \tag{9}$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |g(Re^{i\theta})|\, d\theta - \ln|g(0)|.$$

Отметим, что $L \geqslant 0$. При $L = 0$ оценка (9) следует из неравенства Гарнака, и она верна всюду в круге $\{z\colon |z| < R\}$ (см. в [4]).

Оказывается, в условиях леммы 1 об исключительных кружках можно сказать нечто большее. Верна

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда имеется конечное число кружков* $V_n = \{z\colon |z - z_n| < \rho_n\}$ $(1 \leqslant n \leqslant m)$ *с общей суммой радиусов*

$$\sum_{n=1}^{m} \rho_n \leqslant Rr^N, \quad r < 1 - \frac{1}{N} \ (N > 1), \tag{10}$$

вне которых в круге $\{z\colon |z| \leqslant Rr\}$ *верна оценка*

$$\ln|g(z)| - \frac{R - |z|}{R + |z|} \ln|g(0)| \geqslant -6NL\,. \tag{11}$$

Доказательство. При $L = 0$ утверждение верно (см. замечание к лемме 1). Пусть теперь $L > 0$.

Оценка (9) справедлива в каждой так называемой легкой точке круга $\overline{D} = \{z\colon |z| \leqslant Rr\}$ [4] (см. также в [6]). Остальные точки круга $\overline{D}$ называются тяжелыми. С каждой тяжелой точкой z связан некоторый круг (см. в [7], [4]) $K_z = \{\xi\colon |\xi - z| \leqslant \rho_z\}$. Как известно, из покрытия множества тяжелых точек кругами K_z ограниченного радиуса ρ_z можно выделить не более чем счетное, при котором каждая тяжелая точка будет покрыта не более чем шестью кружками [8]. В круге $\overline{D}$ функция g имеет лишь конечное число нулей $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Очевидно, они все являются тяжелыми точками.

Несколько увеличивая радиусы исключительных кружков, можно считать, что оценка (9) верна вне объединения открытых кружков $V_n = \{z\colon |z - z_n| < \rho_n\}$ с общей суммой радиусов

$$\sum_{n} \rho_n \leqslant Rr^N, \quad r < 1 - \frac{1}{N}, \ N > 1.$$

Тогда для всех $z \in \overline{D}$ вне $V = \bigcup\limits_n V_n$ подавно верна оценка

$$y(z) > -6NL, \quad y(z) = \ln|g(z)| - \frac{R - |z|}{R + |z|} \ln|g(0)|. \tag{12}$$

Далее, выкидывая из $\overline{D}$ все открытые кружки из V, содержащие $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (их не более $6n$ штук), получим замкнутое множество, которое обозначим через C. Пусть

$$B = \bigl\{z \in C\colon y(z) \leqslant -6NL\bigr\}.$$

Множество B замкнуто и $B \subset V$. Следовательно, по лемме Гейне–Бореля существует конечное число кружков из V, покрывающих B. Значит, для любого z из $C\backslash B$ вне указанных кружков верна оценка (12).

Таким образом, для любого $L \geqslant 0$ справедливо неравенство (11). $\square$

3. Доказательство теоремы.

Пусть выполнена пара условий (2), (3). Через $w = w(t)$ обозначим любую, но фиксированную функцию из класса W, такую, что $\max(\sqrt{t},\, N(et),\, c(t)) \leqslant w(t)$. Здесь $c(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{-\ln|q'(\lambda_n)|\}$ (q — произведение Вейерштрасса (4)). Ввиду условий (2), (3) такая функция w имеется. Найдется $w^* \in W$ вида $w^*(t) = \beta(t)w(t)$ ($\beta \in L$, $1 \leqslant \beta(t)$). Как и в [2] через $v = v(\sigma)$ обозначим решение уравнения

$$w_1(v) = 3\ln\mu(\sigma)\,,$$

где $w_1(t) = \sqrt{\beta(t)}w(t)$, $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (1). Показано [2], что при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры имеют место оценки:

$$\begin{aligned} &1) \quad \ln M_F(\sigma+\delta^*) < (1+o(1))\ln M_F(\sigma);\\ &2) \quad M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|\xi-\alpha|\leqslant\delta}|F(\xi)|, \end{aligned} \tag{13}$$

где α ($\operatorname{Re}\alpha = \sigma$)— любое комплексное число, $\delta = \delta(v) = \dfrac{w_1(v)}{v}$, $\delta^* = \delta^*(v) = \dfrac{w^*(v)}{v}$, $v = v(\sigma)$.

Пусть $D_a = \mathbb{R}_+ \setminus E$ (D_a называется асимптотическим множеством). Тогда для $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to \infty$ из (13), очевидно, имеем

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{\xi\in K}|F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{14}$$

где $\xi^* \in \partial K$, K — описанный вокруг круга $\overline{D}(\alpha,\delta) = \{\xi\colon |\xi-\alpha| \leqslant \delta\}$ квадрат, стороны которого параллельны осям координат.

Применим теперь лемму 2 к функции $g(z) = F(z+\xi^*)$, полагая $N = 4$, $R = \delta^*$, $r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta(v)}}$. Так как $Rr = 2\sqrt{2}\,\delta$ — длина диагонали квадрата K, то $K \subset \overline{D}(\xi^*, Rr)$. Если $r < 1 - \dfrac{1}{N}$, то согласно лемме 2 для всех z из круга $\overline{D}(\xi^*, Rr)$ вне конечного числа исключительных кружков V_n, радиусы которых удовлетворяют условию (10), при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to \infty$ верна оценка

$$|F(\xi^*)| \leqslant |F(z)|^{1+o(1)} \leqslant M_F^{1+o(1)}(\sigma+\delta^*). \tag{15}$$

Количество исключительных кружков для каждого квадрата свое. Обозначая это число через $m(K)$, имеем

$$\sum_{n=1}^{m(K)} \rho_n \leqslant Rr^4 \leqslant \frac{64\,\delta}{\beta^{3/2}(v)}. \tag{16}$$

Таким образом, из (14), (15) получаем, что при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma) = (1+o(1))\ln|F(z)|, \tag{17}$$

если $z \in K \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{m(K)} V_n$ (K — рассмотренный выше квадрат с центром в точке $\alpha = \sigma + it$).

Для любого $\sigma \in D_a$ рассмотрим прямоугольник $P = \{z = x+iy\colon |\sigma - x| \leqslant \delta,$ $|y - t_0| \leqslant H\}$ ($H = \mathrm{const}$). В [2] показано, что если выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln\frac{\lambda_n}{n} < \infty,$$

то общая сумма диаметров исключительных кружков квадратов типа K, покрывающих P, есть величина $o(\delta)$ при $\sigma \to \infty$. Поэтому прямоугольник P содержит некоторый вертикальный отрезок I длины $|I| = 2H$, не пересекающийся с исключительным множеством. В условиях теоремы 1, как видно из оценки (16), каждый квадрат K обладает таким свойством, но общая сумма диаметров кружков из P есть $O\Big(\dfrac{1}{\beta^{3/2}(v)}\Big)$ при $\sigma \to \infty$. По этой причине P может и не содержать никакого вертикального отрезка длины $2H$, целиком свободного от точек исключительного множества (функция $\beta(v)$ может расти не так быстро). Поэтому поступим следующим образом.

Рассмотрим минимальное число квадратов типа K, не имеющих попарно общих внутренних точек и покрывающих P. Исключительное множество $e = \{e_i\}$ прямоугольника P состоит из исключительных кружков e_i квадратов покрытия и их конечное число. Кружки e_i могут пересекаться и образовывать так называемые гроздья $d_K = \bigcup\limits_{i=1}^{m_K} e_i$ — связные компоненты e.

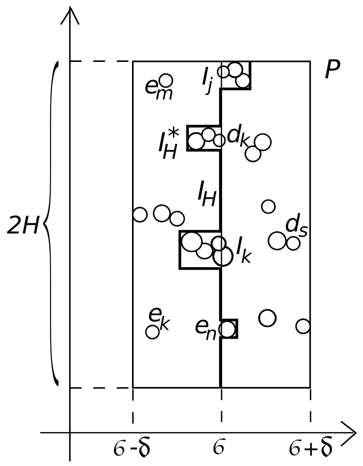

Рис. 1. Измененный отрезок

Пусть Π — проекция множеств d_K, имеющих непустое пересечение с отрезком $I_H(\sigma)$, на этот отрезок. Тогда $\Pi = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$, где I_j — некоторые попарно не пересекающиеся отрезки, $I_j \subset I_H(\sigma)$, причем в силу (16)

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| \leqslant 2\sum_{j=1}^{n} \rho_j \leqslant \frac{\text{const}}{\beta^{3/2}(v)} \leqslant qH \quad (0 < q < 1)$$

при $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Измененный отрезок $I_H^*(\sigma)$ строится следующим образом. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ находим наименьший прямоугольник P_j со стороной I_j и охватывающий соответствующие множества d_K. Участок I_j отрезка $I_H(\sigma)$ заменим на ломаную $\gamma_j = \partial P_j \setminus I_j$. Если P_j примыкает к какой-то горизонтальной стороне P, то из γ_j исключаем и отрезок, целиком лежащий на этой стороне P. Проделав эту процедуру с каждым отрезком I_j, получим требуемый “отрезок” $I_H^*(\sigma)$ (см. рис. 1).

Из непрерывности функции F следует справедливость оценки (17) и на границах гроздей d_K. Следовательно, оценка (17) имеет место на всем “отрезке” $I_H^*(\sigma)$ и при $\sigma \in D_a$, и $\sigma \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma),$$

где $m_F^*(\sigma) = \min\limits_{s \in I_H^*(\sigma)} |F(s)|$.

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайсин А.М. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Матем. сб. Т. 194, №8. 2003. С. 55–82.
2. Гайсин А.М. *Об одной теореме Хеймана* // Сиб. матем. журн. Т. 39, №3. 1998. С. 501–516.
3. Юсупова Н.Н. *Асимптотика рядов Дирихле заданного роста.* Дисс. ...канд. физ.-мат. наук, Башкирский гос. ун-т, Уфа. 2009.
4. Гайсин А.М. *Об одной гипотезе Полиа* // Изв. РАН. Сер. мат. Т. 58, №2. 1994. С. 73–92.
5. Гайсин А.М. *Поведение суммы ряда Дирихле заданного роста* // Матем. заметки. Т. 50, №4. 1991. С. 47–56.
6. Гайсин А.М. *Асимптотические свойства функций, заданных рядами экспонент.* Дисс. ...докт. физ.-мат. наук, Ин-т матем. с ВЦ УНЦ РАН, Уфа. 1994.
7. Говоров Н.В. *Об оценке снизу функции, субгармонической в круге* // Теория функций, функц. анал. и их прил., Харьков №6. 1968. С. 130–150.
8. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука. 1966.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `gaisinam@mail.ru`

Жанна Геннадьевна Рахматуллина,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `rakhzha@gmail.com`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 44-51.

УДК 517.54, 517.574

О ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛОГАРИФМОМ МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

В.И. ЛУЦЕНКО, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Изучается степень возможной точности асимптотической аппроксимации субгармонической функции логарифмом модуля целой функции. Доказано, что если субгармоническая функция u дважды дифференцируема и удовлетворяет условию

$$m \le |z|\Delta u(z) \le M, \ |z| > 0,$$

где $M, m > 0$, то аппроксимация с точностью $q \ln |z| + O(1)$ с константой $q \in (0, \frac{1}{4})$ возможна лишь вне множеств, не являющихся C_0-множеством. С другой стороны, показано, что аппроксимация с точностью $q \ln |z| + O(1)$ с константой $q \ge \frac{1}{4}$ возможна вне множеств, допускающих покрытие кругами $B(z_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|z_k| \le R} r_k = O(R^{\frac{3}{4}-q})$$

при $q \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ и

$$\sum_{|z_k| \ge R} r_k = O(R^{\frac{3}{4}-q})$$

при $q > \frac{3}{4}$. В частности, эти множества являются C_0-множествами при $q > \frac{1}{4}$. Во втором случае аппроксимирующая функция одна и та же для всех $q \ge \frac{1}{4}$, и эта функция получается небольшой модификацией функций типа синуса, построенных Любарским Ю. и Содиным М.

Ключевые слова: субгармонические функции, целые функции.

1. Введение

В работе [1] В.С. Азариным доказано, что для любой субгармонической функции $u(z)$, имеющей конечный тип при порядке $\rho > 0$, то есть удовлетворяющей условию

$$u(z) \le Const.|z|^\rho, \quad z \in \mathbb{C}, \ |z| > 1,$$

существует целая функция f, удовлетворяющяя соотношению

$$|u(z) - \ln |f(z)|| = o(|z|^\rho), \quad |z| \longrightarrow \infty, \ z \notin E.$$

При этом исключительное множество E является C_0-множеством, это значит, что множество E можно покрыть системой кругов $D(z_j, r_j)$ так, что

$$\sum_{|z_j| \le R} r_j = o(R), \quad R \longrightarrow \infty.$$

V.I. Lutsenko, R.S. Youlmukhametov, On the accuracy of the asymptotic approximation of subharmonic functions of the logarithm of the modulus of an entire function.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00233-а).
Поступила 3 июля 2010 г.

(см. [2], стр. 120). Эта теорема явилась далеко идущим обобщением известных в теории целых функций утверждений о существовании целых функций вполне регулярного роста с заданной индикатриссой роста (см. [2], стр.151). В 1985 г. теорема Азарина В.С. была существенно уточнена в работе [3], где доказано утверждение

Теорема A. *Для любой субгармонической функции $u(z)$ конечного порядка существует целая функция f такая, что для любого $\alpha \geq 0$ найдется постоянная $C_\alpha > 0$ так, что*

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \leq C_\alpha \ln|z|, \quad |z| \longrightarrow \infty, \ z \notin E_\alpha.$$

При этом исключительное множество E_α можно покрыть системой кругов $D(z_j, r_j)$ так, что

$$\sum_{|z_j| \geq R} r_j = o(R^{-\alpha}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

Целые функции с такими асимптотическими свойствами находят эффективное использование в вопросах полноты, минимальности и базисности систем экспонент. Именно в работе [4] для такого использования Б.Я. Левиным было введено понятие целой функции типа синуса. Так названы целые функции f, которые вне кругов некоторого радиуса δ с центрами в нулях удовлетворяют оценке

$$\ln|f(z)| = |\mathrm{Re}\ z| + O(1), \quad |z| \longrightarrow \infty.$$

Затем в работе [5] были введены и использованы функции типа синуса для функции $h_D(z) = \max_{w \in D}(\mathrm{Re}\ zw)$, где D — ограниченный выпуклый многоугольник. В последующем функции типа синуса построены для функции h_D, когда кривизна $\chi(z)$ границы в точках $z \in \partial D$ удовлетворяет условию $0 < m \leq \chi(z) \leq M < \infty$ (см.[6]). Приведем здесь теорему из этой работы в несколько общей форме.

Теорема B. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция, дважды непрерывно дифференцируемая при $z \neq 0$. Если для некоторых постоянных $m, M > 0$ выполнены условия*

$$m \leq |z|\Delta u(z) \leq M, \quad |z| > 1,$$

тогда существует целая функция f, такая, что для некоторого $\varepsilon > 0$ круги $D(z_k, \varepsilon\sqrt{|z_k|})$, где z_k, $k = 1, 2, ...,$ — нули функции f попарно не пересекаются и вне объединения этих кругов выполняется оценка

$$|u(z) - \ln|f(z)|| = O(1), \quad |z| \longrightarrow \infty.$$

В работе [7] вводится следующее, более общее определение функций типа синуса.

Определение. *Пусть u непрерывная субгармоническая функция на плоскости и $\tau(u, z)$ — радиус наибольшего круга с центром в точке z, в котором функция u отклоняется от пространства гармонических функций на этом круге не более чем на 1:*

$$\tau(u, z) = \sup\{r : \ \exists h(w) \text{ — гармоническая функция в круге } B(z, r) : \max_{w \in B(z,r)} |h(w) - u(w)| \leq 1\}.$$

Функцией типа синуса для функции u будем называть целую функцию L, удовлетворяющую условиям

1. Все нули z_n, $n \in \mathbb{N}$, функции L простые и при некотором $\varepsilon > 0$ круги $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n))$, $n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются.

2. При любом $\varepsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n))$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется соотношение

$$|\ln|L(z)| - u(z)| \leq A(\varepsilon).$$

Из соображений субгармоничности и из определения величины $\tau(u, z)$ вытекает свойство

$2'$. Для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется оценка сверху

$$\ln|L(z)| \leq u(z) + A_1(\varepsilon).$$

То, что данное определение включает в себя все введенные ранее определения функци типа синуса, легко проверяется вычислением величины $\tau(u, z)$ для соответствующих функций u.

В этой работе мы докажем, что приведенные выше теоремы A и B по существу не улучшаемы. А также будет показано, что определение функции типа синуса, данное выше, означает допустимо возможную точность асимптотики.

Теорема 1. *Пусть субгармоническая на плоскости функция $u(z)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{|z|} \le \Delta u(z) \le \frac{2}{|z|}, \quad |z| \ge 1. \tag{1}$$

Если для целой функции $f(z)$ при некотором $q \in (0; \frac{1}{4})$ выполняется неравенство

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le q \ln|z|, \quad z \notin E, \tag{2}$$

то для любого покрытия множества E кругами $D(z_j, r_j)$ найдется $R_q > 0$ так, что выполняется соотношение

$$\sum_{\frac{R}{2} \le |z_j| \le R} r_j \ge \frac{R}{64}, \ R > R_q.$$

Таким образом, исключительное множество E при $q < \frac{1}{4}$ не может быть C_0-множеством.

Доказательство предварим двумя простыми леммами.

Лемма 1. *Если круг $K = \{z : |z - a| < r\}$ не пересекается с кругом $\{z : |z| < 1\}$ и $h(z)$ — гармоническая мажоранта функции $u(z)$ в этом круге, то выполняются оценки*

$$\frac{r^2 - |z-a|^2}{4(|a| + r|)} \le h(z) - u(z) \le \frac{r^2 - |z-a|^2}{2(|a| - r)}, \quad z \in K. \tag{3}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $G(z, w)$ — ядро Грина круга K. Ассоциированная мера функции $u(z)$ равна $\frac{\Delta u(z) dm(z)}{2\pi}$, где $dm(z)$ — плоская мера Лебега, и по формуле Пуассона-Иенсена (см. [1], стр. 138) имеем

$$h(z) - u(z) = \int_K G(z, w) \frac{\Delta u(w) dm(w)}{2\pi}.$$

По условию (1) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int G(z, w) \frac{dm(w)}{|w|} \le h(z) - u(z) \le \frac{1}{\pi} \int G(z, w) \frac{dm(w)}{|w|}.$$

Для $w \in K$, очевидно, $|a| - r \le |w| \le |a| + r$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi(|a| + r)} \int G(z, w) dm(w) \le h(z) - u(z) \le \frac{1}{\pi(|a| - r)} \int G(z, w) dm(w).$$

Ассоциированная мера функции $|z - a|^2$ равна $\frac{2dm(z)}{\pi}$, а ее гармоническая мажоранта в круге K равна тождественно r^2, следовательно, по формуле Пуассона-Иенсена

$$\int G(z, w) dm(w) = \frac{\pi}{2}(r^2 - |z - a|^2).$$

Из последних двух соотношений вытекает утверждение леммы 1. □

Лемма 2. *Для $a \in \mathbb{C}$ через $D_0(a)$ обозначим круг $\{z : |z - a| < 7\sqrt{q|a| \ln|a|}\}$. Пусть для целой функции f выполнены условия теоремы. Тогда для всех a, таких, что*

$$|a| \ge e^8, \quad 144q \ln|a| < |a| \tag{$*$}$$

и для любого покрытия кругами $D(w_j, r_j)$ множества $E \bigcap D_0(a)$ выполняется оценка

$$\sum r_j \ge e^{-6q} \sqrt{q} |a|^{\frac{1}{2} - 2q}.$$

Доказательство. Для сокращения записи будем пользоваться обозначением $r_a = \sqrt{q|a|\ln|a|}$. Из условий $(*)$ вытекает, что $r_a < \frac{|a|}{12}$, в частности, круг $D(a) = \{z : |z-a| < 6r_a\}$ не содержит точку $z = 0$.

1. Предположим, что каждая окружность $C = \{z : |z-a| = r\}$ при $r \in [5r_a; 6r_a]$ пересекается с исключительным множеством E. Проецируя круги покрытия $D(w_j, r_j)$ по окружностям с центром в точке a на луч $\{[a; a+x) : \ x > 0\}$, получим, что сумма радиусов больше, чем $\frac{1}{2}r_a$, то есть поскольку $|a| \geq e^4$, то

$$\sum r_j \geq \frac{1}{2}\sqrt{q|a|\ln|a|} \geq \sqrt{q}|a|^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

и в этом случае утвердение леммы верно.

2. Теперь предположим, что некоторая окружность $C = \{z : |z-a| = r\}$, $r \in [5r_a; 6r_a]$, свободна от точек E.

2.1. Допустим, что в круге $K = \{z : |z-a| < r\}$ нет нулей функции f, то есть в этом круге функция $\ln|f(z)|$ гармонична. Пусть $h(z)$ — гармоническая мажоранта функции $u(z)$ в круге K. Поскольку $\ln|z|$ тоже гармоническая и на границе круга выполняется соотношение (2), то по принципу максимума

$$|h(z) - \ln|f(z)|| \leq q\ln|z|$$

во всем круге K. В круге $K_1 = \{z : |z-a| < r_a\}$ по лемме 1 имеем

$$h(z) - u(z) \geq \frac{r^2 - r_a^2}{4(|a| + r)} \geq \frac{6r_a^2}{(|a| + 6r_a)}$$

и если a удовлетворяет условию $(*)$, в частности $r_a < \frac{|a|}{12}$, то

$$h(z) - u(z) \geq 4q\ln|a|.\ z \in K_1$$

Значит, в этом круге K_1 имеем

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \geq |u(z) - h(z)| - |h(z) - \ln|f(z)|| \geq 4q\ln|a| - q\ln|z|.$$

Если a удовлетворяет условию $(*)$ и $z \in K_1$, то $|z| \leq |a| + r_a \leq \frac{13}{12}|a|$, значит, $4\ln|a| \geq 2\ln|a| + 2\ln\frac{12}{13} + 2\ln|z| > 2\ln|z|$, поэтому в круге K_1 выполняется оценка

$$|u(z) - \ln|f(z)|| > q\ln|z|.$$

Следовательно, круг K_1 лежит в множестве E. Снова проецируя круги покрытия на луч $\{[a; a+x) : \ x > 0\}$, получаем, что сумма радиусов кругов больше, чем $\frac{1}{2}r_a$, значит, выполняется соотношение (4), и утверждение леммы 2 верно и в этом случае.

2.2. Остается рассмотреть случай, когда в круге K имеется по крайней мере один нуль функции f. Обозначим этот нуль через b, итак, $b \in K \subset \{z : |z-a| < 6r_a\}$ и $f(b) = 0$. Окружности $\{z : |z-b| = r\},\ r \in [\sqrt{q|a|}; 2\sqrt{q|a|}]$ лежат в круге $D_0(a)$. Если все эти окружности пересекаются с множеством E, то сумма радиусов кругов покрытия будет не меньше $\sqrt{q|a|}$, и утверждение леммы верно. Пусть окружность $\partial K_2 = \{z : |z-b| = r\}$ при некотором $r \in [\sqrt{q|a|}; 2\sqrt{q|a|}]$ свободна от точек E. Пусть $H(z)$ — гармоническая мажоранта $u(z)$ в круге K_2, $H_f(z)$ — гармоническая мажоранта $\ln|f(z)|$ в этом же круге K_2. По лемме 1 имеем

$$|H(z) - u(z)| \leq \frac{r^2}{2(|b| - r)} \leq \frac{q|a|}{2(|a| - 6r_a - 2\sqrt{q|a|})}.$$

Отсюда, учитывая условие $(*)$ на точку a, получим

$$|H(z) - u(z)| \leq 2q. \tag{5}$$

Граница круга K_2 не пересекается с множеством E, значит, на ней выполняется соотношение (2), то есть

$$|H(z) - H_f(z)| \leq q\ln|z|,\ z \in \partial K_2.$$

в силу гармоничности $\ln|z|$ и по принципу максимума это соотношение верно и во всем круге K_2:

$$|H(z) - H_f(z)| \leq q\ln|z|,\ z \in K_2. \tag{6}$$

По формуле Пуассона-Иенсена

$$H_f(z) - \ln|f(z)| = \int G(z,w)d\mu_f(w) = \sum_{b_k \in K_2} G(z,b_k),$$

где $G(z,w)$ — функция Грина круга K_2, b_k — нули функции f. Отсюда

$$H_f(z) - \ln|f(z)| \geq G(z,b) = \ln\frac{r}{|z-b|} \geq \ln\frac{\sqrt{q|a|}}{|z-b|},$$

Отсюда и из оценок (5), (6) получаем, что в круге K_2 выполняется нижняя оценка

$$|\ln|f(z)| - u(z)| \geq |\ln|f(z)| - H_f(z)| - |H_f(z) - H(z)| - |H(z) - u(z)| \geq$$

$$\geq \ln\frac{\sqrt{q|a|}}{|z-b|} - q\ln|z| - Mq.$$

Если $z \in \{|z-b| < e^{-6q}\sqrt{q}|a|^{\frac{1}{2}-2q}\}$, то

$$|\ln|f(z)| - u(z)| \geq 4q + 2q\ln|a| - q\ln|z|.$$

При выполнении условий $(*)$ для $z \in K_2$ будет верно $|a| \geq e^{-2}|z|$, поэтому

$$|\ln|f(z)| - u(z)| > q\ln|z|,$$

и круг $D(b, e^{-6q}\sqrt{q}|a|^{\frac{1}{2}-2q})$ полностью лежит в множестве E. Проецируя круги покрытия по окружностям с центром в точке b на луч, исходящий из точки b, получим, что сумма радиусов кругов покрытия не меньше, чем $e^{-6q}\sqrt{q}|a|^{\frac{1}{2}-2q}$, и утверждение леммы 2 снова верно.

Лемма 2 доказана. □

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Пусть D — некоторое покрытие кругами $D(z_j, r_j)$ исключительного множества E. Зафиксируемся достаточно большим числом R. Через J обозначим множество индексов j, таких, что $|z_j| \leq R$. Если для некоторого $j \in J$ будет $r_j \geq R$, то

$$\sum_{|z_j| \leq R} r_j \geq R,$$

поэтому далее будем считать, что $r_j < R,\ j \in J$. Положим

$$d = 7\max_{|a| \leq R} r_a, \quad n = \left[\frac{R}{2d}\right],$$

где $[x]$ означает целую часть x, а величина r_a определена в начале докзательства леммы 2. Разобьем отрезок $[\frac{R}{2}; R]$ на n равных отрезков, длина которых будет не меньше, чем d. Середины этих отрезков обозначим через x_k и каждую окружность $\{z : |z| = x_k\}$ разделим на n равных дуг. Середины дуг обозначим через a_{km} и через B обозначим систему кругов $D_{km} = D(a_{km}, d)$, $k, m = 1, 2, ...n$. Круги D_{km} попарно не пересекаются, и общее количество N этих кругов при достаточно больших R удовлетворяет оценке

$$N = n^2 > \frac{R^2}{8d^2}. \tag{6}$$

Разобьем множество индексов J на две части: J' — множество индексов $j \in J$, для которых радиус $r_j > d$ и $J'' = J \setminus J'$.

Систему B кругов D_{km} тоже разобьем на две части: B$'$ — круги, которые пересекаются с объединением кругов покрытия $D(z_j, r_j)$ по $j \in J'$, B$''$ = B$\setminus$B$'$ — остальные круги. Пусть N_1, N_2 — количество кругов соответственно в системе B$'$ и B$''$, при этом $N_1 + N_2 = N$ и, следовательно, либо N_1, либо N_2 больше половины N. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. Предположим, что

$$N_1 \geq \frac{N}{2} \geq \frac{R^2}{16d^2}.$$

Поскольку радиусы кругов покрытия с индексами из J' больше радиуса любого круга из B, то система кругов $D(z_j, 2r_j)$ покрывает все объединение кругов из системы B$'$. Значит, площадь объединения этих кругов $D(z_j, 2r_j)$ покрытия с $j \in J'$ больше площади объединения кругов из системы B'. Таким образом,

$$\pi \sum_{j\in J'} 4r_j^2 \geq \left| \bigcup_{B_{km}\in \mathrm{B}'} B_{km} \right| \geq N_1 \pi d^2.$$

В рассматриваемом случае имеем

$$\sum_{j\in J'} r_j^2 \geq \frac{R^2}{64}.$$

Поскольку мы предполагаем, что $r_j < R$, то

$$\sum_{j\in J'} \frac{r_j}{R} > \sum_{j\in J'} \frac{r_j^2}{R^2} \geq \frac{1}{64},$$

и

$$\sum_{j\in J} r_j > \frac{1}{64} R.$$

Утверждение теоремы в этом случае доказано.

2. Предположим, что

$$N_2 > \frac{N}{2} \geq \frac{R^2}{16d^2}. \tag{7}$$

Части E, попавшие в круги из системы B'', покрываются только кругами $D(z_j, r_j)$, $j \in J''$. Радиусы этих кругов покрытия не превосходят d. Радиусы кругов из системы B'' равны d. Из этих оценок сравнением площадей нетрудно убедиться в том, что каждый круг покрытия может пересекаться с не более чем 4 кругами из системы B. В самом деле, пусть некоторый круг $D(z,r)$ покрытия пересекается с m кругами из системы B. Тогда все эти круги из системы B лежат полностью в круге $D(z, r+d)$, и их суммарная площадь меньше (они попарно не пересекаются), чем площадь круга $D(z, r+d)$:

$$m\pi d^2 < \pi(r+d)^2 \leq 4\pi d^2.$$

Это значит, что если через J_{km} обозначим множество индексов из J'' кругов покрытия, имеющих непустое пересечение с множеством $E \bigcap B_{km}$, то каждый индекс из J'' попадает в не более чем 4 множеств J_{km}. По лемме 2 имеем

$$\sum_{j\in J_{km}} r_j \geq e^{-6q}\sqrt{q}|a_{km}|^{\frac{1}{2}-2q} \geq e^{-6q}\sqrt{q}2^{2q-\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}-2q}.$$

Просуммируем эти неравенства

$$4\sum_{J''} r_j \geq N_2 e^{-6q}\sqrt{q}2^{2q-\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}-2q}.$$

Отсюда и из условия (7) получаем, что для некоторой положительной постоянной C_q будет выполняться оценка

$$\sum_{J} r_j \geq C_q \frac{RR^{\frac{1}{2}-2q}}{\ln R},$$

и если $q < \frac{1}{4}$, то при достаточно больших R имеем

$$\sum_{|z_j|\leq R} r_j \geq R.$$

Теорема 1 доказана. □

Число $q = \frac{1}{4}$ точное в смысле следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть субгармоническая на плоскости функция $u(z)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет условию*

$$\frac{A}{|z|} \le \Delta u(z) \le \frac{B}{|z|}, \quad |z| \ge 1.$$

Тогда существует целая функция $f(z)$, для которой найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \ge 0$ вне множества

$$E_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(z_k, \delta |z_k|^{-\varepsilon}),$$

где z_k — нули функции f, выполняется соотношение

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) \ln|z| + Const. \,, \quad z \notin E_\varepsilon.$$

При этом исключительное множество E_ε покрывается кругами $B(z_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|z_k| \le R} r_k = O(R^{1-\varepsilon}), \ R \longrightarrow \infty,$$

если $\varepsilon \le 1$ и

$$\sum_{|z_k| \ge R} r_k = O(R^{1-\varepsilon}), \ R \longrightarrow \infty,$$

если $\varepsilon > 1$.

Доказательство. За основу возьмем функции типа синуса из работы [6]. Пусть функция $\beta(z)$ неотрицательна, непрерывна, имеет компактный носитель и

$$\int \beta(z) dm(z) = \frac{1}{4}.$$

Тогда функция

$$u_0(z) = u(z) + \int \ln|z - w| \beta(w) dm(w)$$

удовлетворяет условиям теоремы B, причем

$$u_0(z) = u(z) + \frac{1}{4} \ln|z| + O(1), \ |z| \longrightarrow \infty. \tag{8}$$

По этой теореме существует целая функция f с нулями z_k, такая, что при некотором $\delta > 0$ круги $B_k = B(z_k, \delta\sqrt{|z_k|})$ попарно не пересекаются и вне этих кругов выполняется оценка

$$|u_0(z) - \ln|f(z)|| \le C_0. \tag{9}$$

Можно считать, что $|z_k| > 1$ и $\delta < 1$. Положим $r_k = \delta\sqrt{|z_k|}$ и через $h_k(z)$ обозначим гармоническую мажоранту функции u_0 в круге $B_k = B(z_k, r_k)$. По лемме 1 в круге $B(z_k, r_k)$ имеем

$$|u_0(z) - h_k(z)| \le C_1. \tag{10}$$

Значит, на границе круга выполняется оценка

$$|h_k(z) - \ln|f(z)|| \le C_0 + C_1.$$

По принципу максимума для субгармонических функций соотношение

$$\ln|f(z)| - h_k(z) \le C_0 + C_1 \tag{11}$$

выполняется во всем круге. Функция $g_k(z) = \frac{f(z) r_k}{z - z_k}$ аналитична в круге B_k и не имеет в нем нулей. Из (10) и (9) следует, что на границе круга имеет место оценка

$$|h_k(z) - \ln|g_k(z)|| \le C_0 + C_1,$$

которая по принципу максимума (минимума) для гармонических функций продолжается на весь круг. Поэтому в круге B_k имеем

$$\ln|g_k(z)| \ge h_k(z) - C_1 - C_0,$$

или

$$\ln|f(z)| \ge h_k(z) - \ln r_k + \ln|z - z_k| - C_1 - C_0.$$

Если при этом $z \notin E_\varepsilon$, то

$$\ln|f(z)| \geq h_k(z) - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln|z_k| - C_1 - C_0.$$

Поскольку внутри круга B_k верно

$$\ln|z_k| = \ln|z| + O(1),$$

то

$$\ln|f(z)| \geq h_k(z) - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln|z| + O(1).$$

Отсюда, учитывая (10) и (11), получаем

$$u_0(z) - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln|z| + O(1) \leq \ln|f(z)| \leq u_0(z) + O(1).$$

Вместе с (8) имеем

$$u(z) - \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\ln|z| + O(1) \leq \ln|f(z)| \leq u(z) + \frac{1}{4}\ln|z| + O(1)$$

или

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \leq \left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\ln|z| + O(1).$$

В качестве покрытия исключительного множества, удовлетворяющего условиям теоремы можно взять круги, из которых состоит это множество E_ε.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азарин В.С. *О лучах вполне регулярного роста целой функции* // Матем. сб. 1969. Т. 79, № 4. С. 463–476.
2. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.*
3. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica. 1985. Т. 11. С. 257–282.
4. Левин Б.Я. *О базисах показательных функций в* $L^2(-\pi,\pi)$ // Записки физ.-мат. фак.-та Харьковского гос. ун.-та и Харьковск. матем. об.-ва. 1961. Т. 27, № 4. С. 39–48.
5. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 3. С. 657–702.
6. Любарский Ю.И., Содин М.Л. *Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей.* Препринт №17. Харьков: Физико-технического института низких температур АН УССР. 1986. 42 с.
7. Башмаков Р.А., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Целые функции типа синуса и их применение* // Алгебра и Анализ. 2010. Т. 22, № 5.

Луценко Владимир Иванович,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `Lutsenko_v_i@mail.ru`

Юлмухаметов Ринад Салаватович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `yulmukhametov@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 52-60.

УДК 517.982.3

О ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В $\mathbb{R}^n$

И.Х. МУСИН, С.В. ПОПЁНОВ

Аннотация. Рассматривается пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, построенное при помощи некоторого семейства φ весовых функций в $\mathbb{R}^n$, растущих быстрее любой линейной функции. Изучаются задача приближения полиномами в этом пространстве и проблема описания сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов при дополнительных условиях на φ.

Ключевые слова: полиномиальная аппроксимация, преобразование Фурье-Лапласа функционалов, целые функции, теорема типа Пэли-Винера.

1. Введение

Постановка задач. Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство вещественнозначных функций $\varphi_m \in C(\mathbb{R}^n)$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

1). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$);

2). $\lim\limits_{x\to\infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty$.

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : p_m(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\le m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty\}.$$

Очевидно, $\mathcal{E}(\varphi_{m+1}) \subset \mathcal{E}(\varphi_m)$. Пусть $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}(\varphi_m)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $\mathcal{E}(\varphi)$ становится линейным пространством. Наделим $\mathcal{E}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}(\varphi_m)$.

Так как для каждого $m \in \mathbb{N}$ пространство $\mathcal{E}(\varphi_{m+1})$ вложено вполне непрерывно в $\mathcal{E}(\varphi_m)$ [1], то $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство (M^*) [1], [2].

Интерес к изучению пространств типа $\mathcal{E}(\varphi)$ был проявлен в работах [3]-[5].

В данной заметке рассматриваются следующие две задачи:

1. аппроксимация полиномами в $\mathcal{E}(\varphi)$;

2. при условии, что семейство φ состоит из функций степенного роста, описать сильное сопряженное пространство к $\mathcal{E}(\varphi)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}(\varphi)$.

Известно [6], [7], что полиномы плотны в $\mathcal{E}(\varphi)$, если семейство φ состоит из функций $\varphi_m(x) = \Phi(x) - m\ln(1 + \|x\|)$, где Φ — непрерывная вещественнозначная функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что при некоторых $C > 0, D \in \mathbb{R}$ и $\mu > 1$

$$\Phi(x) \ge C\|x\|^\mu - D,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

I.Kh. Musin, S.V. Popënov, On a weighted space of infinitely differentiable functions in $\mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00779, 08-01-97023).

Поступила 20 мая 2010 г.

При тех же условиях на φ и в предположении выпуклости Φ в $\mathbb{R}^n$ вторая задача изучалась для $n = 1$ в [6], а в случае нескольких переменных — в [7] при условии, что при некоторых $\rho > 1, \mu \in (1, \rho]$, $A > 0, B \in \mathbb{R}, C > 0, D \in \mathbb{R}$ всюду в $\mathbb{R}^n$

$$C\|x\|^{\mu} - D \leq \Phi(x) \leq A\|x\|^{\rho} + B.$$

При определённых условиях на φ в работе [8] изучалась сюръективность преобразования Фурье-Лапласа линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}(\varphi)$.

Определения, результаты. Пусть $\mathcal{E}'(\varphi)$ — пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}(\varphi)$, $\mathcal{E}^*(\varphi)$ — сильное сопряженное к $\mathcal{E}(\varphi)$.

Для произвольной вещественнозначной функции Φ в $\mathbb{R}^n$ такой, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{\|x\|} = +\infty,$$

пусть

$$\widetilde{\Phi}(x) = -\inf_{y\in\mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle + \Phi(y)),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Через $\widetilde{\varphi}$ обозначим семейство функций $\widetilde{\varphi}_m$.

Отметим, что для любого $z \in \mathbb{C}^n$ функция $f_z(\xi) = exp(i\langle\xi, z\rangle)$ принадлежит пространству $\mathcal{E}(\varphi)$, поскольку при любом $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(f_z) \leq (1 + \|z\|)^m \exp(\widetilde{\varphi}_m(Im\ z)).$$

Преобразование Фурье-Лапласа $\hat{S}$ функционала $S \in \mathcal{E}'(\varphi)$ определим по формуле

$$\hat{S}(z) = S(e^{i<\xi,z>}),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Точно так же, как в [7, лемма 4]) показывается, что $\hat{S}$ — целая функция, причем для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(D_z^{\alpha}\hat{S})(z) = S((i\xi)^{\alpha}e^{i\langle\xi,z\rangle}),\ z \in \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ — пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, $P(\widetilde{\varphi}) = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}_+} P(\widetilde{\varphi}_m)$, где

$$P(\widetilde{\varphi}_m) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_m = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{(1 + \|z\|)^m \exp(\widetilde{\varphi}_m(Im\ z))} < \infty \right\}.$$

С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $P(\widetilde{\varphi})$ становится линейным пространством. Пространство $P(\widetilde{\varphi})$ наделим топологией индуктивного предела нормированных пространств $P(\widetilde{\varphi}_m)$.

В работе установлены следующие основные результы.

Теорема 1. *Пусть φ — семейство вещественнозначных функций $\varphi_m \in C(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям 1), 2). Тогда полиномы плотны в $\mathcal{E}(\varphi)$.*

Теорема 2. *Пусть $\rho > 1$, $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — совокупность выпуклых функций в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям:*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty \quad \forall m \in \mathbb{N}$;

2) $\exists C > 0\ \exists D > 0$*:* $\varphi_1(x) \leq C||x||^{\rho} + D,\ x \in \mathbb{R}^n$;

3) $\exists a > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists b_m \geq 0$*:* $\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x) \geq a\ln(1 + ||x||) - b_m,\ x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда преобразование Фурье-Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*(\varphi)$ и $P(\widetilde{\varphi})$.

2. Аппроксимация полиномами в $\mathcal{E}(\varphi)$

Для функции $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ такой, что
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = +\infty \tag{2}$$
пусть $u^*(x) = \sup\limits_{y\ge 0}(xy - u(y)),\ u[e](x) = u(e^x),\ x \ge 0.$

Лемма 1. *Пусть непрерывная функция $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (2). Тогда*
$$(u[e]))^*(x) + (u^*[e])^*(x) \le x\ln x - x,\ x > 0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x > 0$. Найдутся точки $t \ge 0$ и $\xi \ge 0$ такие, что
$$(u[e])^*(x) = xt - u(e^t),$$
$$(u^*[e])^*(x) = x\xi - u^*(e^\xi).$$
Таким образом,
$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = xt - u(e^t) + x\xi - \sup_{\eta\ge 0}(e^\xi \eta - u(\eta)).$$
Следовательно, для любого $\eta \ge 0$
$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \le xt - u(e^t) + x\xi - e^\xi\eta + u(\eta).$$
Полагая здесь $\eta = e^t$, имеем
$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \le xt + x\xi - e^{\xi+t}.$$
Следовательно,
$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \le \sup_{y\ge 0}(xy - e^y) \le \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - e^y) = x\ln x - x.$$

Замечание. В работе [9] рассматривался класс функций u, для которых в (3) имеет место равенство.

Доказательство теоремы 1. Следуем схеме доказательства леммы 6 из [7], повторяя для полноты изложения часть использованных там рассуждений.

Для краткости пусть $\theta_m(x) = \exp(\varphi_m(x)),\ x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, то есть, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $c_m > 0$ такая, что
$$|(D^\alpha f)(x)| \le c_m \theta_m(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha| \le m. \tag{4}$$
Приблизим f полиномами в $\mathcal{E}(\varphi)$. Это будет проделано в три этапа.

1. Для $r > 0$ пусть $\Pi_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < r, j = 1,\dots,n\}$. Выберем функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ так, что supp $\chi \subseteq [-2,2], \chi(x) = 1$ для $x \in [-1,1]$, $0 \le \chi(x) \le 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. Положим $\eta(x_1,x_2,\dots,x_n) = \chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_n)$.

Пусть $f_\nu(x) = f(x)\eta(\frac{x}{\nu}),\ \ \nu \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, $f_\nu \in \mathcal{E}(\varphi)$. Покажем, что $f_\nu \to f$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\nu \to \infty$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \le \sup_{x\notin\Pi_\nu} \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)} \le \sup_{x\notin\Pi_\nu} \frac{c_{m+1}\theta_{m+1}(x)}{\theta_m(x)}.$$
Следовательно, при $\nu \to \infty$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \to 0. \tag{5}$$

Далее,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, 1\le|\alpha|\le m} \frac{|D^\alpha(f_\nu(x) - f(x))|}{\theta_m(x)} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 1\le|\alpha|\le m} \frac{|\sum\limits_{\beta\le\alpha, |\beta|<|\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} (D^\beta f)(x)\nu^{|\beta|-|\alpha|}(D^{\alpha-\beta}\eta)(\frac{x}{\nu}) + (D^\alpha f)(x)(\eta(\frac{x}{\nu})-1)|}{\theta_m(x)} \le$$

$$\le \sup_{x\in\Pi_{2\nu}\setminus\Pi_\nu, 1\le|\alpha|\le m} \frac{\sum\limits_{\beta\le\alpha, |\beta|<|\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} \nu^{|\beta|-|\alpha|}|(D^\beta f)(x)||(D^{\alpha-\beta}\eta)(\frac{x}{\nu})|}{\theta_m(x)} +$$

$$+ \sup_{x\notin\Pi_\nu, 1\le|\alpha|\le m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\theta_m(x)}$$

Пользуясь неравенством (4), заключаем, что при $\nu\to\infty$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, 1\le|\alpha|\le m} \frac{|D^\alpha(f_\nu(x)-f(x))|}{\theta_m(x)} \to 0.$$

Отсюда и из (5) следует, что для каждого $m\in\mathbb{N}$ $p_m(f_\nu - f)\to 0$ при $\nu\to\infty$. Следовательно, последовательность $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty$ сходится к f в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\nu\to\infty$.

2. Зафиксируем $\nu\in\mathbb{N}$. Пусть h — не равная тождественно нулю целая функция экспоненциального типа не выше 1, принадлежащая классу $L_1(\mathbb{R})$, и неотрицательная на вещественной прямой. Можно взять, например, $h(z) = \dfrac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}$, $z\in\mathbb{C}$. Положим $H(z_1, z_2, \dots, z_n) = h(z_1)h(z_2)\cdots h(z_n)$. Воспользовавшись теоремой Пэли-Винера [10, гл. 6], найдем постоянную $C_H>0$ такую, что для любого $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$

$$|(D^\alpha H)(x)| \le C_H\ ,\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Пусть $\int_{\mathbb{R}^n} H(x)\,dx = A$. Для $\lambda>1$ положим

$$f_{\nu,\lambda}(x) = \frac{\lambda^n}{A}\int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(y)H(\lambda(x-y))\,dy,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Очевидно, $f_{\nu,\lambda}\in\mathcal{E}(\varphi)$. Покажем, что $f_{\nu,\lambda}\to f_\nu$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\lambda\to+\infty$. Пусть $m\in\mathbb{N}$ произвольно, $r(\lambda) = \lambda^{-\frac{2n}{2n+1}}$. Для любых $\alpha\in\mathbb{Z}_+, x\in\mathbb{R}^n$

$$(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha f_\nu)(x) = \frac{\lambda^n}{A}\int_{\mathbb{R}^n}((D^\alpha f_\nu)(y) - (D^\alpha f_\nu)(x))H(\lambda(x-y))\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^n}{A}\int_{\|y-x\|\le r(\lambda)}((D^\alpha f_\nu)(y) - (D^\alpha f_\nu)(x))H(\lambda(x-y))\,dy +$$

$$+\frac{\lambda^n}{A}\int_{\|y-x\|> r(\lambda)}((D^\alpha f_\nu)(y) - (D^\alpha f_\nu)(x))H(\lambda(x-y))\,dy.$$

Обозначим слагаемые в правой части последнего равенства через $I_{1,\alpha}(x)$ и $I_{2,\alpha}(x)$, соответственно. Пусть $K_{\nu,m} = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n, |\beta|\le m+1} |(D^\beta f_\nu)(x)|$. В результате элементарных оценок получим

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\le m} |I_{1,\alpha}(x)| \le \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{n}C_H K_{\nu,m}}{A\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\lambda^{-\frac{n}{2n+1}};$$

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\le m} |I_{2,\alpha}(x)| \le \frac{2K_{\nu,m}}{A}\int\limits_{\|u\|>\lambda^{\frac{1}{2n+1}}} H(u)\,du.$$

Из этих двух оценок следует, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\le m} |(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha f_\nu)(x)| \to 0$$

при $\lambda\to+\infty$. Следовательно, $p_m(f_{\nu,\lambda} - f_\nu)\to 0$ при $\lambda\to+\infty$. Отсюда, в силу произвольности $m\in\mathbb{N}$, имеем: $f_{\nu,\lambda}\to f_\nu$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\lambda\to+\infty$.

3. Зафиксируем $\lambda > 0, \nu \in \mathbb{N}$. Приблизим $f_{\nu,\lambda}$ многочленами в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Для $N \in \mathbb{N}, x(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ пусть

$$U_N(x) = H(0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\sum\limits_{1\le i_1\le n} \cdots \sum\limits_{1\le i_k\le n} \frac{\partial^k H}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(0)x_{i_1}\cdots x_{i_k}}{k!} .$$

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$|H(x) - U_N(x)| \le \frac{\sum\limits_{1\le i_1\le n} \cdots \sum\limits_{1\le i_{N+1}\le n} \sup\limits_{\xi\in l(0,x)} \left|\frac{\partial^{N+1} H}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{N+1}}}(\xi)x_{i_1}\cdots x_{i_{N+1}}\right|}{(N+1)!} ,$$

где $l(0,x)$ — интервал, соединяющий начало и точку x. Воспользовавшись неравенством (6), получим

$$|H(x) - U_N(x)| \le \frac{C_H n^{N+1}\|x\|^{N+1}}{(N+1)!} . \tag{7}$$

Пусть $R > 0$ таково, что $supp f_\nu \subset \Pi_R$. Положим

$$V_N(x) = \frac{\lambda^n}{A}\int_{\Pi_R} f_\nu(y)U_N(\lambda(x-y))\, dy,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

V_N — многочлен степени не выше N. Покажем, что последовательность $(V_N)_{N=1}^\infty$ сходится к $f_{\nu,\lambda}$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $N \to \infty$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, x \in \mathbb{R}^n$

$$(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha V_N)(x)) = \frac{\lambda^n}{A}\int_{\Pi_R} (D^\alpha f_\nu)(y)(H(\lambda(x-y)) - U_N(\lambda(x-y)))\, dy.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (7), найдем положительные числа C_1 и C_2 такие, что при любых $N\in \mathbb{N}, |\alpha| \le m, x \in \mathbb{R}^n$

$$|(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha V_N)(x)| \le \frac{C_1 C_2^N (1+\|x\|)^{N+1}}{(N+1)!} .$$

Таким образом, для любого $N\in \mathbb{N}$

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \le \frac{C_1 C_2^N}{(N+1)!}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{(1+\|x\|)^{N+1}}{\theta_m(x)} .$$

Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Для $\sigma \in S^{n-1}$ пусть

$$\varphi_{m,\sigma}(t) = \varphi_m(\sigma t),\ t \ge 0.$$

Проведя элементарные выкладки и воспользовавшись неравенством (3), получим

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \le \frac{C_3 C_4^N}{(N+1)!}\frac{(N+1)^{N+1}}{\exp(\inf\limits_{\sigma\in S^{n-1}}(\varphi^*_{m,\sigma}[e])^*(N+1))} ,$$

где C_3 и C_4 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от N. Отсюда, пользуясь формулой Стирлинга и тем, что равномерно по $\sigma \in S^{n-1}$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(\varphi^*_{m,\sigma}[e])^*(N+1)}{N+1} = +\infty,$$

делаем вывод, что $p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \to 0$ при $N \to \infty$. Это означает, что функцию $f_{\nu,\lambda}$ удалось приблизить многочленами в $\mathcal{E}(\varphi)$ (поскольку $m \in \mathbb{N}$ было произвольно).

Из 1) — 3) следует полнота многочленов в $\mathcal{E}(\varphi)$.

3. О сильном сопряженном пространстве к $\mathcal{E}(\varphi)$ в специальном случае весовых функций

При доказательстве теоремы 2 понадобятся два следующих результата.

Лемма 2. *Пусть $\nu > 1$, а функция $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что для некоторых положительных чисел C_h, D_h*

$$h(x) \geq C_h||x||^\nu - D_h, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\xi_0(x)$ — точка, в которой достигается точная верхняя грань в $\mathbb{R}^n$ функции

$$u_x(\xi) =< x, \xi > -h(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда при некотором $K_h > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$||\xi_0(x)|| \leqslant K_h||x||^{\frac{1}{\nu-1}} + K_h.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ произвольно. Пользуясь условием на h, имеем

$$u_x(\xi) \leq \|x\| \cdot \|\xi\| - C_h\|\xi\|^\nu + D_h.$$

Так как $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n} u_x(\xi) \geq -h(0)$, то $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n} u_x(\xi)$ достигается на множестве

$$G_x = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| \cdot \|x\| \geq C_h\|\xi\|^\nu - D_h - h(0)\}.$$

Положим $L_h = D_h + h(0)$. Из условия на h следует, что $L_h \geq 0$. Пусть для $\lambda \geq 0$ T_λ — множество решений неравенства

$$\lambda x \geq C_h x^\nu - L_h,$$

принадлежащих $\mathbb{R}_+$. Это множество — отрезок вида $[0, x_2]$, где $x_2 < \infty$. Оценим x_2 сверху. Имеем

$$\lambda x_2 = C_h x_2^\nu - L_h.$$

Предположим, что $x_2 \geq 1$. Тогда

$$\lambda = C_h x_2^{\nu-1} - \frac{L_h}{x_2} \geq C_h x_2^{\nu-1} - L_h.$$

Отсюда

$$x_2 \leqslant \left(\frac{\lambda + L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}.$$

С учётом случая $x_2 < 1$, имеем

$$x_2 \leqslant \left(\frac{\lambda + L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1.$$

Отсюда, если $0 \leq \lambda \leq 1$, то

$$x_2 \leqslant \left(\frac{1 + L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1.$$

Если $\lambda > 1$, то

$$x_2 \leqslant \lambda^{\frac{1}{\nu-1}} \left(\frac{1 + L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1.$$

Положим $K_h = \left(\frac{1+L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1$. Тогда

$$x_2 \leqslant K_h(1 + \lambda^{\frac{1}{\nu-1}}).$$

Правую часть последнего неравенства обозначим через d_λ. Итак, $T_\lambda \subseteq [0; d_\lambda]$. Поскольку $\xi \in G_x \Leftrightarrow ||\zeta|| \in T_{||x||}$, то $\forall \xi \in G_x$ имеем

$$||\xi|| \leqslant K_h \cdot ||x||^{\frac{1}{\nu-1}} + K_h.$$

В частности,

$$||\xi_0(x)|| \leqslant K_h ||x||^{\frac{1}{\nu-1}} + K_h.$$

Лемма 2 доказана.

Для преобразования Фурье обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ используем символ $\mathcal{F}[f]$. $\mathcal{F}[f]$ — это функционал из $S'(\mathbb{R}^n)$, определяемый формулой

$$(\mathcal{F}[f], g) = (f, \mathcal{F}[g]), \ g \in S(\mathbb{R}^n),$$

где $\mathcal{F}[g]$ — преобразование Фурье функции g:

$$\mathcal{F}[g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} \, d\xi.$$

Определение [11], [12]. Спектральной функцией функции $f \in H(\mathbb{C}^n)$ называется обобщенная функция $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, обладающая свойствами:

1). $g(\xi) e^{-\langle y, \xi \rangle} \in S'(\mathbb{R}^n)$ при всех $y \in \mathbb{R}^n$;

2). $f(z) = \mathcal{F}[g(\xi) e^{-\langle y, \xi \rangle}](x)$ при всех $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$.

Следующий результат был получен в работе [8].

Теорема A. *Пусть ϕ — положительная выпуклая в $\mathbb{R}^n$ функция такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует $y = y(x) \in \mathbb{R}^n$, что*

$$\phi(x) = \langle y, x \rangle - \widetilde{\phi}(y),$$

и, кроме того, для некоторых постоянных $A > 0, B > 0, \beta > 0$,

$$\|y(x)\| \le A \|x\|^\beta + B, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $f(z)$ — целая в $\mathbb{C}^n$ функция, удовлетворяющая оценке

$$|f(z)| \le C(1 + \|z\|)^k e^{\widetilde{\phi}(y)},$$

где $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}^n, C > 0, k \ge 0$.

Тогда ее спектральная функция $g(\xi)$ представляется в виде суммы конечного числа обобщенных производных от непрерывных функций $g_\alpha(\xi)$, удовлетворяющих при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и некоторых $l_\alpha \in \mathbb{N}, c_\alpha > 0$ оценке:

$$|g_\alpha(\xi)| \le c_\alpha (1 + \|\xi\|)^{l_\alpha} e^{-\phi(\xi)}.$$

Теорема A является обобщением теоремы Г.И. Эскина [13] (см. также [11], [12]), в которой $\phi(x) = \|x\|^p, \ p > 1$.

Заметим ещё, что топология пространства $\mathcal{E}^*(\varphi)$ может быть описана следующим образом. Пусть $V_m = \{f \in \mathcal{E}(\varphi) : p_m(f) \le 1\}, \ m \in \mathbb{N}$. Пусть

$$V_m^0 = \{F \in \mathcal{E}'(\varphi) : |F(f)| \le 1, \quad \forall f \in V_m\}$$

— поляра в $\mathcal{E}'(\varphi)$ окрестности V_m. Образуем векторное подпространство $Q_m = \cup_{\alpha > 0} (\alpha V_m^0)$ в $\mathcal{E}'(\varphi)$, порождённое полярой V_m^0. Наделим Q_m топологией, введя норму

$$q_m(F) = \sup_{f \in V_m} |F(f)|, \ F \in Q_m.$$

Очевидно, $\mathcal{E}'(\varphi) = \cup_{m=1}^\infty Q_m$. Определим в $\mathcal{E}'(\varphi)$ топологию λ внутреннего индуктивного предела пространств Q_m. Поскольку $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство (M^*), то $\mathcal{E}(\varphi)$ — монтелевское [2, Предложение 7], а значит, и рефлексивное пространство. Поэтому $\mathcal{E}(\varphi)$ относится к классу так называемых правильных пространств [14, стр. 699]. Следовательно, сильная топология в $\mathcal{E}'(\varphi)$ совпадает с топологией λ.

Доказательство теоремы 2. Если $S \in \mathcal{E}'(\varphi)$, то найдутся числа $c > 0, m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|S(f)| \leq cp_m(f)\ ,\ f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Следовательно,

$$|\hat{S}(z)| \leq c(1 + \|z\|)^m \exp(\widetilde{\varphi}_m(Im\ z)),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Таким образом, линейное отображение $\mathcal{A}$, сопоставляющее всякому функционалу $S \in \mathcal{E}^*(\varphi)$ целую функцию $\hat{S}$, действует из $\mathcal{E}^*(\varphi)$ в $P(\widetilde{\varphi})$.

Отображение $\mathcal{A}$ непрерывно. Пусть $S \in Q_m,\quad m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|S(f)| \leq q_m(S)p_m(f),\ \forall f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Следовательно, для $S \in Q_m$

$$|\hat{S}(z)| \leq q_m(S)(1 + \|z\|)^m e^{\widetilde{\varphi}_m(Im\ z)},\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Таким образом, $\|\hat{S}\|_m \leqslant q_m(S)$. Отсюда следует непрерывность $\mathcal{A}$.

В силу теоремы 1 и формулы (1) при $z = 0$ отображение $\mathcal{A}$ инъективно.

Отображение $\mathcal{A}$ сюръективно. Действительно, пусть целая функция U при некоторых $m \in \mathbb{N}, c > 0$ удовлетворяет в $\mathbb{C}^n$ неравенству

$$|U(z)| \leq c(1 + \|z\|)^m \exp(\widetilde{\varphi}_m(Im\ z)).$$

Действуем, как в [8]. По теореме А для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ функция $U(x + iy)$, рассматриваемая как элемент из $S'(\mathbb{R}^n)$, есть преобразование Фурье обобщенной функции медленного роста $g_y(\xi) = g(\xi)e^{-\langle y,\xi\rangle}$, где для обобщенной функции $g(\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеет место представление в виде суммы конечного числа дифференциальных операторов конечного порядка от непрерывных функций $g_\alpha(\xi)$:

$$g(\xi) = \sum_\alpha D^\alpha g_\alpha(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n),$$

причем функции $g_\alpha(\xi)$ удовлетворяют при некоторых $l_\alpha \in \mathbb{N}, c_\alpha > 0$ оценке

$$|g_\alpha(\xi)| \leq c_\alpha(1 + \|\xi\|)^{l_\alpha} e^{-\varphi_m(\xi)},\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определим функционал T на $\mathcal{E}(\varphi)$ по формуле

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_\alpha g_\alpha(\xi)((-D)^\alpha f)(\xi)\ d\xi\ ,\ f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Очевидно, $T \in \mathcal{E}'(\varphi)$.

Заметим, что для любой функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(x)f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_\alpha g_\alpha(\xi)((-D)^\alpha e^{i\langle x,\xi\rangle})\ d\xi \right) f(x)\ dx.$$

Отсюда вытекает, что $\hat{T}(x) = U(x),\ x \in \mathbb{R}^n$. По теореме единственности $\hat{T}(z) = U(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Итак, $\mathcal{A}$ — линейное непрерывное взаимно однозначное отображение пространства $\mathcal{E}^*(\varphi)$ на $P(\widetilde{\varphi})$. По теореме об открытом отображении [14] отображение $\mathcal{A}^{-1}$ непрерывно. Следовательно, отображение $\mathcal{A}$ осуществляет топологический изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*(\varphi)$ и $P(\widetilde{\varphi})$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жаринов В.В. *Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS* // УМН. 1979. Т. 34, вып. 4(208). С. 97–131.
2. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // сб. пер. Математика. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–77.
3. L. Hörmander *La transformation de Legendre et la théorème de Paley-Wiener* // Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences. 1955. V. 240. P. 392–395.
4. L. Ehrenpreis *Fourier analysis in several complex variables.* New York: Wiley-Interscience publishers. 1970.
5. B.A. Taylor *Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions* // Communications on pure and applied mathematics. 1971. V. 24. № 1. P. 39–51.
6. Мусин И.Х. *О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций* // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 57–86.
7. Мусин И.Х. *О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$* // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 83–108.
8. Попенов С.В. *Об одном весовом пространстве целых функций* // Исследования по теории аппроксимации функций. Уфа. БФАН СССР. 1986. С. 89–96.
9. Напалков В.В., Попенов С.В. *О преобразовании Лапласа на весовом пространстве Бергмана целых функций в $\mathbb{C}^n$* // Доклады РАН. 1997. Т. 352(5). С. 595–597.
10. Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p*. М.: Мир. 1984.
11. Владимиров В.С. *Функции, голоморфные в трубчатых конусах* // Известия АН СССР. 1963. Т. 27, №1. С. 75–100.
12. Владимиров В.С. *Методы теории функций многих комплексных переменных.* М.: Наука. 1964.
13. Эскин Г.И. *Обобщение теоремы Палея-Винера-Шварца* // УМН. 1961. Т. 16, вып. 1. С. 185–188.
14. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1972.

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: musin@matem.anrb.ru

Сергей Викторович Попёнов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: popenov@matem.anrb.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 61-80.

УДК 519.64 + 517.518.87

НОВЫЙ АЛГОРИТМ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

М.Д. РАМАЗАНОВ

Аннотация. Решетчатые кубатурные формулы служат для приближенных вычислений интегралов гладких функций нескольких переменных, $\int\limits_\Omega f(x)dx$, с помощью линейных комбинаций $h^n \sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n,\\ hk\in\Omega}} c_k f(hk)$. Асимптотически оптимальная формула на W_2^m –пространстве определяется равенством $\sup\limits_{f\in W_2^m(\Omega)} \left|\int\limits_\Omega f(x)dx - h^n \sum\limits_{hk\in\Omega} c_k^{as} f(hk)\right| /$ $\inf\limits_{\{c_k\}} \sup\limits_{f\in W_2^m(\Omega)} \left|\int\limits_\Omega f(x)dx - h^n \sum\limits_{hk\in\Omega} c_k f(hk)\right| = 1.$

К.И. Бабенко принадлежит понятие ненасыщаемости вычислительных алгоритмов [7] — сохранения оптимальных порядков сходимостей для всех пространств функций, являющихся параметрами задачи.

В работе описан новый алгоритм построения решетчатых кубатурных формул, ненасыщаемых не только по порядку, но и по свойству асимптотической оптимальности на W_2^m –пространствах, $m \in (n/2, \infty)$.

Ключевые слова: кубатурные формулы, оптимизация, ненасыщаемый алгоритм

1. Введение

Решетчатые кубатурные формулы дают приближенные значения интегралов $\int\limits_\Omega dx f(x)$ по многомерным областям $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в виде линейных комбинаций значений подинтегральной функции в узлах выбранной решетки.

$$K_N f \equiv \det H_N \cdot \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n,\\ H_N k\in\Omega}} c_k(N) f(H_N k), \quad H_N \text{ — матрица } n\times n,\ \det H_N = |\Omega|/N.$$

В конце 60–х годов прошлого века С.Л. Соболев [1]–[3] предложил алгоритм формул высокой точности, объединяющий подходы функционального анализа и алгебраический. Именно, гладкость интегрантов задавалась принадлежностью их конкретному банахову функциональному пространству $B(\Omega) \subset C$, качество формулы определялось нормой функционала погрешности
$l_N^\Omega:\ f \to \int\limits_\Omega dx\ f(x) - K_N f$, с оптимизацией по коэффициентам $\{c_k\}$.

$$l_N^{\Omega,\,opt} = \arg\min_{l_N^\Omega, \{c_k\}} \|l_N^\Omega\|_{[B(\Omega)]^*}. \tag{1}$$

А сам алгоритм строился как сумма локальных формул для интегрирования по элементарным ячейкам решетки $Q_{N,k} = \{x|\ H_N^{-1}x - k \in [0,1)^n\}$ с помощью алгебраических формул с теми же узлами, точно интегрирующих многочлены до некоторой степени M, связанной

M.D. Ramazanov, New algorithm of asymptotically optimal lattice cubature formulas.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00349-а).

Поступила 5 июля 2010 г.

с гладкостью интегрантов. С.Л. Соболев установил, что при $N \to \infty$ последовательность функционалов погрешностей таких формул обладает свойством асимптотической оптимальности:

$$\|l_N^{\Omega,\, as}\|_{[B(\Omega)]^*} = \|l_N^{\Omega,\, opt}\|_{[B(\Omega)]^*} \cdot (1 + o(1)) \tag{2}$$

на пространствах интегрантов $B(\Omega) = L_2^{(m)}(\Omega)$ с полунормой

$$\|f \mid L_2^{(m)}(\Omega)\| = \left[\int\limits_{\Omega} dx \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\, |D^\alpha f(x)|^2\right)\right]^{1/2}.$$

Свойство асимптотической оптимальности было установлено и для многих других банаховых пространств, обычно употребляемых в вычислительной математике [2]–[6]. Важнейшей особенностью соболевского алгоритма является свойство пограничного слоя: узлам, удаленным от границы области на расстояние больше $O(N^{-1/n})$ соответствуют одинаковые коэффициенты:

$$\exists L,\ \forall k,\ N \quad \text{dist}\ (H_N k,\ \partial\Omega) > LN^{-1/n} \Rightarrow c_k \equiv 1. \tag{3}$$

Это на порядок уменьшает объем вычислительной работы и позволяет установить для таких формул фактическую эквивалентность асимптотической и порядковой оптимальности на соболевских пространствах W_p^m [5].

Заложенная в алгоритме алгебраическая точность локальных формул на всех многочленах до некоторой степени M проявилась в условной «асимптотической ненасыщаемости» алгоритма. Именно, построенная последовательность кубатурных формул остается асимптотически (при $N \to \infty$) оптимальной на каждом пространстве W_p^m с $m \in (n/p, M)$, то есть в ослабленной форме удовлетворяет введенному К. И. Бабенко определению ненасыщаемости. (У К. И. Бабенко [7], [8] универсальна порядковая оптимальность без ограничения сверху на гладкость интегрантов). Ненасыщаемость — важное свойство вычислительных алгоритмов, позволяющее созданным по ним программам автоматически настраиваться на проявляющиеся характеристики гладкостей параметров задач, обеспечивая наилучшие скорости сходимостей аппроксимаций.

В настоящей работе мы ограничиваемся кубической решеткой узлов $H = hI_n,\ N = h^{-n}$, и предлагаем новый алгоритм решетчатых кубатурных формул $K_h f = h^n \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k f(hk)$, обладающих свойством ограниченного пограничного слоя и являющихся асимптотически ненасыщаемыми на всех пространствах $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ с $m > \frac{n}{2}$.

Сначала выводим формулу коэффициентов оптимальных кубатурных формул для интегралов более общего вида $\mathcal{I}^\varphi f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx\, \varphi(x) f(x)$ и на более общих пространствах $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$. Норма их задается равенством

$$\|f \mid W_2^\mu(\mathbb{R}^n)\| = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, \left|\tilde f(\xi)\mu(2\pi i\xi)\right|^2\right)^{1/2} \tag{4}$$

с довольно произвольной функцией μ. Затем упрощаем выражения оптимальных коэффициентов, отсекая слагаемые, порядки которых пренебрежимо малы по сравнению с главным членом.

Таким образом, мы приходим к формуле коэффициентов асимптотически оптимальной кубатурной формулы с ограниченным пограничным слоем.

Далее мы ограничиваемся частным случаем с весовой функцией φ, являющейся характеристической функцией области интегрирования, и изотропной функцией μ, $\mu(2\pi i\xi) = (1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2}$. Окончательно, упрощая формулу коэффициентов в пограничном слое, получаем коэффициенты асимптотически ненасыщаемой формулы.

2. Формула коэффициентов решетчатой кубатурной формулы, оптимально аппроксимирующей интегралы с весовыми функциями

Определим пространство $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ как пополнение в норме (4) множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций.

$$\widetilde{f}(\xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx f(x) e^{-2\pi i x\xi}$$

— это преобразование Фурье функции f; $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — функция с конечным интегралом $\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi/|\mu(2\pi i\xi)|^2 < \infty$, что обеспечивает вложение $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ в пространство непрерывных функций $C(\mathbb{R}^n)$.

Без ограничения общности будем полагать μ бесконечно дифференцируемой, четной, не обращающейся в нуль нигде и равной единице в начале координат, $\mu(0) = 1$. Кроме того, мы полагаем, что функция μ имеет не более, чем степенной порядок роста. Точнее:

$$\exists\, m'' \geqslant m' > 0,\ \exists\, C > 0\ \forall\xi \quad (1 + |\xi|^{m'}/C) \leqslant |\mu(2\pi i\xi)| \leqslant (1 + |\xi|^{m''} \cdot C).$$

Мы берем $\mu(2\pi i\xi)$ символом гипоэллиптического псевдодифференциального оператора

$$\mu(D):\ f(x) \to \mu(D)f(x) = \int d\xi \tilde{f}(\xi)\mu(2\pi i\xi)e^{2\pi i\xi}.$$

Гипоэллиптичность означает выполнение условия

$$\exists\, \rho \in (0,1] \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists\, C_\alpha : \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \left|\frac{D^\alpha \mu(2\pi i\xi)}{\mu(2\pi i\xi)}\right| \leqslant \frac{C_\alpha}{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha|}}. \tag{5}$$

В этой работе основным частным случаем будет $\mu(2\pi i\xi) = \left(1 + |2\pi\xi|^2\right)^{m/2}$, $m > n/2$. Обычное обозначение этого пространства, взятого в одной из эквивалентных нормировок $W_2^m(\mathbb{R}^n)$.

Как мы уже указали, качество кубатурной формулы характеризуется $[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*$-нормой ее функционала погрешности $l_h^\varphi : f \to \mathcal{I}^\varphi f - \mathcal{K}_h f$.
Оптимальные коэффициенты определяются условием

$$\{c_k^{opt}(h)\} = \arg\min_{\{c_k\}} \|\mathcal{I}^\varphi - \mathcal{K}_h \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\|.$$

Следует заметить, что мы берем кубатурную формулу с суммированием по всем узлам $\{hk \mid k \in \mathbb{Z}^n\}$, требуем принадлежность функционала K_h пространству $[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*$. Функционал погрешности оптимальной кубатурной формулы $l_h^{\varphi,opt} = \mathcal{I}^\varphi - K_h^{opt}$ должен удовлетворять условию

$$\|l_N^{\Omega,opt} \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^* \| = \inf_{\{c_k\}} \|\mathcal{I}^\varphi - K_h \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^* \|.$$

В гильбертовом пространстве шар слабо компактен и слабо замкнут. Поэтому мы можем описанную выше операцию инфимума нормы в $[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^* \|$ заменить на нахождение минимума нормы. При этом аргумент минимума — единственный и оптимальный функционал погрешности — однозначно определен.

Первой нашей целью является получение формул оптимальных коэффициентов и выписывание их асимптотики по параметру h до такого порядка, который позволит заменить оптимальную кубатурную формулу асимптотически оптимальной $\mathcal{K}_h^{as} f$, см. (2), с более простым алгоритмом вычисления коэффициентов.

Коэффициенты кубатурных формул естественно считать комплексными, $c_k = c_k^1 + ic_k^2$. Поскольку квадрат нормы функционала погрешности является положительным многочленом второй степени от $\{c_k^1, c_k^2\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, уравнения, которым подчиняются оптимальные коэффициенты, задаются формулами

$$0 = \frac{\partial}{\partial c_k^1} \| l_h^{\varphi,opt} \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^* \|^2 = \frac{\partial}{\partial c_k^2} \| l_h^{\varphi,opt} \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^* \|^2 .$$

Прямыми вычислениями они сводятся к одному равенству

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi \, \frac{e^{2\pi i \xi h j}}{|\mu(2\pi i \xi)|^2} \left[\widetilde{\varphi}(\xi) - h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k^{opt} \cdot e^{-2\pi i \xi h k} \right] , \quad \forall j \in \mathbb{Z}^n .$$

где $\widetilde{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \, \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi}$. Сходимость этого интеграла обеспечивается нашими основными предположениями о весовой функции φ. Именно, считаем носитель функции замыканием $n-$мерной области Ω, ограниченной гладкой границей Γ, а саму функцию бесконечно дифференцируемой в $\bar{\Omega}$,

$$\mathrm{supp}\,\varphi \equiv \bar{\Omega} \Subset \mathbb{R}^n, \quad \partial\Omega \equiv \Gamma \in C^\infty, \quad \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}). \tag{6}$$

Эти ограничения впоследствии можно будет ослабить до естественных пределов, включающих обычно употребительные функции весовых интегралов.

Займемся решением уравнений оптимальных коэффициентов.

Интеграл по ξ разобьем на отдельные блоки:

$$\xi = \frac{t}{h} + \eta, \; t \in \mathbb{Z}^n, \; \eta \in Q/h, \; Q = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^n , \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi = \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \int\limits_{Q/h} d\eta.$$

Теперь

$$h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k^{opt} \int\limits_{Q/h} d\eta \, e^{2\pi i \eta (j-k) h} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i(\frac{t}{h} + \eta))|^2} =$$
$$= \int\limits_{Q/h} d\eta \, e^{2\pi i \eta j h} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{\widetilde{\varphi}(\frac{t}{h} + \eta)}{|\mu(2\pi i(\frac{t}{h} + \eta))|^2} .$$

Сделаем замену переменных $h \cdot \eta = \zeta$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k^{opt} \int\limits_Q d\zeta \, e^{2\pi i \zeta (j-k)} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} =$$
$$= h^{-n} \int\limits_Q d\zeta \, e^{2\pi i \zeta j} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{\widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} .$$

Обе части равенства умножим на $e^{-2\pi i \sigma j}$ и просуммируем по $j \in \mathbb{Z}^n$:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i \sigma j} \int\limits_Q d\zeta \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k^{opt} e^{-2\pi i \zeta k} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} \right] e^{2\pi i \zeta j} =$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i \sigma j} \int\limits_Q d\zeta \, e^{2\pi i \zeta j} \left[h^{-n} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{\widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} \right] .$$

Заменим j на $-j$ и ***заметим***: в правой и левой частях равенства стоят ряды Фурье по j с коэффициентами от функций, заключенных в квадратные скобки. Значит, равны сами функции. Отсюда следует

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k^{opt} e^{-2\pi i \zeta k} = h^{-n} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{\widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} \Big/ \sum_{s\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^2}.$$

Заменим ζ на $-\zeta$ и заметим, что c_k^{opt} — это коэффициенты ряда Фурье функции, стоящей с правой стороны равенства.

По формулам для коэффициентов Фурье получаем

$$c_k^{opt} \equiv c_k^{opt}(h) = \int\limits_Q d\zeta\, e^{-2\pi i\zeta k} \cdot h^{-n} \frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n} \widetilde{\varphi}((t-\zeta)/h)/|\mu(2\pi i(t-\zeta)/h)|^2}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1/|\mu(2\pi i(s-\zeta)/h)|^2}\,.$$

Если ввести функцию непрерывного аргумента (и переменить ζ на $-\zeta$)

$$C^{opt}(x,h) = \int\limits_Q d\zeta\, e^{2\pi i\zeta x/h} \cdot h^{-n} \frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n} \widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)/|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1/|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^2}\,, \tag{7}$$

то

$$c_k^{opt}(h) = C^{opt}(x,h)\big|_{x=hk}\,, \quad \forall k\in\mathbb{Z}^n\,. \tag{8}$$

Назовем $C^{opt}(x,h)$ функцией оптимальных коэффициентов.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Равенства* (7), (8) *задают коэффициенты кубатурной формулы, оптимальной на пространстве* $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$.

3. Оценка порядка точности вычислений при получении функции асимптотически оптимальных коэффициентов

Асимптотическая оптимальность функционала погрешности означает, что отличие его нормы от нормы оптимального функционала есть величина бесконечно малая по сравнению с нормой асимптотически оптимального функционала. В наших гильбертовых пространствах оценка разности норм может быть заменена на оценку нормы разности оптимального и асимптотически оптимального функционалов. Покажем это, обозначая для краткости $[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*$– норму l через $\|l\|_*$ и эквивалентность порядков знаком $\asymp$.

$$0 \leqslant \frac{\|l_h^{\varphi,as}\|_* - \|l_h^{\varphi,opt}\|_*}{\|l_h^{\varphi,as}\|_*} = \frac{\|l_h^{\varphi,as}\|_*^2 - \|l_h^{\varphi,opt}\|_*^2}{(\|l_h^{\varphi,as}\|_* + \|l_h^{\varphi,opt}\|_*)\|l_h^{\varphi,as}\|_*} \asymp \left(\frac{\|l_h^{\varphi,as} - l_h^{\varphi,opt}\|_*}{\|l_h^{\varphi,as}\|_*}\right)^2$$

и это должно быть $o(1)$ при $h\to 0$.

Лемма 1. *Если* $\varphi\not\equiv 0$, *то*

$$\|l_h^{\varphi,as}|[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\| \geqslant \|l_h^{\varphi,opt}|[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\| \geqslant const\,\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\frac{1}{|\mu(2\pi ik/h)|^2}}.$$

Доказательство. Очевидно, для любого функционала погрешности и любой функции $u\in W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$

$$\|l_h^\varphi|[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\| \geqslant |(l_h^\varphi,\, u)|/\|u|W_2^\mu(\mathbb{R}^n)\|.$$

Подберем подходящую функцию u. Наша функция u будет неотрицательной и обращающейся в нуль в каждом узле hk. Поэтому $|(l_h^\varphi,u)| = |\int\limits_\Omega dx\,\varphi(x)u(x)|$. Так как φ непрерывна и не является тождественным нулем, то она отделена от нуля на некотором множестве ω, $|\varphi(x)|\,|_{x\in\omega}\geqslant c>0$.

Можем полагать, что ω имеет форму прямоугольного параллелепипеда $\omega=\prod\limits_{j=1}^n[a_j,b_j]$, целиком помещающегося в единичном кубе $[-1/2,1/2)^n$.

Обозначим эту область срезывающей функцией. Пусть $\varkappa(t)$ — «гладкая ступенька»: бесконечно дифференцируемая, неотрицательная, монотонная, с графиком, симметричным относительно точки $\left(\frac12,\frac12\right)$, $\varkappa\in C^\infty, \varkappa'(t)\geqslant 0$, $\varkappa(t)=0$ при $t\leqslant 0$ и $\varkappa(t)=1$ при $t\geqslant 1$,

$\varkappa'(\frac{1}{2}-t)=\varkappa'(\frac{1}{2}+t)$. Положим $\theta(x)=\prod_{j=1}^{n}\varkappa\left(\frac{x_j-a_j}{\tau}\right)\cdot\varkappa\left(\frac{b_j-x_j}{\tau}\right)$, подобрав параметр τ так, чтобы множество, на котором $\theta(x)=1$, было достаточно массивным:

$$\int dx\ \theta(x)=\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j-\tau)\geqslant\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)=|\mathrm{supp}\ \theta|/2.$$

Возьмем $u(x)=\theta(x)\cdot[v_h(x)-v_h(0)]$, где $v_h(x)$ — экстремальная функция однородного функционала погрешности $l_h^1(x)=\chi_{Q_h}(x)-h^n\sum\limits_{hk\in Q_h}\delta(x-hk),\quad Q_h=[-Hh,Hh)^n$ с $H=[([1/h]+1)/2]$ (квадратные скобки последней формулы означают целую часть числа).

$$(l_h^1,v_h)=\|l_h^1\mid(\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h))^*\|,\|v_h\mid\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)\|=1.$$

Пространство $\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)$ состоит из периодических с основным периодом Q_h функций $f(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}f_ke^{2\pi ikx/2Hh}$ с $f_k=(2Hh)^{-n}\int\limits_{Q_h}f(y)e^{-2\pi iy/2Hh}dy$ и конечной нормой

$$\|f\mid\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)\|=(2Hh)^{-n/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|f_k\mu(2\pi ik/2Hh)|^2\right)^{1/2}.$$

Как известно [6], экстремальная функция $v_h(x)$ имеет еще и маленький период h, $v_h(x+hk)=v_h(x)$, $\forall k\in\mathbb{Z}^n$, и вещественна и всюду не меньше своего значения в нуле, $v_h(x)-v_h(0)\geqslant 0$.

Таким образом,

$$\|l_h^{\varphi}\mid(W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n))^*\|\geqslant c\cdot\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^n,\\ \theta(hj)=1}}\int\limits_{hQ}dx[v_h(x-hj)-v_h(0)]/\|(v_h-v_h(0))\theta\mid W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)\|$$

Числитель этой дроби есть

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^n,\\ \theta(hj)=1}}\int\limits_{hQ}dx[v_h(x-hj)-v_h(0)]=\frac{|\{x\mid\theta(x)=1\}|}{h^n}\int\limits_{hQ}dx[v_h(x)-v_h(0)]=$$
$$=|\{x\mid\theta(x)=1\}|\cdot(2Hh)^{-n}\cdot(l_h^1,v_h-v_h(0))=|\{x\mid\theta(x)=1\}|\cdot(2Hh)^{-n}\cdot(l_h^1,v_h)=$$
$$=|\{x\mid\theta(x)=1\}|\cdot(2Hh)^{-n}\cdot\|l_h^1\mid(\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h))^*\|=$$
$$=\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h|^{-2}\right)^{1/2}=|\{x\mid\theta(x)=1\}|\cdot(1+O(h))\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h|^{-2}\right)^{1/2}.$$

При оценке знаменателя учтем известную эквивалентность норм $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)$ для функций, сосредоточенных в $int\ Q_h$, и гипоэллиптических символов μ. Благодаря этому

$$\|(v_h-v_h(0))\theta\mid W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)\|\leqslant\mathrm{const}\cdot\|(v_h-v_h(0))\theta\mid\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)\|\leqslant$$
$$\leqslant\mathrm{const}\cdot\|v_h-v_h(0)\mid\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)\|\leqslant\mathrm{const}.$$

Итак,

$$\|l_h^{\varphi}\mid(W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n))^*\|\geqslant\mathrm{const}\cdot\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}1/|\mu(2\pi is/h|^2\right)^{1/2}.$$

Следствие 1. $\|l_h^{\varphi}\mid(W_2^{m}(\mathbb{R}^n))^*\|\geqslant const\cdot\ h^m$.

(Можно показать, что для оптимального функционала выполняется и обратная оценка

$$\|l_h^{\varphi,opt} \mid (W_2^m(\mathbb{R}^n))^*\| \leqslant \mathrm{const} \cdot |\mathrm{supp}\ \varphi|^{\frac{1}{2}} \cdot h^m\ ).$$

4. Упрощение формулы коэффициентов для узлов, достаточно удаленных от области интегрирования

Возвращаясь от переменных $t \in \mathbb{Z}^n,\ \zeta \in Q$ к $\xi = \dfrac{t+\zeta}{h}$, можем написать

$$C^{opt}(x,h) = \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, \frac{e^{2\pi i(x-y)\xi}}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}\nu(\xi,h), \text{где } \nu(\xi,h) = \frac{1}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i\frac{s}{h}+\xi)|^2}}.$$

Функция $\xi \to \nu(\xi,h)$ бесконечно дифференцируемая, периодическая с основным периодом Q/h. Мы накладываем условие

$$\mathrm{dist}\ (x,\Omega) \geqslant \psi(h) = o(1) \quad \text{при } h \to 0.$$

и хотим воспользоваться этим, чтобы упростить выражение $C^{opt}(x,h)$. Зададим финитную функцию $\sigma(\xi,\delta) = \prod_{j=1}^n [1 - \varkappa(|\xi_j|h^\delta - 2)]$ с некоторым $\delta > 0$. Рассмотрим часть функции $C^{opt}(x,h)$ вне $O(h^{-\delta})$ окрестности начала координат переменных ξ.

$$C_\delta^{opt}(x,h) \equiv \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, \frac{e^{2\pi i(x-y)\xi}}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}\nu(\xi,h)[1-\sigma(\xi,\delta)].$$

Теперь подготовим удобное нам интегрирование по частям в интеграле по ξ с вычислением первообразных от $e^{2\pi i(x-y)\xi} \cdot \nu(\xi,h)$. Пусть будет

$$\nu(\xi,h).\cdot e^{2\pi i(x-y)\xi} \equiv \Delta_\xi^N (e^{2\pi i(x-y)\xi} \cdot f(\xi)).$$

Вычислим $f(\xi)$ как решение этого уравнения.

$$\Delta_\xi^N (g(\xi)f(\xi)) = \Delta_\xi^N \left[F_{x\to\xi}^{-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} dt\, \tilde{g}(t) \cdot \tilde{f}(x-t) \right) \right] (\xi) =$$
$$= \Delta_\xi^N \int dx\, e^{2\pi i x\xi} \int dt\, \tilde{g}(t) \cdot \tilde{f}(x-t) = \int dx \int dt\, (2\pi i)^{2N} \tilde{g}(t) \cdot \tilde{f}(x-t) e^{2\pi i x\xi} \equiv I$$

Для упрощения формулы возьмем N четным числом.

$$I = (2\pi)^{2N} \int dx \int dt\, (|t|^2 + 2(t,x-t) + |x-t|^2)^N \tilde{g}(t)\tilde{f}(x-t) e^{2\pi i x\xi} =$$
$$= (2\pi)^{2N} \int dx \int dt\, e^{2\pi i x\xi} \cdot \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N} C_N^\alpha |t|^{2\alpha_1} \cdot (2(t,x-t))^{\alpha_2} |x-t|^{2\alpha_3} \tilde{g}(t)\tilde{f}(x-t).$$

$(2(t,x-t))^{\alpha_2} = 2^{\alpha_2}(t_1(x_1-t_1) + \ldots + t_n(x_n-t_n))^{\alpha_2} = 2^{\alpha_2} \sum\limits_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\\ \beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2}} C_{\alpha_2}^\beta t^\beta (x-t)^\beta$. Поэтому

$$I = (2\pi)^{2N} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N} \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2} C_N^{\alpha} C_{\alpha_2}^{\beta} 2^{\alpha_2} \cdot$$
$$\cdot \int dx \int dt\, e^{2\pi i x\xi} (|t|^{2\alpha_1} \cdot t^{\beta} \tilde{g}(t)) \cdot (|x-t|^{2\alpha_3} (x-t)^{\beta} \tilde{f}(x-t)) =$$
$$= (2\pi)^{2N} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N} \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2} C_N^{\alpha} C_{\alpha_2}^{\beta} 2^{\alpha_2} F^{-1}_{x\to\xi} \cdot$$
$$\cdot \int dt\, e^{2\pi i x\xi} (|t|^{2\alpha_1} \cdot t^{\beta} \tilde{g}(t)) \cdot (|x-t|^{2\alpha_3} (x-t)^{\beta} \tilde{f}(x-t)) =$$
$$= (2\pi)^{2N} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N} \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2} C_N^{\alpha} C_{\alpha_2}^{\beta} 2^{\alpha_2} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{(2\pi i)^{2\alpha_1+2(\beta_1+\ldots+\beta_n)+2\alpha_3}} (D_\xi^{\beta} \Delta_\xi^{\alpha_1} g(\xi))(D_\xi^{\beta} \Delta_\xi^{\alpha_3} f(\xi)).$$

Применим эту формулу к $g(\xi) = e^{2\pi i(x-y)\xi}$

$$\Delta_\xi^N \left(e^{2\pi i(x-y)\xi} \cdot f(\xi)\right) = (2\pi)^{2N} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N} \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2} C_N^{\alpha} C_{\alpha_2}^{\beta} 2^{\alpha_2} (2\pi i)^{2\alpha_1+\beta_1+\ldots+\beta_n} \cdot$$
$$\cdot (x-y)^{\beta} \cdot |x-y|^{2\alpha_1} e^{2\pi i(x-y)\xi} \cdot D_\xi^{\beta} \Delta_\xi^{\alpha_3} f(\xi) = e^{2\pi i(x-y)\xi} \cdot \nu(\xi, h).$$

Относительно $f(x)$ получили уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами. Это эллиптическое уравнение — с главным членом $\Delta_\xi^{2N} f(\xi)$. $P(D)f(\xi) = \nu(\xi, h)$.

Характеристический многочлен дифференциального оператора есть

$$P(2\pi i t) \equiv (2\pi)^{2N} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N} \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2} C_N^{\alpha} C_{\alpha_2}^{\beta} (x-y)^{\beta} |x-y|^{2\alpha_1} (2\pi i)^{2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} \cdot$$
$$\cdot t^{\beta} |t|^{2\alpha_3} = (2\pi)^{4N} \cdot [|t|^{2N} + |x-y|^{2N} +$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N \\ \alpha_1\neq N\neq\alpha_3}} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2 \\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n}} C_N^{\alpha} C_{\alpha_2}^{\beta} (x-y)^{\beta} |x-y|^{2\alpha_1} \cdot t^{\beta} |t|^{2\alpha_3}].$$

Замена переменных $t = \tau |x-y|$ дает

$$P(2\pi i\tau|x-y|) = (4\pi^2|x-y|)^{2N}[|\tau|^{2N} + 1 +$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N \\ \alpha_1\neq N\neq\alpha_3}} C_N^{\alpha} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2 \\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n}} C_{\alpha_2}^{\beta} \left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)^{\beta} \cdot \tau^{\beta} |x-y|^{2\alpha_1} \cdot |\tau|^{2\alpha_3}] \equiv (4\pi^2|x-y|)^{2N} Q(\tau).$$

Отметим:

$$\sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2 \\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n}} C_{\alpha_2}^{\beta} \left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)^{\beta} \tau^{\beta} = (e_{x-y}, \tau)^{\alpha_2}, \text{где } e_{x-y} = \frac{x-y}{|x-y|}.$$

Фундаментальное решение дифференциального оператора $P(D)$ можно задать формулой

$$\Phi_N(\xi) = \int_{\Gamma_n} dt\, \frac{e^{2\pi i\xi t}}{P(2\pi i t)} =|_{t=\tau|x-y|} = |x-y|^n \int_{\Gamma_n/|x-y|} d\tau\, \frac{e^{2\pi i\tau\xi|x-y|}}{(4\pi^2|x-y|)^{2N} Q(\tau)}.$$

Здесь Γ_n — это n –мерная поверхность в $\mathbb{C}^n$ — лестница Хёрмандера для многочлена $P(2\pi i\xi)$, [9], а $\Gamma_n/|x-y|$ — соответствующая лестница Хёрмандера для многочлена

$$Q(\tau) = |\tau|^{2N} + 1 + \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N\\ \alpha_1\neq N\neq\alpha_3}} C_N^{\alpha}(e_{x-y},\tau)^{\alpha_2}|\tau|^{2\alpha_3} \quad \text{с } |\tau|^2 \equiv \tau_1^2+\ldots+\tau_n^2.$$

с может быть комплексными $\tau_1,\ldots,\tau_n$. Фундаментальное решение гладкое при достаточно большом N, $\Phi_N \in C^{2N-n}$.

Отметим еще: вещественные корни многочлена $Q(\tau)$, $\{\tau \mid \tau\in\mathbb{R}^n,\ Q(\tau)=0\}$, если они есть, остаются в ограниченной области равномерно по параметрам $(x-y)$. Поэтому лестницу Хёрмандера можно построить так, чтобы фундаментальное решение экспоненциально убывало при $|\xi|\to\infty$, $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Подходящее нам решение дифференциального уравнения $P(D_\xi)f(\xi) = \nu(\xi,h)$ можно выписать в виде свертки этого фундаментального решения с правой частью $f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\,\Phi_N(\eta)\cdot\nu(\xi-\eta,h)$.

Итак,

$$\begin{aligned}
C_\delta^{opt}(x,h) &= \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, e^{2\pi i(x-y)\xi} f(\xi)\Delta_\xi^N\left(\frac{1}{\mu^2(2\pi i\xi)}\cdot[1-\sigma(\xi,\delta)]\right) = \\
&= (2\pi)^{-2N}\int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, e^{2\pi i(x-y)\xi}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\,|x-y|^{n-2N}\int\limits_{\Gamma_n/|x-y|} d\tau\,\frac{e^{2\pi i\tau\xi|x-y|}}{Q(\tau)}\nu(\xi-\eta,h)\cdot \\
&\qquad\cdot\Delta_\xi^N\left(\frac{1}{\mu^2(2\pi i\xi)}\cdot[1-\sigma(\xi,\delta)]\right) \equiv \\
&\equiv (2\pi)^{-2N}\int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)|x-y|^{n-2N}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\,\hat{\Phi}_N(\eta|x-y|)\nu(\xi-\eta,h)\cdot \\
&\qquad\cdot\Delta_\xi^N\left(\frac{1}{\mu^2(2\pi i\xi)}\cdot[1-\sigma(\xi,\delta)]\right),
\end{aligned}$$

где $\hat{\Phi}_N(\eta|x-y|) \equiv \int\limits_{\Gamma_n/|x-y|} d\tau\,\dfrac{e^{2\pi i\tau\eta|x-y|}}{Q(\tau)}$.

Для гипоэллиптического символа $\mu(2\pi i\xi)$ (5) имеем

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_\xi^N\frac{1}{\mu^2(2\pi i\xi)}\cdot[1-\sigma(\xi,\delta)]\right| &\leqslant C_N\frac{1}{|\mu^2(2\pi i\xi)|}\left(\max_{|\xi|\geqslant\frac{1}{h^\delta}}\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N\rho}} + h^{\delta\cdot 2N}\right) = \\
&= C_N\frac{1}{|\mu^2(2\pi i\xi)|}\left(h^\rho+h^\delta\right)^{2N}.
\end{aligned}$$

Полагая $\psi(h) = O(h^\gamma)$ с $\gamma<\min\{\rho,\delta\}$, получаем

$$\left|C_\delta^{opt}(x,h)\right| \leqslant \text{const}\ \cdot\frac{h^{2N\rho}}{\psi(h)^{2N-n}}\cdot\left|\int\limits_{|\xi|\leqslant h^{-\delta}} d\xi\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\,\hat{\Phi}_N(\eta|x-y|)\nu(\xi-\eta,h)\frac{1}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}\right|.$$

Внутренний интеграл допускает такую оценку

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\, \hat{\Phi}_N(\eta|x-y|)\nu(\xi-\eta,h)\right| =$$

$$=|_{\eta=\frac{t+\zeta}{h},t\in\mathbb{Z}^n,\zeta\in Q}= \left|\sum_{t\in\mathbb{Z}^n} h^{-n}\int\limits_{Q} d\zeta\ \hat{\Phi}_N\left(\frac{t+\zeta}{h}\cdot|x-y|\right)\nu\left(\xi-\frac{t+\zeta}{h},h\right)\right| =$$

$$= h^{-n}\left|\int\limits_{Q} d\zeta\ \nu\left(\xi-\frac{\zeta}{h},h\right)\sum_{t\in\mathbb{Z}^n}\hat{\Phi}_N\left(\frac{t+\zeta}{h}\cdot|x-y|\right)\right| \leqslant C_N\cdot h^{-n}.$$

Теперь, чтобы сделать $C_\delta^{opt}(x,h) = o\left(\left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} 1/\mu(2\pi is/h)\right)^{1/2}\right)$, достаточно взять большое N.

При соблюдении этого условия мы можем пренебречь членом $C_\delta^{opt}(x,h)$, переходя от оптимальной формулы к асимптотически оптимальной.

Таким образом,

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, e^{2\pi i(x-y)\xi}\frac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}\sigma(\xi,\delta) \text{ при } \operatorname{dist}(x,\Omega) \geqslant O(h^\gamma),$$

и

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, e^{2\pi i(x-y)\xi}\frac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} \quad \text{при } \operatorname{dist}(x,\Omega) \leqslant O(h^\gamma).$$

В варианте $\operatorname{dist}(x,\Omega) \geqslant O(h^\gamma)$, возможно уточнение оценки. Благодаря условию $|\xi| \leqslant O(h^{-\delta})$ на носителе $\sigma(\xi,\delta)$ после замены $\xi = \frac{t}{h}+\eta,\ t\in\mathbb{Z}^n,\ \eta\in Q/h$ остается только слагаемое с $t=0$. Поэтому

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{Q/h} d\eta\, e^{-2\pi iy\eta}\sigma(\eta,\delta)\cdot\frac{1}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n}\left|\mu(2\pi i\eta)/\mu(2\pi i(\frac{s}{h}+\eta))\right|^2} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{Q/h} d\eta\, e^{-2\pi iy\eta}\sigma(\eta,\delta)\,(1-\rho(\eta,h))$$

с

$$\rho(\eta,h) \equiv \sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\left|\mu(2\pi i\eta)/\mu(2\pi i(\frac{s}{h}+\eta))\right|^2 \Big/ \left(1+\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\left|\mu(2\pi i\eta)/\mu(2\pi i(\frac{s}{h}+\eta))\right|^2\right).$$

Подберем достаточно малое δ так, чтобы с некоторым $\lambda > 0$ было

$$|\mu(2\pi i\eta)|^2\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\cdot h^{-2m''\delta}\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}\right)^{1/2} = O(h^\lambda). \quad (9)$$

Тогда

$$\frac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}=\frac{1}{1+\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi i\xi)|^2/|\mu(2\pi i(s/h-\xi))|^2}=$$

$$=1+O\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}\right)\cdot|\mu(2\pi i\xi)|^2=$$

$$=1+o\left(\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}\right)^{1/2}\right),$$

и можно исключить из рассматриваемой формулы $\dfrac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}$.

Получаем с $\gamma<\min\{\delta,\rho\}$

$$C^{as}(x,h)=\begin{cases}\int\limits_{\Omega}dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\xi\,\sigma(\xi,\delta)e^{2\pi i(x-y)\xi} & \text{если } \operatorname{dist}(x,\Omega)\geqslant O(h^\gamma),\\ \int\limits_{\Omega}dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\xi\,\dfrac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}e^{2\pi i(x-y)\xi}, & \text{если } \operatorname{dist}(x,\Omega)\leqslant O(h^\gamma).\end{cases}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\xi\,\sigma(\xi,\delta)e^{2\pi i(x-y)\xi}=\prod_{j=1}^n\int d\xi_j\,(1-\varkappa(|\xi_j|h^\delta-2))e^{2\pi i(x_j-y_j)\xi_j}=$$

$$=h^{-\delta n}\prod_{j=1}^n\int\limits_{|\tau|\leqslant 4}d\tau\,(1-\varkappa(|\tau|-2))e^{2\pi i(x_j-y_j)\tau/h^\delta}.$$

Функция $\int d\tau\,(1-\varkappa(|\tau|-2))e^{2\pi it\tau}\equiv T(t)$, принадлежит известному пространству S быстро убывающих функций. Значит,

$$I=\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\xi\,\sigma(\xi,\delta)e^{2\pi i(x-y)\xi}\right|\leqslant\text{const }h^{-\delta n}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^n\left(1+\dfrac{|x_j-y_j|}{h^\delta}\right)^M}$$

с любым M. Следовательно

$$I\leqslant\text{const }h^{-\delta n}\left(\frac{h^\delta}{\psi(h)}\right)^M=O\left(h^{-\delta n+(\delta-\gamma)M}\right)=o(h^{m''})=o\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}\right)$$

при достаточно большом M.

Поэтому мы положим $C^{as}(x,h)=0$, если $\operatorname{dist}(x,\Omega)\geqslant O(h^\gamma)$ и $\gamma<\min\{\delta,\rho\}$.

Приведем в пример пространство $W_2^m(\mathbb{R}^n)$. Для $|\xi|\leqslant c\cdot h^{-\delta}$

$$|\mu(2\pi i\xi)|^2\sqrt{\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}}\leqslant\text{const }h^{-2m\delta+m}.$$

Чтобы это было порядка $O(h^\lambda)$ с $\lambda>0$, достаточно положить $\lambda=m(1-2\delta)$ и $\delta\in\left(\frac12,1\right)$. При этом $\min\{\delta,\rho\}=\min\{\delta,1\}=\delta=\frac12+\varepsilon$ с $\forall\varepsilon_1\in\left(0,\frac12\right)$. Значит, можно взять любое $\gamma\leqslant\frac12$.

Итак,

$$C^{as}(x,h)=\begin{cases}0, & \text{при } \operatorname{dist}(x,\Omega)\geqslant O(h^\gamma)\\ \int\limits_\Omega dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\xi\,\dfrac{\nu(\xi,h)}{(1+|2\pi\xi|^2)^m}e^{2\pi i(x-y)\xi}, & \text{если } \operatorname{dist}(x,\Omega)\leqslant O(h^\gamma).\end{cases}$$

5. Асимптотически оптимальные коэффициенты кубатурной формулы в случае финитной бесконечно дифференцируемой весовой функции φ

Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.
За основу опять берем формулу оптимальных коэффициентов

$$C^{opt}(x,h)=\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}h^{-n}\frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n}\widetilde{\varphi}\left((t+\zeta)/h\right)/|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h|^2}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n}1/|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}.$$

Лемма 2.

$$C^{as}(x,h)=C^{opt}(x,h)\cdot(1+o(1))=\varphi(x)\cdot(1+o(1)).$$

Доказательство
Оценим $\widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)$. $\widetilde{\varphi}(\xi)$ является элементом пространства S бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со своими производными быстрее любой степени $|\xi|$. Поэтому при $t\neq 0$ $|\widetilde{\varphi}\left((t-\zeta)/h\right)|\leqslant \text{const}\,\dfrac{1}{(1+|t-\zeta|/h)^M}=O(h^M)$ с любым M. В частности, при $t\neq 0$

$$|\widetilde{\varphi}\left((t+\zeta)/h\right)|=o\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\left(1/|\mu(2\pi is/h|^2\right)\right).$$

Значит, для асимптотически оптимальной функции достаточно оставить только слагаемое с $t=0$

$$C^{as}(x,h)=\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}\cdot h^{-n}\cdot\widetilde{\varphi}(\zeta/h)\cdot 1/|\mu(2\pi i\zeta/h|^2/\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}1/|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2.$$

Здесь тоже выделим слагаемое с $s=0$.

$$C^{as}(x,h)=\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}h^{-n}\widetilde{\varphi}\left(\zeta/h\right)-$$

$$-\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}h^{-n}\widetilde{\varphi}\left(\zeta/h\right)\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\dfrac{|\mu(2\pi i\zeta/h|^2}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}}{1+\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\dfrac{|\mu(2\pi i\zeta/h|^2}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}}.$$

Первое слагаемое есть

$$\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}h^{-n}\widetilde{\varphi}\left(\zeta/h\right)=\int\limits_{Q/h}d\eta\; e^{2\pi i\eta x}\widetilde{\varphi}\left(\eta\right)=\varphi(x)+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q/h}d\eta\; e^{2\pi i\eta x}\widetilde{\varphi}\left(\eta\right).$$

Остаток $\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q/h}d\eta\; e^{2\pi i\eta x}\widetilde{\varphi}\left(\eta\right)=o\left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\dfrac{1}{|\mu(2\pi is/h)|^2}\right)$, так как $\widetilde{\varphi}\in S$.
Поэтому первое слагаемое в формуле $C^{as}(x,h)$ заменим на $\varphi(x)$.

Оценим второе слагаемое. Пусть $\delta \in (0,1)$ удовлетворяет условию

$$\max_{|\zeta|\leqslant h^\delta} |\mu(2\pi i\zeta/h)|^2 = o\left(1/\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}\right)^{1/2}\right).$$

Тогда дробь, выписанная в формуле второго слагаемого,

$$\frac{\displaystyle\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\frac{|\mu(2\pi i\zeta/h|^2}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}}{1+\displaystyle\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\frac{|\mu(2\pi i\zeta/h|^2}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}},$$

не превосходит $o\left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}\right)$.

А для $|\zeta| > h^\delta$ используем то, что вся эта дробь меньше 1. Поэтому соответствующая часть интеграла по ζ допускает оценку
$h^{-n}\int\limits_{\substack{\zeta\in Q,\\ |\zeta|>h^\delta}} d\zeta\, |\widetilde{\varphi}(\zeta/h)| \leqslant \mathrm{const}\ \cdot h^{-n}\int\limits_{\substack{\zeta\in Q,\\ |\zeta|>h^\delta}} d\zeta\,\frac{1}{(1+|\zeta/h|)^M}$ с любым M.

Очевидно, что при достаточно большом M это есть

$$O(h^{(1-\delta)(M-n)}) = o\left(\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}\right)^{1/2}\right).$$

Таким образом, мы показали, что при $\varphi \in C_0^\infty$ можно положить

$$C^{as}(x,h) = \varphi(x).$$

6. Функция асимптотически оптимальных коэффициентов вне пограничного слоя

Теперь покажем, что для внутренних узлов, удаленных от границы Γ, области больше, чем на $\psi(h)$, в асимптотически оптимальной формуле можно полагать значения коэффициентов $c_k(h)$ равными $\varphi(hk)$. Действительно, функцию $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ через гладкую границу Γ можно продолжить с сохранением гладкости любых порядков производных вне области — на все пространство. Причем вне некоторого шара $\{x \mid |x| \leqslant R\}$ можно считать $\varphi(x) \equiv 0$.

Для оптимальной кубатурной формулы, выписанной для области $\{x \mid |x| \leqslant R\}\setminus\Omega$, внутренность Ω будет внешностью. Соответственно, сохраняя асимптотическую оптимальность, можно полагать коэффициенты нулевыми для узлов, лежащих внутри Ω на расстоянии $\psi(h)$ от границы Γ. Разность асимптотически оптимальных формул для области $\{x \mid |x| \leqslant R\}$ с $\varphi \in C_0^\infty(\{x \mid |x| \leqslant R\})$ и области $\{x \mid |x| \leqslant R\}\setminus\Omega$ будет асимптотически оптимальной для области Ω с $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Очевидно, ее коэффициенты в узлах из Ω, удаленных от границы Γ на расстояние большее $\psi(h)$, будут равны значениям весовой функции $\varphi(x)$ в этих узлах.

В частности, для $\varphi(x) = \chi_\Omega(x)$ — характеристической функции области Ω, в этих внутренних узлах коэффициенты равны 1. Таким образом, в этом отношении полученные формулы являются естественными обобщениями кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. Здесь следует отметить, что прежнее определение ОПС формул [6] ограничивало толщину пограничного слоя порядком $O(h)$. Пограничиный слой наших формул толще, имеет порядок $\psi(h)$. Поэтому изменим определение свойства ОПС, разрешив большую толщину пограничного слоя. Пусть теперь требуется, чтобы толщина пограничного слоя была $o(1)$ при $h \to 0$. Это сохраняет основные качественные свойства решетчатых ОПС формул, полезные в приложениях, в частности, утверждение об эквивалентности порядковой и асимптотической оптимальностей решетчатых ОПС формул на семействах W_p^m пространств [5].

Предлагаемые формулы являются асимптотически оптимальными на каждом $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$–пространстве интегрантов, вложенном в $C(\mathbb{R}^n)$.

Сформулируем этот наш основной результат

Рассматриваются решетчатые кубатурные формулы $\mathcal{K}_h(f)=h^n\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k f(hk)$, приближающие интегралы с весом $\mathcal{I}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\ltimes}} dx\ \varphi(x)f(x)$. Весовая функция предполагается гладкой в ограниченной области Ω с гладкой границей Γ : $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{\Omega},\ \varphi \in \mathbb{C}^{\infty}(\overline{\Omega}),\ \Gamma \in \mathbb{C}^{\infty}$. Интегранты f принадлежат пространствам $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ с нормами

$$\|f \mid W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)\| = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi |\widetilde{f}(\xi)\cdot \mu(2\pi i\xi)|^2}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi |\mu(2\pi i \xi)|^2 < \infty.$$

Другие свойства функций μ перечислены в начале пункта 2.

Теорема 2. *Асимптотически оптимальная решетчатая кубатурная формула с ограниченным пограничным слоем может быть задана такой функцией своих коэффициентов* $c_k^{as}(h) = C^{as}(hk,h)$,

$$C^{as}(x,h) = \begin{cases} 0 & \text{при } dist(x,\Omega) \geqslant O(h^{\gamma}),\\ \varphi(x) & \text{при } dist(x,\mathbb{R}^n\backslash\Omega) \geqslant O(h^{\gamma}),\\ C^{opt}(x,h) = \int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h} h^{-n}\cdot & \\ \cdot\dfrac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n}\widetilde{\varphi}\left((t+\zeta)/h\right)/|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h|^2}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1/|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2} & \text{при } dist(x,\Gamma) \leqslant O(h^{\gamma}),\end{cases}$$

с любым $\gamma < \min(\delta,\rho)$, *где* ρ— *показатель гипоэллиптичности символа* μ, *см.* (5), *а* δ *определяется условием* (9).

Сформулируем этот результат в самом важном частном случае, когда пространство изотропно $\mu(2\pi i\xi) = (1+|2\pi\xi|^2)^{m/2}$, а интеграл невесовой

$$\varphi(x) \equiv \chi_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Omega},\\ 0, & x \neq \Omega.\end{cases}$$

Теорема 3. *Для любых* $m > n/2$ *асимптотически оптимальная кубатурная формула с ограниченным пограничным слоем может быть задана функцией коэффициентов: с любым* $\gamma < \frac{1}{2}$

$$C^{as}(x,h) = \begin{cases} 0 & \text{при } dist(x,\Omega) \geqslant h^{\gamma},\\ 1 & \text{при } dist(x,\mathbb{R}^n\backslash\Omega) \geqslant h^{\gamma},\\ C^{opt}(x,h) = \int\limits_{\Omega} dy \int\limits_Q d\zeta\ \cdot h^{-n} & \\ \cdot\dfrac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i(x-y)(t+\zeta)/h}/(h^2+|2\pi(t+\zeta)|^2)^m}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1/(h^2+|2\pi(s+\zeta)|^2)^m} & \text{при } dist(x,\Gamma) \leqslant h^{\gamma}.\end{cases}$$

7. Упрощение формулы асимптотически оптимальных коэффициентов в пограничном слое

Упростим формулу асимптотически оптимальных коэффициентов в пограничном слое. Пограничиный слой задается условием dist $(x,\Gamma)\leqslant\psi(h)=o(1)$ при $h\to 0$. Нам достаточно считать переменные y меняющимися в некоторой малой, но фиксированной (независимо от h) окрестности Γ_y. Эту окрестность вырежем домножением на соответствующую гладкую ступеньку $\varkappa_\Gamma(y)$, полагая вместо $\varphi(y)$ произведение $\varphi(y)\cdot\varkappa_\Gamma(y)\equiv g(y)$. С некоторой постоянной C $g(y)$ совпадает с $\varphi(y)$ в окрестности границы, dist $(y,\Gamma)\leqslant C$, и $g(y)=0$ в $\Omega\backslash\{y\mid \text{dist }(y,\Gamma)\leqslant 2C\}$.

$$C_\Gamma^{opt}(x,h)=\int\limits_{\Gamma_y}dy\,g(y)\int\limits_Q d\zeta\,h^{-n}e^{2\pi i(x-y)\zeta/h}\cdot\frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n}e^{-2\pi iyt/h}/\mu^2(2\pi i(t+\zeta)/h)}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n}1/\mu^2(2\pi i(s+\zeta)/h)}=$$

$$=h^{-n}\int\limits_Q d\zeta\int\limits_{\Gamma_y}dy\,g(y)e^{2\pi i(x-y)\zeta/h}\cdot\frac{1+\sum\limits_{t\neq 0}e^{-2\pi ity/h}\dfrac{\mu^2(2\pi i\zeta/h)}{\mu^2(2\pi i(t+\zeta)/h)}}{1+\sum\limits_{s\neq 0}\dfrac{\mu^2(2\pi i\zeta/h)}{\mu^2(2\pi i(s+\zeta)/h)}}.$$

Зададимся вопросом: для каких ζ будет

$$\sum_{s\neq 0}\frac{\mu^2(2\pi i\zeta/h)}{\mu^2(2\pi i(s-\zeta)/h)}=o(\nu_{opt}(h)),\text{где }\nu_{opt}(h)=\sqrt{\sum_{s\neq 0}\frac{1}{\mu^2(2\pi is/h)}}$$

— порядок оптимального функционала погрешности.

Дело в том, что для такого множества $\{\zeta\}_h$ можно убрать из формулы $C^{opt}(x,h)$ суммы $\sum\limits_{t\neq 0}$ и $\sum\limits_{s\neq 0}$. Останется

$$C_\Gamma^{as}(x,h)=h^{-1}\int\limits_{\{\zeta\}_h}d\zeta\int\limits_{\Gamma_y}g(y)e^{2\pi i(x-y)\zeta/h}\equiv\int\limits_{\{\zeta\}_h/h}d\xi\,\widetilde{g}(\xi)e^{2\pi ix\xi}. \tag{10}$$

Например, для $\mu(2\pi i\xi)=(1+|2\pi\xi|^2)^{m/2}$ наше требование означает

$$\sum_{s\neq 0}\left(\frac{1+|2\pi\zeta/h|^2}{1+|2\pi(s-\zeta)/h|^2}\right)^m=o(h^m).$$

Или $|\zeta/h|^{2m}\cdot h^{2m}=o(h^m)\Leftrightarrow|\zeta|\leqslant O(h^{\frac12+\varepsilon})$ с $\forall\varepsilon>0$.

В общем случае это будет некоторой окрестностью нуля

$$\{\zeta\}_h\equiv\left\{\zeta\mid|\zeta|\leqslant O(h^\alpha),\ \text{где }\mu(2\pi i\zeta/h)\leqslant o(1)\cdot\frac{1}{\nu_{opt}(h)}\right\}.$$

Заметим, что наши ранее проделанные вычисления показывают, что можно взять $\alpha=\delta$.

Для $|\zeta|\geqslant Ch^\delta$ при $t=0$ или $\forall\zeta\in Q$ при $t\neq 0$ упрощение формулы коэффициентов в пограничном слое произведем за счет интегрирования по частям по переменной y. Именно, будем много раз перебрасывать оператор Лапласа Δ_y с множителя

$$\Delta_y\left(e^{-2\pi i(t+\zeta)/h}\cdot\frac{h^2}{-|2\pi(t+\zeta)|^2}\right)|_{\forall t\in\mathbb{Z}^n}\ \text{ на }g(y).$$

Для этого воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_{\Gamma_y} dy\, g(y)\Delta_y f(y) = \int\limits_{\Gamma_y} dy\, \Delta_y g(y) f(y) + \\ + \int\limits_{\Gamma} d\Gamma\, g(y)\left(n_x(y), D_y\right) f(y) - \int\limits_{\Gamma} d\Gamma\, \left(n_{exp}(y), D_y\right) g(y) f(y).$$

После многократного применения этой формулы интеграл $\int\limits_{\Gamma_y}$ можно будет исключить, когда порядок этого слагаемого по h при $h \to 0$ станет выше $\nu_{opt}(h)$.

Итак, при $|\zeta| \geqslant Ch^\delta$ с $f(y) = e^{-2\pi i(t+\zeta)/h} \cdot \dfrac{h^2}{-|2\pi(t+\zeta)|^2}$ имеем

$$C_\Gamma^{as}(x,h) = -\int\limits_{\substack{|\zeta|\geqslant ch^\delta,\,(t=0),\\ \zeta\in Q\ (t\neq 0)}} d\zeta\, h^{-n} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \left\{ \int\limits_{\Gamma} d\Gamma\, \left[\Delta^{j-1} g(y) \cdot \right.\right. \\ \cdot h^{2j-1} \cdot \frac{\langle n_{ex}(y), 2\pi i(t+\zeta)\rangle}{(-\left|2\pi(t+\zeta)\right|^2)^j} - \langle n_{ex}(y), D_y\rangle \Delta_y^{j-1} g(y) \cdot \\ \left.\left. \cdot \frac{e^{-2\pi i(t+\zeta)y/h}}{(-|2\pi(t+\zeta)|^2)^j} h^{2j}\right] \cdot \frac{\mu^2(2\pi i(t+\zeta)/h)}{\frac{1}{\mu^2(2\pi i\zeta/h)} + \sum\limits_{s\neq 0} \frac{1}{\mu^2(2\pi i(s+\zeta)/h)}} \right\} e^{2\pi i x\zeta/h}.$$

Надо взять J из условия $h^{(1-\delta)\cdot 2J-n} = o(\nu^{opt}(h))$. Например, при $\mu(2\pi i\xi) = (1+|2\pi\xi|^2)^{m/2}$ получаем $J > \dfrac{m+n}{2(1-\delta)}$.

В итоге, функция асимптотически оптимальных коэффициентов в пограничном слое $\operatorname{dist}\,(x,\Gamma) \leqslant h^\gamma$ принимает вид

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{|\xi|\leqslant O(h^{\delta-1})} d\xi\, \widetilde{g}(\xi) e^{2\pi i x\xi} + h^{-n} \int\limits_{\substack{|\zeta|\geqslant ch^\delta,\,(t=0),\\ \zeta\in Q\ (t\neq 0)}} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} \\ \sum_{j=1}^{J} \frac{\int\limits_{\Gamma} d\Gamma\left[\dfrac{e^{-2\pi i(t+\zeta)y/h}}{(-|2\pi(t+\zeta)|^2)^j} h^{2j-1}\langle n_e(y), 2\pi i(t+\zeta) - D_y\rangle\right]}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} \dfrac{1}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^2}} \cdot \Delta^{j-1} g(y) e^{2\pi i x\zeta/h}.$$

Напомним: здесь $\delta > 0$ определяется условием

$$\left\{\zeta \mid |\zeta| \leqslant O(h^\delta)\right\} \subset \left\{\zeta \mid |\mu(2\pi i(\zeta/h)|^2 = o(1)/\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} |\mu(2\pi i s/h)|^{-2}\right)^{1/2}\right\},$$

а $J = J(h)$ — условием $h^{(1-\delta)\cdot 2J-n} = o\left(\left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} |\mu(2\pi i s/h)|^{-2}\right)^{1/2}\right)$.

Если $\varphi(x) = \chi_\Omega(x)$, то в пограничном слоем $D^\beta g(y)\mid_\Gamma = 0$ при любой $|\beta| \geqslant 1$ и остается

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{|\xi|\leqslant c\cdot h^{\delta-1}} d\xi\, \widetilde{\varkappa_\Gamma}(\xi) e^{2\pi i x\xi} -$$

$$- i\cdot h^{-n} \int\limits_{\substack{|\zeta|\geqslant ch^{\delta},\,(t=0),\\ \zeta\in Q\,(t\neq 0)}} \frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n} \dfrac{1}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} \int\limits_{\Gamma} d\Gamma \langle n_{ex}(y), \frac{(t+\zeta)}{|t+\zeta|^2}\rangle}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} \dfrac{1}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^2}} \cdot e^{-2\pi i y t/h}\cdot e^{2\pi i(x-y)\zeta/h}.$$

Для дальнейших преобразований введем разбиение единицы в приграничной области $\Omega\cap\operatorname{supp}\varkappa_\Gamma$, $\sum\limits_{p=1}^{P}\varphi_p(y)\equiv 1$. Можно сделать (так и будем считать), чтобы пересечение границы Γ с носителем любой функции φ_p задавалось уравнением, выражающим одну координату через остальные:

$$\forall p\quad \Gamma\cap\operatorname{supp}\varphi_p = \left\{y \mid y_p = \gamma_p(y_1,\ldots,y_{s_p-1},y_{s_p+1},\ldots,y_n)\right\},$$

причем $\gamma\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$.

Теперь

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{|\xi|\leqslant c\cdot h^{\delta-1}} d\xi\, \widetilde{\varkappa_\Gamma}(\xi) e^{2\pi i x\xi} + \sum_{p=1}^{P} C^{as}_p(x,h)$$

с

$$C_p(x,h) = -i\cdot h^{-n} \int\limits_{\substack{|\zeta|\geqslant ch^{\delta},\,(t=0),\\ \zeta\in Q\,(t\neq 0)}} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^{-2}}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n}|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^{-2}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\Gamma} d\Gamma\varphi_p(y)\langle n_{ex}(y), \frac{t+\zeta}{|t+\zeta|^2}\rangle\cdot e^{-2\pi i y t/h + 2\pi i(x-y)\zeta/h}. \quad (11)$$

Для сокращения записи вычисления проведем только для содержащегося внутри формулы $C(x,h)$ интеграла по Γ, считая

$$\Gamma\cap\operatorname{supp}\varphi_p = \{y \mid y_n = \gamma(y_1,\ldots,y_{n-1}) \equiv \gamma(y')\}.$$

Остановимся сначала на варианте $\gamma(y')\equiv$ const $= y_n^0$. Тогда $n_{ex} = \begin{pmatrix} 0' \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\int\limits_{\Gamma} d\Gamma\varphi_p(y)\langle n_{ex}(y), t+\zeta\rangle/|t+\zeta|^2\cdot e^{-2\pi i y t/h + 2\pi i(x-y)\zeta/h} =$$

$$= \int dy' \frac{\varphi_p(y',\gamma(y'))}{\sqrt{1+|D\gamma(y')|^2}} \frac{t_n+\zeta_n}{|t_n+\zeta_n|^2} e^{-2\pi i(t'+\zeta')y'/h}\cdot e^{2\pi i x\zeta/h - 2\pi i y_n^0(t_n+\zeta_n)/h}.$$

В интеграле по y' произведем многократные интегрирования по частям, используя формулу

$$(-\Delta_{y'})^N \left(\frac{h}{2\pi|t'+\zeta'|}\right)^{2N} e^{-2\pi i(t'+\zeta')y'/h} = e^{-2\pi i(t'+\zeta')y'/h}.$$

Дифференциальный оператор $(-\Delta_{y'})^N$ перекинем на сомножитель $\dfrac{\varphi_p(y',\gamma(y'))}{\sqrt{1+|D\gamma(y')|^2}}$. Благодаря финитности функции $\varphi_p(y',\gamma(y'))$ граничные члены не появятся.

Самая грубая оценка результата дает порядок убывания при $h \to 0$ больший $O\left(h^{(1-\delta)\cdot 2N}\right)$, который при достаточно большом x можно сделать бесконечно малым по сравнению с главным членом. Таким образом, мы можем пренебречь слагаемыми $C_p(x,h)$ с функциями γ_p, являющимися константами.

Рассмотрим общий случай $D\gamma(y') \not\equiv 0$, для которого построим специальный оператор интегрирования по частям. Мы хотим подобрать функцию $f(y',h)$, удовлетворяющую условию

$$\Delta_y \cdot \left[f(y',h) \cdot \frac{e^{2\pi i \xi_n \gamma(y') - 2\pi i \xi' y'}}{|\xi|^2} \right] = e^{2\pi i \xi_n \gamma(y') - 2\pi i \xi' y'}. \tag{12}$$

Здесь обозначено $\xi = \frac{t+\zeta}{h}$ с $|\zeta| > ch^\delta$ при $t = 0$ и $\zeta \in Q$ при $t \neq 0$. То есть при $h \to 0$ $|\xi| \equiv \lambda \to \infty$ с порядком не ниже $h^{1-\delta}$.

Функция f должна быть решением уравнения

$$M(y',D)f \equiv \Delta_{y'} f - 4\pi i \langle \xi' + \xi_n D\gamma(y'), D_{y'} f \rangle - \\ - \left[\left| 2\pi\xi' + 2\pi\xi_n D\gamma(y') \right|^2 + 2\pi i \xi_n \Delta_{y'} \gamma \right] f = \lambda^2. \tag{13}$$

Ищем это решение в виде $f(y',h) = g(\lambda \cdot y', h)$, что приводит к такому уравнению для $g(z',h)$: где

$$L(z',D)g \equiv \Delta_{z'} g - 4\pi i \langle e' + e_n D\gamma, D_{z'} g \rangle - \\ - 2\pi \left[\left| e' + e_n D\gamma \right|^2 + i e_n \Delta\gamma / \lambda \right] g = 1, \tag{14}$$

где $e \equiv \xi/\lambda$.

Естественно положить $g(z',h) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} g_s(z',h)/\lambda^s$ с рекуррентными соотношениями для функций g_s : $\quad \forall s \geqslant 0$ и $g_{-1} \equiv 0$

$$L_1(z',D)g_s \equiv \Delta g_s - 4\pi i \langle e' + e_n D\gamma, D g_s \rangle - \\ - 4\pi^2 |e' + e_n D\gamma|^2 g_s = 2\pi i e_n \Delta\gamma \cdot g_{s-1} + \delta_0^1. \tag{15}$$

Или

$$\Delta g_0 - 4\pi^2 |e' + e_n D\gamma|^2 g_0 - 4\pi i \langle e' + e_n D\gamma, D g_0 \rangle = 1.$$

а для $s \geqslant 1$

$$\Delta g_s - 4\pi^2 |e' + e_n D\gamma|^2 g_s - 4\pi i \langle e' + e_n D\gamma, D g_s \rangle = 2\pi i e_n \Delta\gamma \cdot g_{s-1}.$$

Область определения функции g — это увеличенная в λ раз область определения f — последняя является ограниченным множеством в $\mathbb{R}^{n-1}$,
$\{ y' \mid (y', \gamma(y')) \in \Gamma \cap \operatorname{supp} \varphi_p \}$.

Наше требование к f следующее: каждое найденное решение уравнения $M(y',D)f_r = f_{r-1}$, $r \geqslant 1$, $f_0 = 1$, должно быть ограниченным равномерно по $\lambda \to \infty$. Но может быть, с весом λ^{-k} с фиксированным k при $r \to \infty$.

Безусловно, все f_r бесконечно дифференцируемы как решения эллиптических уравнений (13) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Но нужны равномерные по λ оценки. Благодаря теореме вложения $W_2^m(\mathbb{R}^{n-1}) \subset C(\mathbb{R}^{n-1})$ при $m > \dfrac{n-1}{2}$ достаточно иметь оценки W_2^m –норм, допуская $K = m$. Это значит, достаточно получить равномерные по λ оценки W_2^m–норм функции $g(z',h)$, которая удовлетворяет более удобному для нас эллиптическому уравнению (14) с ограниченными коэффициентами. Годится любое подходящее решение, поэтому рассмотрим область определения $g(z',h)$, продолжив коэффициенты (теми же аналитическими выражениями) и потребовав от g быть решением однородной краевой задачи Дирихле в расширенной области,границу которой можно считать тоже бесконечно дифференцируемой. Перейдем к уравнению (15). Обычными априорными оценками можно показать, что решение такой задачи будет единственным и, следовательно, будет существовать в W_2^2 при любых правых частях из $\mathcal{L}_2$. Более того, по теоремам о повышении гладкости эллиптического уравнения с оператором Лапласа в главной части получим принадлежность функции g пространству W_2^m с оценкой нормы равномерно по $\lambda \to \infty$ (несмотря на то, что диаметр области растет пропорционально λ). Это то, что нам нужно.

Теперь обратимся к формуле (12), поместив ее в интеграл $\int\limits_{\Gamma} dy'$. Интегрированием по частям перебросим оператор Лапласа $\Delta_{y'}$ на остальные сомножители и в результате получим функцию f/λ^2. Повторяя такую операцию много раз, накопим в знаменателе множитель $\dfrac{1}{\lambda^{2N-m}}$. Это при достаточно большом N обеспечит всему интегралу порядок убывания по h, пренебрежимо малый по сравнению с главным членом. Таким образом, и в общем случае в пограничном слое остается только

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{|\xi| \leqslant c\cdot h^{\delta-1}} d\xi\, \widetilde{\varkappa_\Gamma}(\xi) e^{2\pi i x \xi}.$$

Теорема 4. *Асимптотически оптимальную решетчатую кубатурную формулу, приближающую* $\int\limits_{\Omega} dx\, f(x)$ *на интегрантах из пространства* $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ *с гипоэллиптическим символом гладкости* $\mu(2\pi i\xi)$ *с показателем* $\rho \in (0,1]$, *подчиненным условию* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \dfrac{d\xi}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} < \infty$, *можно задать функцией коэффициентов*

$$C^{as}(x,h) = \begin{cases} 0, & \text{для } dist(x,\Omega) \geqslant h^{\gamma}, \\ 1, & \text{для } dist(x,\mathbb{R}^n\backslash\Omega) \geqslant h^{\gamma}, \\ \int\limits_{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\xi_j| \leqslant h^{\delta-1}} d\xi\, \widetilde{\varkappa}(\xi) e^{2\pi i x\xi}, & \text{для } dist(x,\Gamma) \geqslant h^{\gamma}. \end{cases}$$

с любым $\gamma < \min(\rho,\delta)$, *где* $\delta \in (0,1)$ *и выбирается из условия*

$$\int\limits_{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\xi_j| \leqslant h^{\delta-1}} d\xi\, |\mu(2\pi i\xi)|^2 \cdot \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\backslash 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2} \right)^{1/2} = o(1).$$

Например, для $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ *пространств можно взять любое* $\delta \leqslant \dfrac{1}{2}$ *и* $\rho = 1$. *Тогда будет* $\gamma \leqslant \dfrac{1}{2}$.

8. Заключение

Нам удалось получить асимптотически ненасыщаемую формулу. То есть вид коэффициентов не зависит от показателя гладкости — функции $\mu(2\pi i\xi)$. А в частном случае (наиболее важном) $\mu(2\pi i\xi) = (1+|2\pi\xi|^2)^{m/2}$ и толщина пограничного слоя остается одной и той же для всех $m > \frac{n}{2}$. И над каждым пространством интегрантов $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ наши формулы коэффициентов дают асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем.

Более того, вид функции коэффициентов в пограничном слое проявляет явление Гиббса в колебаниях амплитуд коэффициентов кубатурной формулы. В частности, эти колебания амплитуд не зависят от гладкостей, заданных пространствами $W_2^m(\mathbb{R}^n)$. В указанном пограничном слое

$$|C^{as}(x,h)| \leqslant \left| \int\limits_{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\xi_j|\leqslant h^{\delta-1}} d\xi \int\limits_{\Omega} dy\, \varkappa_\Gamma(y) e^{-2\pi i y\xi + 2\pi i x\xi} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} dy\, \varkappa_\Gamma(y) \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin 2\pi(x_j-y_j)h^{\delta-1}}{\pi(x_j-y_j)} \right|.$$

Согласно явлению Гиббса последнее выражение ограничено равномерно по x и h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука. 1974. 808 с.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. *Кубатурные формулы.* Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН. 1996. 484 с.
3. S.L. Sobolev, V.L. Vaskevich *The Theory of Cubature Formulas (Mathematics and Its Applications)* // 1st edition. Kluwer. 1997. ISBN 0792346319.
4. Рамазанов М.Д. *Периодическая кубатурная формула интеграла с весом* // Кубатурные формулы и их приложения. X международный семинар-совещание. 24–28 августа 2009 г., г. Улан-Удэ. Материалы конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2009. С. 118–124.
5. M.D. Ramazanov *To the L_p-theory of Sobolev formulas* // Siberian advances in mathematics. 1999. Vol. 9, № 1. P. 99–125.
6. Рамазанов М.Д. *Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем.* ИМВЦ УНЦ РАН. Уфа: ДизайнПолиграфСервис, 2009. 178 с.
7. Бабенко К.И. *Основы численного анализа.* 2-е изд. М. ; Ижевск: РХД, 2002. 848 с.
8. V.N. Belykh *On the best approximation properties of C^∞-smooth functions on an interval of the real axis (to the phenomenon of unsaturated numerical methods)* // Siberian Mathematical Journal. 2005. Vol. 46, № 3. P. 373–385.
9. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс.* М.: Наука. 1965. 328 с.

Марат Давидович Рамазанов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: ramazanovmd@yandex.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 81-105.

УДК 517.5

АСИМПТОТИКА δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ АССОЦИИРОВАННЫХ МЕР

А.А. РУМЯНЦЕВА

Аннотация. Изучается вопрос о связи аимптотического поведения разности двух субгармонических функций $u_1 - u_2$ в окрестности бесконечности и разности их ассоциированных мер $\mu_1 - \mu_2$. Асимптотическое поведение разности рассматривается вне исключительных множеств "степенной"малости, а именно, вне множества, которое при любом γ допускает покрытие кругами $B(z_j, r_j)$, удовлетворяющее условию

$$\sum_{R/2 \le |z_j| \le R} r_j = o(R^{\gamma+1}),\ R \longrightarrow \infty.$$

Асимптотика разности ассоциированных мер характеризуется поведением функции

$$\max_{R \le |z|/2} \left| \int_0^R \frac{\mu_1(z,t) - \mu_2(z,t)}{t} dt \right|$$

в бесконечности. Доказано, например, что эта функция ведет себя как $o(|z|^\sigma)$, если разность $|u_1(z) - u_2(z)|$ вне исключительного множества "степенной"малости ведет себя как $o(|z|^\sigma)$. Если $\sigma \notin \mathbb{N}$, то вернго и обратное утверждение.

Ключевые слова: Субгармонические функции, ассоциированная мера, формула Йенсена, гармонические функции, представление Рисса.

Введение

Изучается вопрос об асимптотическом поведении δ-субгармонической функции $u = u_1 - u_2$ в терминах ассоциированных мер μ_1, μ_2 субгармонических функций u_1, u_2. Вводятся исключительные множества "степенной"малости. Так названы множества, для которых при любом $\gamma \in \mathbb{R}$ найдется покрытие кругами $B(z_j, r_j)$ так, что выполняется соотношение

$$\sum_{R/2 \le |z_j| \le R} r_j = o(R^{\gamma+1}),\ R \longrightarrow \infty.$$

Одной из причин для введения таких исключительных множеств является следующая теорема из работы [2], играющая заметную роль в теории субгармонических и целых функций.

Теорема А. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста. Тогда существует целая функция $f(z)$, которая для любого γ вне некоторого множества $A_\gamma \in C_\gamma$ удовлетворяет соотношению*

$$|v(z) - \ln|f(z)|| \le C_\gamma \ln|z|.$$

A.A. Rumyantseva, Asyptotic of δ-subharmonic functions and their associated measures.

Работа поддержана РФФИ № 10-01-00233 а.

Поступила 20 июня 2010 г.

Возникает естественный вопрос, каким образом должны быть распределены нули целой функции f, для того чтобы имело место указанное соотношение. Основная теорема данной работы, в частности, в некоторой степени отвечает на этот вопрос.

Основная теорема данной работы обобщает результаты, изложенные в работе [7].

Результаты в данном направлении находят применение в вопросах полноты систем экспонент в различных весовых пространствах (см. [8], [9]).

1. Подготовительные утверждения и формулировка основной теоремы

1.1. Исключительные множества. Круг с центром в точке z радиуса r будем обозначать через $B(z,r)$. Для заданного числа $\gamma \in \mathbb{R}$ множество A на плоскости будем называть множеством класса C_γ, если существует покрытие множества A кругами $B(z_j,r_j)=\{z:|z_j-z|<r_j\}$, $j=1,2,...$, так,что выполняется условие

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} r_j = o(R^{\gamma+1}), \quad R\longrightarrow\infty. \tag{1}$$

Ясно, что можно считать центры кругов различными и что множество центров не имеет конечных предельных точек. Значит, если кругов в покрытие бесконечно много, то $|z_j|\longrightarrow+\infty$, когда $j\longrightarrow\infty$. Кроме того, из соотношения (1) следует, что

$$r_j = o(|z_j|^{1+\gamma}), \quad j\longrightarrow\infty. \tag{2}$$

Перечислим простейшие свойства введенных классов.

1. Всякое ограниченное множество принадлежит любому классу C_γ.
2. Объединение конечного набора множеств класса C_γ принадлежит классу C_γ.
3. Если $\gamma_1\geq\gamma_2$, то $C_{\gamma_1}\supseteq C_{\gamma_2}$.
4. Множества класса C_0 являются C_0-множествами в классическом (см. [1]) смысле.
5. При $\gamma>0$ класс C_γ содержит всю плоскость, значит, любое подмножество $\mathbb{C}$. В этом можно убедиться, если рассмотреть покрытие из кругов с центрами в точках $z_{nk}=n^2e^{i\frac{\pi k}{n}}$ радиусами $t_{nk}=2\pi(n+1)$, $n\in\mathbb{N}$, $k=1,2,...,n$. Эти круги покрывают всю плоскость, и при этом выполняется соотношение ($\gamma>0$)

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} r_j \leq \text{Const. } R = o(R^{\gamma+1}), \quad R\longrightarrow\infty.$$

Таким образом, в качестве исключительных множеств имеет смысл рассматривать лишь множества класса C_γ при $\gamma\leq 0$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $\gamma\leq0$. Для $\gamma\neq-1$ классы C_γ описываются несколько более простым образом.

Утверждение 1. *Множество A принадлежит классу C_γ тогда и только тогда, когда существует покрытие этого множества кругами $B(z_j,r_j)$ так, что выполняется условие*

1. Если $\gamma>-1$, то

$$\sum_{|z_j|\leq R} r_j = o(R^{\gamma+1}). \tag{3}$$

2. Если $\gamma<-1$, то

$$\sum_{|z_j|\geq R} r_j = o(R^{\gamma+1}). \tag{3'}$$

Доказательство утверждения 1.

То, что из условия (3) или (3′) вытекает условие (1), очевидно.

Пусть $\gamma \neq -1$ и покрытие множества A кругами $B(z_j, r_j) = \{z : |z_j - z| < r_j\}$, $j = 1, 2, ...$, удовлетворяет условию (1). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ так, чтобы для всех $R \geq 2^m$ выполнялась оценка

$$\sum_{R/2 \leq |z_j| \leq 2R} r_j \leq \frac{\varepsilon(1 - 2^{-|\gamma+1|})}{2} R^{\gamma+1}. \tag{4}$$

1. Пусть $\gamma > -1$. Покажем, что покрытие множества A удовлетворяет условию (3). По выбору номера m для натуральных $n > m$ в силу соотношения (4) имеем

$$\sum_{2^m < |z_j| \leq 2^{n+1}} r_j = \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{2^k < |z_j| \leq 2^{k+2}} r_j \leq \frac{\varepsilon(1 - 2^{-(\gamma+1)})}{2} \sum_{k=m}^{n-1} 2^{(k+1)(\gamma+1)} =$$

$$= \frac{\varepsilon(1 - 2^{-(\gamma+1)})}{2} 2^{(\gamma+1)n} \sum_{k=0}^{n-m-1} 2^{-k(\gamma+1)} < \frac{\varepsilon}{2} 2^{(\gamma+1)n}. \tag{5}$$

Число R_1 выберем настолько большим, чтобы

$$\sum_{|z_j| \leq 2^m} r_j \leq \frac{\varepsilon}{2} R_1^{\gamma+1}. \tag{6}$$

Возьмем произвольное $R \geq \max(R_1, 2^m)$. Тогда если $2^n \leq R \leq 2^{n+1}$, то

$$\sum_{|z_j| \leq R} r_j \leq \sum_{|z_j| \leq 2^m} r_j + \sum_{2^m < |z_j| \leq 2^{n+1}} r_j.$$

Суммы в правой части оценим по соотношениям (5) и (6).

$$\sum_{|z_j| \leq R} r_j \leq \frac{\varepsilon}{2} R_1^{\gamma+1} + \frac{\varepsilon}{2} 2^{n(\gamma+1)} \leq \varepsilon R^{\gamma+1}.$$

Итак, в силу произвольности ε соотношение (1) выполнено.

2. Пусть $\gamma < -1$. Возьмем произвольное $R \geq 2^m$, если $2^n \leq R \leq 2^{n+1}$, то $2^{n+1} > 2^m$ и по соотношению (4) имеем

$$\sum_{|z_j| \geq R} r_j \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{2^k \leq |z_j| \leq 2^{k+2}} r_j \leq \frac{\varepsilon(1 - 2^{-|\gamma+1|})}{2} \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-(k+1)|\gamma+1|} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} 2^{-(n+1)|\gamma+1|} = \frac{\varepsilon}{2} 2^{(n+1)(\gamma+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} R^{\gamma+1}.$$

Утверждение 1 доказано.

Классические C_0-множества в теории целых функций применяются на основе такого свойства этих множеств: *для любого C_0-множества A и для всех достаточно больших R найдется окружность $C(0, t)$ радиуса $t \in (R; 2R)$, не пересекающаяся с множеством A.*

В следующем утверждении доказывается соответствующее свойство для множеств класса C_γ.

Утверждение 2. *Пусть $\gamma \leq 0$ и $A \in C_\gamma$. Тогда для любого положительного числа $q > 0$ (если $\gamma = 0$, то $q < \frac{1}{8}$) и для всех $z \in \mathbb{C}$ с достаточно большим $|z|$ найдется $t \in (q; 2q)$ такое, что окружность $C(z, t) = \{w : |w - z| = t|z|^{\gamma+1}\}$ не пересекается с множеством A.*

Доказательство утверждения 2.

Пусть $\mathcal{B} = \{B(z_j, r_j)\}$, $j = 1, 2, ...,$ — система кругов, покрывающих множество A так, что выполняется соотношение (1). Учитывая свойство покрытий (2), можем найти число $R_1 > 1$ так, что при $|z| > R_1$ будет выполняться неравенство $r_j < \frac{1}{8}|z_j|$. Для $z \in \mathbb{C}$

через $\mathcal{B}(z)$ обозначим множество кругов $B(z_j, r_j)$ из покрытия $\mathcal{B}$, пересекающихся с кругом $B = B(z, 2q|z|^{\gamma+1})$. Если круг покрытия $B(z_j, r_j) \in \mathcal{B}(z)$, то $|z - z_j| \leq r_j + 2q|z|^{\gamma+1}$ или

$$|z_j| \leq |z| + (r_j + 2q|z|^{\gamma+1}) < |z| + \frac{1}{8}|z_j| + 2q|z|^{\gamma+1}$$

Отсюда, учитывая, что $\gamma \leq 0$ и условие на q при $\gamma = 0$, получим для $|z| > R_1$ таких, что $2q|z|^\gamma < \frac{3}{4}$

$$\frac{7}{8}|z_j| \leq |z|(1 + 2q|z|^\gamma) < \frac{7}{4}|z|,$$

таким образом, $|z_j| < 2|z|$. С другой стороны,

$$|z_j| \geq |z| - (r_j + 2q|z|^{\gamma+1}) > |z| - \frac{1}{8}|z_j| - 2q|z|^{\gamma+1},$$

поэтому для $|z| > R_1$ таких, что $2q|z|^\gamma < \frac{7}{16}$

$$\frac{9}{8}|z_j| > |z|(1 - 2q|z|^\gamma) > \frac{9}{16}|z|$$

или $|z_j| > \frac{1}{2}|z|$. Мы доказали, что если круг покрытия $B(z_j, r_j)$ попадает в множество $\mathcal{B}(z)$, то при достаточно больших $|z|$ будет выполняться

$$\frac{1}{2}|z| < |z_j| < 2|z|. \tag{7}$$

Поворотом вокруг точки z спроецируем круги покрытия из $\mathcal{B}(z)$ на луч $\{w = z+\tau,\ \tau > 0\}$, и объединение полученных проекций обозначим через $b(z)$. Из неравенства (7) следует, что

$$\sum_{B(z_j,r_j)\in\mathcal{B}(z)} r_j \leq \sum_{\frac{|z|}{2}\leq|z_j|<2|z|} r_j$$

Из условия (1) следует, что при достаточно больших $|z|$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{B(z_j,r_j)\in\mathcal{B}(z)} r_j < q|z|^{\gamma+1}.$$

Это значит, что линейная лебегова мера множества $b(z)$ меньше $q|z|^{\gamma+1}$ и в отрезке $[z + q|z|^{\gamma+1}; z + 2q|z|^{\gamma+1}]$ найдется точка $z+t$, не принадлежащая $b(z)$. Тогда по построению число t удовлетворяет условиям утверждения 2.

Утверждение 2 доказано.

Пересечение всех классов C_γ обозначим через $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \bigcap_\gamma C_\gamma.$$

Следующее утверждение устанавливает связь между классами C_γ и $\mathcal{C}$.

Утверждение 3. *Пусть $u(z)$ — некоторая вещественнозначная функция на плоскости, $v(t)$ — неотрицательная функция на $(0, +\infty)$. Тогда если для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ найдутся множество $A_\gamma \in C_\gamma$ и постоянная M_γ такие, что выполняется соотношение*

$$u(z) \leq M_\gamma v(|z|), \quad z \notin A_\gamma, \tag{8}$$

то для любой положительной монотонно возрастающей до $+\infty$ функции $\chi(t)$ на $(0, +\infty)$ найдется множество $A \in \mathcal{C}$ так, что выполняется соотношение

$$u(z) \leq v(|z|)\chi(|z|), \quad z \notin A. \tag{9}$$

Доказательство утверждения 3. Возьмем произвольное натуральное число n. По условию (8) найдется множество $A_{-n} \in C_{-n}$ и постоянная M_{-n} такие, что выполняется соотношение

$$u(z) \le M_{-n} v(|z|), \quad z \notin A_{-n}. \tag{10}$$

Множество A_{-n} покрывается системой кружков $\mathcal{B}_n = \{B(z_j^{(n)}, r_j^{(n)})\}$, $j = 1, 2, ...$, так, что для некоторой постоянной T_{-n} будет выполняться оценка

$$\sum_{R/2<|z_j^{(n)}|<2R} r_j^{(n)} \le T_{-n} R^{-n}, \quad R > 1. \tag{11}$$

Переходя при необходимости к последовательности $T_{-n} := \max_{k=1,\dots,n} T_{-k}$, можно считать, что последовательность констант T_{-n} не убывает при возрастании n. Положим

$$R'_n = \min\{t > 0 : \ \chi(t) \ge M_{-n}\},$$

и определим возрастающую последовательность положительных чисел рекуррентными формулами $R_1 = 0$,

$$R_{n+1} = \max(2R_n, R'_{n+1}, 3T_{-(n+3)}), \ n = 1, 2, ...$$

Положим

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_{-n} \bigcap \{z : \ R_n \le |z| < R_{n+1}\} \right).$$

Возьмем произвольное $z \notin A$ и пусть $R_n \le |z| \le R_{n+1}$. По определению множества A точка z не принадлежит A_{-n}, значит выполняется оценка (10). По определению последовательности R_n имеем $|z| \ge R_n \ge R'_n$, а по определению последовательности R'_n получим $\chi(|z|) \ge M_{-n}$. Следовательно,

$$u(z) \le v(|z|)\chi(|z|), \quad z \notin A.$$

Тем самым, мы доказали соотношение (9).

Докажем, что $A \in \mathcal{C}$. Пусть система кругов $\mathcal{B} = \{B(z_j, r_j)\}$ состоит из кругов $B(z_j^{(n)}, r_j^{(n)})$, для которых $R_n \le |z_j^{(n)}| \le R_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$ Возьмем произвольное $R > 1$ и пусть $R_n \le R \le R_{n+1}$. По определению последовательности R_n имеем $\frac{R}{2} \ge \frac{R_n}{2} \ge R_{n-1}$ и $2R \le 2R_{n+1} \le R_{n+2}$. Таким образом, интервал $(\frac{R}{2}; 2R)$ может пересекаться с интервалами $(R_{k-1}; R_k)$ при $k = n, n+1, n+2$. Значит, если центр z_j круга покрытия из системы $\mathcal{B}$ попал в кольцо $\{z : \ |z| \in (\frac{R}{2}; 2R)\}$, то это может быть центром $z_s^{(k)}$ круга покрытия из системы $\mathcal{B}_k$ для $k = n, n+1, n+2$. Отсюда по свойствам (11) систем $\mathcal{B}_k$ получаем

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \le \sum_{k=n}^{n+2} \sum_{\frac{R}{2}<|z_s^{(k)}|<2R} r_s^{(k)} \le T_{-n} R^{-n} + T_{-(n+1)} R^{-(n+1)} + T_{-(n+2)} R^{-(n+2)}.$$

Так как последовательность T_{-n} возрастающая, то

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \le R^{-n}(T_{-n} + T_{-(n+1)} + T_{-(n+2)}) \le 3R^{-n} T_{-(n+2)}.$$

По определению $R_n \ge 3T_{-(n+2)}$ и $R_n \le R$, следовательно,

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \le 3R^{-n} T_{-(n+2)} \le R^{-n} R_n \le R^{-(n-1)}.$$

Таким образом, покрытие $\mathcal{B}$ множества A кругами $B(z_j, r_j)$ обладает свойством: для любого $R > 1$ если $R \in (R_n; R_{n+1})$, то

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \le R^{-(n-1)}. \tag{12}$$

Возьмем произвольное число γ и пусть натуральное число $m \ge -\gamma + 1$, например, $m = -[\gamma] + 1$. Возьмем произвольное число $R > 1$.

Множество $A' = A \bigcap B(0, 4R_m)$ как ограниченное множество принадлежит классу C_γ.

Выше определили систему кругов $\mathcal{B} = B(z_j, r_j)$, покрывающую множество A. Часть $\mathcal{B}'$, состоящая из кругов $B(z_j, r_j)$, для которых $|z_j| > 2R_m$, покрывает множество $A'' = A \setminus B(0, 3R_m)$. Возьмем произвольное число $R > 1$ и пусть $R_n \le R \le R_{n+1}$. Если $n + 1 \le m$, то $R_{n+1} \le R_m$ и в покрытии $\mathcal{B}'$ нет кругов с центром в кольце $\{\frac{R}{2} \le |z| \le 2R\}$. Если $n + 1 > m$, то $n + 1 \ge m + 1 \ge -\gamma + 2$, значит $-(n - 1) \le \gamma$ и по соотношению (12)

$$\sum_{\frac{R}{2}<|z_j|<2R} r_j \le R^{-(n-1)} \le R^\gamma = o(R^{\gamma+1}).$$

Это значит, что множество A'' принадлежит классу C_γ, следовательно, и множество $A = A' \bigcup A''$ принадлежит классу C_γ при любом γ.

Утверждение 3 доказано.

1.2. Оценочные функции. Через $k(t)$ будем обозначать функции на $(0, +\infty)$, используемые для характеристики роста δ-субгармонических функций и ассоциированных мер. Общие требования к этим функциям:

K1) функция $k(t) > 0$ и монотонно не убывающая и $\ln t = O(k(t))$;

K2) для некоторой константы K и для всех $t > 0$ верно

$$k(et) \le Kk(t).$$

Утверждение 4. *Для функции $k(t)$, удовлетворяющей условиям K1), K2), выполняются также следующие условия*

1. Для всех $t \ge e$ имеет место неравенство

$$k(t) \le k(e)t^{\ln K},$$

в частности,

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty} \frac{\ln k(t)}{\ln t} = \sigma \le \ln K.$$

2. Если $q = [\sigma]$ — целая часть σ, то

а) функция

$$k_q(t) = t^q \int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+1}}$$

удовлетворяет условияю K1) и при при $t \ge e$ — условию K2):

$$k_q(et) \le (K + e^q)k_q(t).$$

б) функция

$$k_{00}(t) = \int_1^t \left(\int_1^r \frac{k(\tau)d\tau}{\tau} \right) \frac{k(r)dr}{r}$$

удовлетворяет условияю K1) и при $t \ge e^2$ — условию K2):

$$k_{00}(et) \le (K + 2)k_{00}(t).$$

в) если интеграл сходится, то функция

$$\overline{k}_q(t) = t^{q+1} \int_t^\infty \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+2}}$$

при $t \geq 0$ *обладает свойствами К1), К2):*

$$\overline{k}_q(et) \leq e^{q+1}\overline{k}_q(t).$$

г) если функцию $k_{00}(t)$ *продолжить на отрезок [0,1] нулем, то функция* $k_{00}(|z|)$ *субгармонична на плоскости, причем*

$$\Delta k_{00}(|z|) = k(|z|)|z|^{-2},\ z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство утверждения 4.

Докажем пункт 1. Пусть $e^n \leq t < e^{n+1}$. Тогда $n \leq \ln t$ и по свойствам К1, К2 имеем

$$k(t) \leq k(e^{n+1}) \leq Kk(e^n) \leq ... \leq K^n k(e) \leq k(e)K^{\ln t} = k(e)t^{\ln K}.$$

Докажем пункт 2. Свойство К1 не очевидно только для функции $\overline{k}_q(t)$. Монотонность этой функции вытекает из неотрицательности ее производной:

$$\overline{k}_q'(t) = (q+1)t^q \int_t^\infty \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+2}} - \frac{k(t)}{t} \geq k(t)\left(t^q \int_t^\infty \frac{(q+1)d\tau}{\tau^{q+2}} - \frac{1}{t}\right) = 0.$$

Для функции $\overline{k}_q(t)$ свойство К2 очевидно. Пункт 2в доказан.

Докажем пункт 2а. По свойству К2 для функции $k(t)$ имеем при $t \geq e$

$$k_q(et) = e^q t^q \left(\int_e^{et} \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+1}} + \int_1^e \frac{k(\tau)d\tau}{\tau^{q+1}}\right) \leq$$

$$\leq t^q \int_1^t \frac{k(e\tau)d\tau}{t^{q+1}} + e^q t^q \int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{t^{q+1}} \leq (K+e^q)k_q(t).$$

Докажем пункт 2б. Поскольку

$$k_{00}(t) = \int_1^t \frac{k_0(\tau)d\tau}{\tau},$$

то при $t \geq e^2$ по пункту 2а

$$k_{00}(t) = \int_{e^2}^{et} \frac{k_0(\tau)d\tau}{\tau} + \int_1^{e^2} \frac{k_0(\tau)d\tau}{\tau} \leq \int_e^t \frac{k_0(e\tau)d\tau}{\tau} + \int_1^t \frac{k_0(\tau)d\tau}{\tau} \leq (K+2)\overline{k}_{00}(t).$$

Пункт 2г) доказывается непосредственным вычислением оператора Лапласа в полярных координатах.

Утверждение 4 доказано.

Определение. Будем говорить, что некоторое асимптотическое соотношение выполняется вне множеств степенной малости, если для любого γ найдется множество $A_\gamma \in C_\gamma$, вне которого это соотношение выполняется.

Для борелевской меры μ на плоскости через $\mu(z,t)$ будем обозначать μ-меру круга $B(z,t) = \{w : |w-z| < t\}$ и положим

$$M(\mu)(z) = \max_{R \leq |z|/2} \left| \int_0^R \frac{\mu(z,t)}{t} dt \right|.$$

Сформулируем основной результат, доказываемый в данной работе.

Основная теорема.

I. *Пусть* u_1, u_2 *— субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный порядок роста,* μ_1, μ_2 *— ассоциированные по Риссу меры этих функций и функция* $k(t)$ *удовлетворяет условиям К1, К2. Тогда если соотношение*

$$|u_1(z) - u_2(z)| = O(k(|z|)), \quad |z| \longrightarrow \infty,$$

выполняется вне множеств степенной малости, то соотношения

$$M(\mu_1-\mu_2)(z)=O(k(|z|)), |z|\longrightarrow\infty,$$

тоже выполняется вне множеств степенной малости.

II. *Пусть*

$$\sigma=\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}]\frac{\ln k(t)}{\ln t}$$

и $q=[\sigma]$ *— целая часть* σ. *Если соотношение*

$$M(\mu_1-\mu_2)(z)=O(k(|z|)), |z|\longrightarrow\infty,$$

выполняется вне множеств степенной малости, то существует гармоническая на всей плоскости функция $H(z)$ *так, что соотношение*

$$|u_1(z)-u_2(z)+H(z)|=O\left(\int_1^{|z|}\left(\int_1^t\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t}+\frac{1}{q+1}\int_1^{|z|}\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}+\right.$$

$$\left.+\chi(q)|z|^q\int_1^{|z|}\frac{k(t)dt}{t^{q+1}}+\frac{1}{q+1}|z|^{q+1}\int_{|z|}^{\infty}\frac{k(t)dt}{t^{q+2}}+k(1)\ln|z|\right), \qquad (*)$$

где $\chi(0)=0$ *и* $\chi(q)=\frac{1}{q}$ *при* $q>0$, *выполняется вне множеств степенной малости.*

Довольно сложный вид соотношения $(*)$ во второй части теоремы связан с тем, что доказателство этой части основано на теореме B, которая, в свою очередь, основана на первичных множителях Веерштрассе. Однако, в некоторых частных случаях неравенство $(*)$ записывается просто. Так, если $k(t)=t^\sigma$ и $\sigma\notin\mathbb{N}$, то $(*)$ приобретает вид

$$|u_1(z)-u_2(z)+H(z)|=O(k(|z|)).$$

Если же $\sigma\in\mathbb{N}$, то можно оценить погрубее

$$|u_1(z)-u_2(z)+H(z)|=O(k(|z|)\ln|z|).$$

Более общим образом, такие оценки верны, когда $k(t)=t^\sigma s(t)$, где $s(t)$ — возрастающая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию $rs'(r)=o(s(r))$.

2. Доказательство первой части основной теоремы

Теорема 1. *Пусть* u_1,u_2 *— субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный порядок роста,* μ_1,μ_2 *— ассоциированные по Риссу меры этих функций, и функция* $k(t)$ *удовлетворяет условиям K1, K2. Тогда если для любого* γ *существует некоторое исключительное множество* $A_\gamma\in C_\gamma$ *такое, что выполняется оценка*

$$|u_1(z)-u_2(z)|\le k(|z|),\quad z\notin A_\gamma,$$

то для любого γ *существуют некоторое исключительное множество* $A'_\gamma\in C_\gamma$ *и постоянная* M_γ *такие, что выполняются соотношения*

$$\left|\int_0^R\frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt\right|\le M_\gamma k(|z|),\quad z\notin A'_\gamma,\ R\in\left(0,\frac{|z|}{2}\right).$$

Для доказательства этой теоремы докажем две подготовительные леммы.

Лемма 1. *Пусть неотрицательная борелевская мера на плоскости удовлетворяет условию*

$$\mu(0,t)\le Ct^\rho,\quad t>1,$$

и $\alpha\in\mathbb{R}$. *Тогда множество точек* z, *не удовлетворяющих условию*

$$\mu(z,t)\le|z|^\alpha t,\quad t\in(0,\frac{|z|}{2}), \qquad (13)$$

принадлежит классу C_γ для любого $\gamma > \rho - \alpha - 1$. Более точно, это множество покрывается кругами $B(z_j, r_j)$ таким образом, что имеет место соотношение

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} r_j \leq Const.R^{\rho-\alpha}, \quad R > 1.$$

Доказательство.

Возьмем число α и множество точек, не удовлетворяющих условию (13), обозначим через E. Таким образом, для каждой точки $z \in E$ найдется число $t_z \in (0, \frac{|z|}{2})$, так, что имеет место неравенство

$$\mu(z, t_z) > |z|^\alpha t_z.$$

Воспользуемся следующим утверждением (см. [4], стр. 246)

Лемма (О покрытиях шарами).

Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^p$ покрыто шарами так, что каждая точка $x \in A$ является центром некоторого шара $S(x)$ радиуса $r(x)$. Если $\sup_{x\in A} r(x) < \infty$, то из системы $\{S(x)\}$ можно выделить не более чем счетную систему $\{S(x_k)\}$, покрывающую все множество A и имеющую кратность, не превосходящую некоторого числа $N(p)$, зависящего только от размерности пространства.

Через E_n, $n = 1, 2, ...$, обозначим пересечение множества E с кольцом $\{2^{n-1} \leq |z| \leq 2^n\}$, $E_0 = E \bigcap B(0, 1)$. Множество E_n покрыто кругами $B(z, t_z)$, $z \in E_n$. Поскольку $t_z < \frac{|z|}{2}$, то это покрытие удовлетворяет условиям леммы о покрытиях. Значит, при каждом n найдется система точек $z_j^{(n)} \in E_n$, такая, что система кругов $\mathcal{B}_n = \{B(z_j^{(n)}, t_j^{(n)})\}$, где $t_j^{(n)} = t_{z_j^{(n)}}$, покрывает все множество E_n, при этом любая точка плоскости попадает не более чем в $N(2)$ из этих кругов. Объединение всех систем $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n = \{B(z_k, t_k)\}$, $k \geq 1$, покрывает все множество E, и при этом любая точка плоскости попадает не более чем в $3N(2)$ из этих кругов. Поскольку

$$\mu(z_j, t_j) > |z_j|^\alpha t_j,$$

то

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} t_j < \sum_{R/2<|z_j|<2R} |z_j|^{-\alpha} \mu(z_j, t_j).$$

Рассматривая отдельно случаи $\alpha \geq 0$ и $\alpha < 0$, получим отсюда

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} t_j < 2^{\alpha^+} R^{-\alpha} \sum_{R/2<|z_j|<2R} \mu(z_j, t_j),$$

где $\alpha^+ = \max(\alpha, 0)$. Теперь из обозначенных свойств покрытия $\mathcal{B}$ и из того, что $t_j < \frac{|z_j|}{2}$ следует оценка

$$\sum_{R/2<|z_j|<2R} t_j < 3N(2) \cdot 2^{\alpha^+} R^{-\alpha} \mu(0, 4R) \leq 4^{\rho+1} N(2) C 2^{\alpha^+} R^{\rho-\alpha}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющяя конечный порядок роста, то есть для некоторых δ, ρ*

$$u(z) \leq \delta |z|^\rho, \quad |z| > 1, \tag{14}$$

и A — открытое множество на плоскости. Тогда существует постоянная C, не зависящая от множества A, такая, что для всех $w \in \mathbb{C}$, $|w| > 1$, и $R \in \left(0, \frac{|w|}{2}\right)$ выполняется оценка

$$\int_{C(w,R)\bigcap A} |u(\zeta)| ds(\zeta) \leq C|w|^\rho s(C(w, R) \bigcap A) \ln \frac{2\pi |w| e}{s(C(w, R) \bigcap A)},$$

где $ds(\zeta)$ — элемент длины дуги окружности $C(w,R)=\{z:|w-z|=R\}$.

Доказательство.

1. Очевидно, что функция $u^+(z)$ удовлетворяет неравенству (14), значит, для некоторого δ_1 для всех $z\in\mathbb{C}$ выполняется оценка $u^+(z)\le\delta_1(|z|+1)^\rho$. Следовательно, для всех $w\in\mathbb{C}$, $|w|\ge 1$ и $R\in\left(0,\frac{|w|}{2}\right)$ имеем

$$\int_{C(w,R)\bigcap A} u^+(\zeta)ds(\zeta)\le\delta_1 2^\rho|w|^\rho s(C(w,R)\bigcap A), \tag{15}$$

Из представления $|u|=2u^+-u$ получаем, что теперь для доказательства леммы 2 нужно соответствующим образом оценить снизу интеграл

$$\int_{C(w,R)\bigcap A} u(\zeta)ds(\zeta).$$

Положим $T=4|w|$ и воспользуемся представлением Грина функции u в круге $B=B(0,T)$:

$$u(\zeta)=H(\zeta)-\int_B G(\zeta,z)d\mu(z), \tag{16}$$

где

$$H(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T^2-|\zeta|^2}{|Te^{i\varphi}-\zeta|^2}u(Te^{i\varphi})d\varphi$$

— гармоническая мажоранта функции u в круге B и

$$G(\zeta,z)=\ln\left|\frac{\zeta\overline{z}-T^2}{(z-\zeta)T}\right|$$

— функция Грина круга B, μ — ассоциированная мера функции u. Если ζ лежит на окружности $C(w,R)$, где $R<\frac{|w|}{2}$, то $|\zeta|\le|w|+R\le 2|w|\le T/2$, поэтому $|Te^{i\varphi}-\zeta|^2\ge T^2/4$ и $T^2-|\zeta|^2\le T^2$. Следовательно,

$$\frac{T^2-|\zeta|^2}{|Te^{i\varphi}-\zeta|^2}\le 4$$

и для $\zeta\in C(w,R)$ имеем

$$H(\zeta)\ge\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T^2-|\zeta|^2}{|Te^{i\varphi}-\zeta|^2}(u-u^+)(Te^{i\varphi})d\varphi\ge\frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u-u^+)(Te^{i\varphi})d\varphi$$

Поскольку u^+ удовлетворяет неравенству вида (14), то

$$H(\zeta)\ge\frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Te^{i\varphi})d\varphi-4^{\rho+1}\delta|w|^\rho,$$

и так как усреднение субгармонической функции по окружности не убывает при возрастании радиуса окружности, то для некоторой положительной постоянной C'

$$H(\zeta)\ge\frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\varphi})d\varphi-4^{\rho+1}\delta|w|^\rho\ge -C'|w|^\rho,\quad |w|\ge 1.$$

Таким образом, на основе представления (16) имеем

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}u(\zeta)ds(\zeta)\ge -\mathrm{Const.}\ |w|^\rho s(C(w,R)\bigcap A)-$$

$$-\int_{C(w,R)\bigcap A}\int_B G(\zeta,z)d\mu(z)ds(\zeta). \tag{17}$$

Нам остается требуемым образом оценить сверху интеграл

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}\int_B G(\zeta,z)d\mu(z)ds(\zeta)=\int_B\left(\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)\right)d\mu(z). \tag{18}$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену переменных $\zeta = w\zeta_1$ и введем обозначения $z = wz_1,\ R = |w|R_1,\ A = wA_1,\ T = |w|T_1$, через $G_1(\zeta_1, z_1)$ обозначим функцию Грина круга $B_1 = B(0, T_1)$. Имеем

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)=|w|\int_{C(1,R_1)\bigcap A_1}G_1(\zeta_1,z_1)ds(\zeta_1). \tag{19}$$

Поскольку $T_1 = 4$, то

$$G(\zeta_1,z_1)=\ln\left|\frac{\zeta_1\overline{z_1}-T_1^2}{(z_1-\zeta_1)T_1}\right|\le\ln\frac{2T_1}{|z_1-\zeta_1|}=\ln\frac{8}{|z_1-\zeta_1|}. \tag{20}$$

Нам нужно оценить интеграл от правой части (20) при произвольном фиксированном z_1 и в оценке должна присутствовать только длина пересечения $C(1,R_1)\bigcap A_1$, поэтому z_1 можем считать вещественным. Если $z_1 \in \mathbb{R}$ и $\zeta_1 \in C(1, R_1)$, то есть $\zeta_1 = 1 + R_1e^{i\varphi}$, то

$$|z_1-\zeta_1|\ge\min(|(1-R_1)-\zeta_1|,|(1+R_1)-\zeta_1|)=R_1\min|1\pm e^{i\varphi}|.$$

Поэтому

$$\ln\frac{8}{|z_1-\zeta_1|}\le\max\ln\frac{8}{R_1|1\pm e^{i\varphi}|}\le\ln\frac{8}{R_1|1-e^{i\varphi}|}+\ln\frac{8}{R_1|1+e^{i\varphi}|}=2\ln\frac{4}{R_1|\sin\varphi|}.$$

Из этого неравенства вместе с (19) и (20) получим

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)\le 2R\int_a\ln\frac{4|w|}{R|\sin\varphi|}d\varphi,$$

где $a = \{\varphi \in [-\pi;\pi] : 1 + R_1e^{i\varphi} \in A_1\}$. Запишем это неравенство в виде

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)\le 2s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{|w|}{R}+$$

$$+2R\int_a\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi. \tag{21}$$

Если положить $a' = a\bigcap[-\pi/2;\pi/2]$, $a'' = (a\setminus a') + \pi$, то

$$\int_a\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi=\int_{a'}\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi+\int_{a''}\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi.$$

Воспользуемся простым неравенством $|\sin\varphi| \ge \frac{2}{\pi}|\varphi|$, когда $|\varphi| \le \frac{\pi}{2}$:

$$\int_a\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi\le\int_{a'}\ln\frac{2\pi}{|\varphi|}d\varphi+\int_{a''}\ln\frac{2\pi}{|\varphi|}d\varphi$$

Для оценки интегралов в правой части применим следующее утверждение (см. [5], стр. 56)

Лемма. Пусть $\varphi(x)$ — действительная интегрируемая на интервале $(-a, a)$, четная невозрастающая на $(0, a)$ функция (допускается $\varphi(0) = +\infty$). Пусть $E \subset (-a, a)$ — измеримое подмножество, $\mathrm{mes}\, E = 2b$. Тогда

$$\int_E\varphi(x)dx\le\int_{-b}^{b}\varphi(x)dx.$$

Пусть d' — длина множества a'. По лемме имеем

$$\int_{a'}\ln\frac{2\pi}{|\varphi|}d\varphi\le 2\int_0^{d'}\ln\frac{2\pi}{\varphi}d\varphi=2d'\ln\frac{2\pi e}{d'}.$$

Функция $x\ln\frac{2\pi e}{x}$ возрастающая на интервале $(0;2\pi]$. Если через d обозначим длину всего множества a, то $d'\le d\le 2\pi$. Поэтому

$$\int_{a'}\ln\frac{2\pi}{|\varphi|}d\varphi\le 2d\ln\frac{2\pi e}{d}.$$

Аналогичным образом оценивается интеграл по множеству a'', и в результате получим

$$\int_{a}\ln\frac{4}{|\sin\varphi|}d\varphi\le 4d\ln\frac{2\pi e}{d}.$$

Подставим эту оценку в соотношение (21). Учитывая, что

$$d=\frac{s(C(1,R_1)\bigcap A_1)}{R_1}=\frac{s(C(w,R)\bigcap A)}{|w|R_1}=\frac{s(C(w,R)\bigcap A)}{R},$$

получим

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}G(\zeta,z)ds(\zeta)\le 8s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}.$$

Полученную оценку применим в соотношении (18):

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}\int_B G(\zeta,z)d\mu(z)ds(\zeta)\le 8\int_B s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}d\mu(z)=$$

$$=8s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}\mu(B).$$

Из условия (14) следует оценка на считающую функцию $\mu(0,t)$ (см. [6])

$$\mu(0,t)\le\delta' t^\rho,\quad t>1,$$

следовательно,

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}\int_B G(\zeta,z)d\mu(z)ds(\zeta)\le 8\delta' 4^\rho|w|^\rho s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}.$$

Отсюда и из соотношения (17) получим

$$\int_{C(w,R)\bigcap A}u(\zeta)ds(\zeta)\ge -\mathrm{Const.}\ |w|^\rho s(C(w,R)\bigcap A)\ln\frac{2\pi|w|e}{s(C(w,R)\bigcap A)}.$$

Вместе с оценкой (15) и равенством $|u|=2u^+-u$ получаем утверждение леммы 2.
Лемма 2 доказана.

Следствие леммы 2.
Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста, то есть для некоторых δ,ρ

$$u(z)\le\delta|z|^\rho,\quad |z|>1.$$

Тогда существует постоянная C такая, что для всех $w\in\mathbb{C}$, $|w|>1$, и $R\in\left(0,\frac{|w|}{2}\right)$ выполняются оценки

$$\int_0^{2\pi}|u(w+Re^{i\varphi})|d\varphi\le C|w|^\rho\ln\frac{|w|e}{R},\tag{22}$$

$$\int_{B(w,r)}|u(w+\zeta)|dm(\zeta)\le C|w|^\rho r^2\ln\frac{|w|e}{r},\tag{23}$$

Для того чтобы убедиться в оценке (22), достатоточно в лемме 2 в качестве множества A взять всю плоскость. Оценка (23) следует из оценки (22).
Приступим к доказательству теоремы 1.

Будем считать, что функции u_1, u_2 имеют нормальный тип при порядке ρ, то есть $u_j(z) \leq \delta |z|^\rho$, $|z| \geq 1$. Как известно, ассоциированные меры при этом удовлетворяют условию $\mu_j(0,t) \leq \delta_1 t^\rho$, $t \geq 1$.

Зафиксируем произвольное отрицательное $\gamma \in \mathbb{R}$ и любое положительное $\varepsilon > 0$. Пусть A_j, $j = 1, 2,$ — множество тех z, для которых не выполняется условие

$$\mu_j(z,t) \leq |z|^{\rho-\gamma+\varepsilon} t, \quad t \in (0; \frac{|z|}{2}). \tag{24}$$

По лемме 1 каждое из этих множеств принадлежит классу C_γ, значит, $A_1 \bigcup A_2 \in C_\gamma$.

Далее будем рассматривать $z \notin A_1 \bigcup A_2$ — точки в которых выполняются соотношения (24). Возьмем произвольное $R \in (0; \frac{|z|}{2})$.

1. Пусть $R < k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}$. В силу условия (24) имеем

$$\left| \int_0^R \frac{\mu_1(z,t) - \mu_2(z,t)}{t} dt \right| \leq 2|z|^{\rho-\gamma+\varepsilon} R \leq 2k(|z|). \tag{25}$$

2. Пусть $R \geq k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}$. Возьмем произвольное число $\gamma_1 < 2\gamma - 4\rho - 2\varepsilon - 1$. По предположению теоремы 1 существует множество A класса $C_{\gamma_1} \subseteq C_\gamma$, вне которого выполняется соотношение

$$|u_1(z) - u_2(z)| \leq \text{Const. } k(|z|), \quad z \notin A.$$

Отсюда для любого $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, с учетом свойства К2, имеем

$$\frac{1}{2\pi R} \left| \int_{C(z,R) \setminus A} (u_1(\zeta) - u_2(\zeta)) ds(\zeta) \right| \leq \text{Const. } k(|z|). \tag{26}$$

Применяя лемму 2 к множеству A и к каждой из функций u_1, u_2 для $R \in (0, \frac{|z|}{2})$, получим оценку

$$\frac{1}{2\pi R} \left| \int_{C(z,R) \bigcap A} (u_1(\zeta) - u_2(\zeta)) ds(\zeta) \right| \leq$$
$$\leq \text{Const. } \frac{|z|^\rho s(z,R)}{2\pi R} \ln \frac{2\pi |z| e}{s(z,R)}, \tag{27}$$

здесь для краткости через $s(z,R)$ обозначена длина пересечения $C(z,R) \bigcap A$. Пусть $B(z_j, r_j)$, $j = 1, 2, ...,$ — круги, покрывающие множество A, о существовании которых говорится в определении класса C_{γ_1}, то есть, в частности,

$$\sum_{R/2 < |z_j| < R} r_j \leq \text{Const. } R^{\gamma_1 + 1}, \quad R > 1.$$

Так как γ_1 — отрицательное число, то для досаточно больших j $r_j \leq \frac{|z_j|}{4}$. Если некоторый круг $B(z_j, r_j)$ пересекается с окружностью $C(z,R)$, то $|z - z_j| \leq R + r_j$. Значит,

$$|z_j| \geq |z| - R - r_j \geq \frac{|z|}{2} - \frac{|z_j|}{4}.$$

Отсюда $|z_j| > \frac{|z|}{2}$. С другой стороны, для таких j имеем

$$|z_j| \leq |z| + R + r_j \leq \frac{3}{2}|z| + \frac{|z_j|}{4},$$

значит, $|z_j| \leq 2|z|$.

Длина пересечения круга $B(z_j, r_j)$ с окружностью $C(z,R)$ не превосходит πr_j. Если сумму радиусов кругов $B(z_j, r_j)$, пересекающихся с окружностью $C(z,R)$, обозначить через $\Sigma(z,R)$, то

$$s(z,R) \leq \Sigma(z,R) \leq \pi \sum_{\frac{|z|}{2} \leq |z_j| \leq 2|z|} r_j \leq \text{Const. } |z|^{\gamma_1 + 1}. \tag{28}$$

В частности, в силу отрицательности γ_1+1 можно считать, что для достаточно больших $|z|$ длина $s(z,R)$ не превосходит 1. Учитывая, что в этом пункте мы предполагаем $R \geq k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}$, соотношение (27) можем записать в виде (напомним, что $k(t)\geq 1$)

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)\bigcap A}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq$$

$$\leq \text{Const. } |z|^{2\rho-\gamma+\varepsilon}(s(z,R)\ln(2\pi|z|e)-s(z,R)\ln s(z,R)).$$

Считая, что $s(z,R)\leq 1$, получим

$$-\sqrt{s(z,R)}\ln s(z,R) \leq \max_{0<x\leq 1}(-\sqrt{x}\ln x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}},$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)\bigcap A}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq \text{Const. } |z|^{2\rho-\gamma+\varepsilon}\sqrt{s(z,R)}\ln(2\pi|z|e).$$

Отсюда и из (28) вытекает соотношение

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)\bigcap A}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq \text{Const. } |z|^{\frac{\gamma_1+1}{2}+2\rho-\gamma+\varepsilon}\ln(2\pi|z|e).$$

По выбору числа γ_1 имеем

$$\frac{\gamma_1+1}{2}+2\rho-\gamma+\varepsilon=\frac{\gamma_1+4\rho-2\gamma+2\varepsilon}{2}<0,$$

следовательно, для $z\notin A$ и $R\geq k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)\bigcap A}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq \text{Const. } \leq \text{Const. } k(|z|).$$

Это соотношение вместе с (26) влечет соотношение, верное для всех $z \notin A$ и $R\in(k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon};\frac{|z|}{2})$

$$\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{C(z,R)}(u_1(\zeta)-u_2(\zeta))ds(\zeta)\right| \leq \text{Const. } k(|z|)$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(u_1-u_2)(z+Re^{i\varphi})d\varphi\right| \leq \text{Const. } k(|z|).$$

По формуле Привалова (см. [5], стр.65)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_1-u_2)(z+Re^{i\varphi})d\varphi=(u_1(z)-u_2(z))+\int_0^R\frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt.$$

Отсюда и из последней оценки следует, что если z не принадлежит множеству A и $R\in(k(|z|)|z|^{\gamma-\rho-\varepsilon};\frac{|z|}{2})$, то

$$\left|\int_0^R\frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt\right| \leq \text{Const. } k(|z|).$$

Вместе с (25) получаем, что это соотношение верно для всех $z\notin A_1\bigcup A_2\bigcup A$ и $R\in(0;\frac{|z|}{2})$. Так как множества A_1, A_2, A лежат в классе C_γ, то теорема 1 доказана.

3. Доказательство второй части основной теоремы

Теорема 2. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости, имеющие конечный порядок роста, μ_1, μ_2 — ассоциированные по Риссу меры этих функций, и функция $k(t)$ удовлетворяет условиям K1, K2. Тогда если для любого γ существует некоторое исключительное множество $A_\gamma \in C_\gamma$ такое, что выполняется оценка*

$$\left|\int_0^R \frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt\right| \leq k(|z|), \quad z \notin A_\gamma,\ R \in \left(0, \frac{|z|}{2}\right), \tag{29}$$

то найдется гармоническая на всей плоскости функция $H(z)$ так, что для любого γ существуют некоторое исключительное множество $A'_\gamma \in C_\gamma$ и постоянная M'_γ такие, что выполняется соотношение

$$|u_1(z)-u_2(z)+H(z)| \leq M'_\gamma 4^{q+2}(q+2)\left(\int_1^{|z|}\left(\int_1^t \frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t} + \frac{1}{q+1}\int_1^{|z|}\frac{k(\tau)d\tau}{\tau} + \right.$$

$$\left. + \chi(q)|z|^q \int_1^{|z|}\frac{k(t)dt}{t^{q+1}} + \frac{1}{q+1}|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty \frac{k(t)dt}{t^{q+2}} + k(1)\ln|z|\right), \tag{30}$$

где $\chi(0)=0$ и $\chi(q)=\frac{1}{q}$ при $q>0$.

Предварительно докажем, что утверждение (30) теоремы 2 следует из более жесткого предположения:

для всех $z \in \mathbb{C}$ и всех $R \in (0; \frac{|z|}{2})$ выполняется оценка

$$\left|\int_0^R \frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t)}{t}dt\right| \leq k(|z|). \tag{29$'$}$$

Пусть $\alpha(x)$ — неотрицательная четная бесконечно дифференцируемая функция на вещественной оси, равная нулю вне интервала $(-1;1)$ и

$$2\pi\int_0^{+\infty}\alpha(x)x\,dx = 1.$$

Положим $\alpha(z)=\alpha(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $\alpha(z)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{C}$ и

$$\int_{\mathbb{C}}\alpha(z)dm(z) = 1,$$

здесь $m(z)$ обозначает плоскую меру Лебега.

Лемма 3. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Через u обозначим разность u_1-u_2 и для произвольного $\delta>0$, положим*

$$\widetilde{u}_\delta(z) = \int u(z+\delta\zeta)\alpha(\zeta)dm(\zeta).$$

Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 2\delta$, имеют место оценки

$$|\widetilde{u}_\delta(z)-u(z)| \leq k(|z|), \tag{31}$$

$$|\Delta\widetilde{u}_\delta(z)| \leq \alpha_0 k(|z|)\delta^{-2}, \tag{32}$$

где $\alpha_0 = \max|\alpha''(x)x+\alpha'(x)|$ и $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y^2}$ — оператор Лапласа.

Доказательство.

В интеграле в определении функции $\widetilde{u}$ перейдем к полярным координатам

$$\widetilde{u}_\delta(z) = 2\pi \int_0^{+\infty} \alpha(r) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \delta r e^{i\varphi}) d\varphi \right) r dr$$

и применим формулу Привалова (см. [5], стр. 65) во внутреннем интеграле. Учитывая свойства функции α, получим

$$\widetilde{u}_\delta(z) = u(z) + 2\pi \int_0^1 r\alpha(r) \left(\int_0^{\delta r} \frac{\mu_1(z,t) - \mu_2(z,t)}{t} dt \right) dr.$$

Если $|z| \geq 2\delta$, то при $r < 1$ $\delta r < \delta \leq \frac{|z|}{2}$, значит из условия $29'$, с учетом свойств функции α, получим соотношение (31).

Дифференцируя под знаком интеграла (в обобщенном смысле), получим

$$\Delta\widetilde{u}_\delta(z) = \int \Delta u(z + \delta\zeta)\alpha(\zeta) dm(\zeta).$$

После замены переменных $w = z + \delta\zeta$ имеем

$$\Delta\widetilde{u}_\delta(z) = \delta^{-2} \int \Delta u(w) \alpha\left(\frac{w-z}{\delta}\right) dm(w) = 2\pi\delta^{-2} \int \alpha\left(\frac{w-z}{\delta}\right) d\mu(w),$$

полагая теперь $w = z + te^{i\varphi}$, получим

$$\Delta\widetilde{u}_\delta(z) = 2\pi\delta^{-2} \int_0^{+\infty} \alpha\left(\frac{t}{\delta}\right) d\mu(z,t).$$

Дважды применим интегрирование по частям

$$\Delta\widetilde{u}_\delta(z) = -2\pi\delta^{-2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\delta}\alpha'\left(\frac{t}{\delta}\right) \mu(z,t) dt =$$

$$= 2\pi\delta^{-2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\delta^2}\alpha''\left(\frac{t}{\delta}\right) + \frac{1}{\delta}\alpha'\left(\frac{t}{\delta}\right) \right) \left(\int_0^t \frac{\mu(z,\tau)}{\tau} d\tau \right) dt.$$

По свойствам функции α можно считать, что $t < \delta \leq \frac{|z|}{2}$, поэтому

$$|\Delta\widetilde{u}_\delta(z)| = \left| 2\pi\delta^{-2} \int_0^{+\infty} (x\alpha''(x) + \alpha'(x)) \left(\int_0^{x\delta} \frac{\mu(z,\tau)}{\tau} d\tau \right) dt \right| \leq$$

$$\leq 2\pi\alpha_0 k(|z|)\delta^{-2}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Через и обозначим разность $u_1 - u_2$ и пусть функция $\widetilde{u}_\delta(z)$ определена как в лемме 3. Через $G_{z,\delta}(w,\zeta)$ обозначим функцию Грина круга $B(z,\delta)$, то есть*

$$G_{z,\delta}(w,\zeta) = \ln \left| \frac{\delta^2 - (w-z)(\overline{\zeta} - \overline{z})}{\delta(w-z)} \right|.$$

Тогда если $|z| \geq 2\delta$, то для всех $\zeta \in B(z,\delta)$ имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta) |\Delta\widetilde{u}_\delta(w) dm(w) \right| \leq \frac{\pi K \alpha_0}{2} k(|z|).$$

Доказательство.

Если $w, \zeta \in B(z,\delta)$, то $|\zeta| \le |z| + \delta \le 2|z|$. По соотношению (32) леммы 3, с учетом свойства K2, имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)|\Delta\widetilde{u}_\delta(w)dm(w)\right| \le$$
$$\le K\alpha_0 k(|z|)\delta^{-2}\left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)|dm(w)\right|. \tag{33}$$

Ассоциированная мера функции $q(\zeta) = |\zeta - z|^2$ равна $\frac{4}{2\pi}dm(\zeta)$, а гармоническая мажоранта этой функции в круге $B(z,\delta)$ равна тождественно δ^2. По формуле Грина

$$q(\zeta) = \delta^2 - \frac{2}{\pi}\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)dm(w),$$

следовательно,

$$max_{\zeta\in B(z,\delta)}\frac{2}{\pi}\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)dm(w) = max_{\zeta\in B(z,\delta)}(\delta^2 - |\zeta - z|^2) = \delta^2.$$

Подставим эту оценку в соотношение (33) и получим утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Через μ обозначим разность $\mu_1 - \mu_2$, а через $G_{z,\delta}(w,\zeta)$ обозначим функцию Грина круга $B(z,\delta)$. Если $|z| \ge 2\delta$, то для всех $\zeta \in B(z,\delta)$ имеет место оценка*

$$\left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)|d\mu(w)\right| \le (2 + \pi\alpha_0)Kk(|z|).$$

Доказательство.

Пусть функция $\widetilde{u}_\delta(\zeta)$ определена как в лемме 3 и

$$H_{z,\delta}(\zeta) = \widetilde{u}_\delta(\zeta) + \int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)\frac{\Delta\widetilde{u}_\delta(w)}{2\pi}dm(w)$$

Тогда функция $H_{z,\delta}(\zeta)$ гармонична в круге $B(z,\delta)$ и равна $\widetilde{u}_\delta$ на границе этого круга. Поскольку

$$|u(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| \le |u(\zeta) - \widetilde{u}_\delta(\zeta)| +$$
$$+ |\widetilde{u}_\delta(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| = |u(\zeta) - \widetilde{u}_\delta(\zeta)| + \left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)\frac{\Delta\widetilde{u}_\delta(w)}{2\pi}dm(w)\right|,$$

то по леммам 3 и 4, с учетом свойства K2, получаем

$$|u(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| \le k(|\zeta|) + \frac{K\pi\alpha_0}{2}k(|z|) \le (1 + \frac{\pi\alpha_0}{2})Kk(|z|), \quad \zeta \in B(z,\delta).$$

Если через $H(\zeta)$ обозначим гармоническое продолжение функции u с окружности на круг $B(z,\delta)$, то из последнего неравенства получим, что на границе круга выполняется оценка

$$|H(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| \le (1 + \frac{\pi\alpha_0}{2})Kk(|z|), \quad \zeta \in C(z,\delta),$$

которая по принципу максимума для гармонических функций продолжается на весь круг. По формуле Грина для функции u в круге $B(z,\delta)$ имеем

$$\left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)|d\mu(w)\right| = |u(\zeta) - H(\zeta)| \le |u(\zeta) - H_{z,\delta}(\zeta)| + |H_{z,\delta}(\zeta) - H(\zeta)| \le$$
$$\le (2 + \pi\alpha_0)Kk(|z|), \quad \zeta \in B(z,\delta).$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Через μ обозначим разность $\mu_1 - \mu_2$. Если $\varphi(\zeta) \in C_0^\infty(B(z,\delta))$, где $\delta < \frac{|z|}{2}$, то*

$$\left|\int \varphi(\zeta)d\mu(\zeta)\right| \le \frac{(2+\pi\alpha_0)K}{2\pi}k(|z|)\int |\Delta\varphi(\zeta)|dm(\zeta).$$

Доказательство.

По формуле Грина имеем

$$\varphi(\zeta) = \int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)\frac{\Delta\varphi(w)}{2\pi}dm(w).$$

Следовательно,

$$\left|\int_{B(z,\delta)} \varphi(\zeta)d\mu(\zeta)\right| = \left|\int_{B(z,\delta)}\left(\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)\frac{\Delta\varphi(w)}{2\pi}dm(w)\right)d\mu(\zeta)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{B(z,\delta)}\left|\int_{B(z,\delta)} G_{z,\delta}(w,\zeta)d\mu(\zeta)\right||\Delta\varphi(w)|dm(w).$$

Отсюда и из леммы 5 получаем утверждение леммы 6.

Лемма 7. *Пусть u_1, u_2 — субгармонические функции на плоскости и их ассоциированные меры μ_1, μ_2 удовлетворяют условию $29'$. Положим $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $u = u_1 - u_2$ и*

$$\widetilde{u}(\zeta) = \int u(\zeta + \frac{1}{2}\zeta z)\alpha(z)dm(z), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Тогда имеют место оценки

$$|\widetilde{u}(\zeta) - u(\zeta)| \le k(|\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

$$|\Delta\widetilde{u}(\zeta)| \le Mk(|\zeta|)|\zeta|^{-2}, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

где $M = 4K\alpha_1(2+\pi\alpha_0)$ и α_1 — некоторая постоянная, определяемая функцией $\alpha(x)$.

Доказательство.

В интеграле, определяющем функцию $\widetilde{u}$, перейдем к полярным координатам, полагая $z = re^{i\varphi}$ и $\zeta = te^{i\theta}$:

$$\widetilde{u}(\zeta) = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} u(\zeta + \frac{1}{2}tre^{\varphi+\theta})\alpha(r)rd\varphi dr = 2\pi\int_0^\infty\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta + \frac{1}{2}tre^{\varphi+\theta})d\varphi\right)\alpha(r)rdr =$$

.

$$= 2\pi\int_0^\infty\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta + \frac{1}{2}tre^{\psi})d\psi\right)\alpha(r)rdr.$$

Во внутреннем интеграле воспользуемся формулой Привалова

$$\widetilde{u}(\zeta) = 2\pi\int_0^\infty\left(u(\zeta) + \int_0^{\frac{1}{2}tr}\frac{\mu(\zeta,\tau)}{\tau}d\tau\right)\alpha(r)rdr.$$

По свойствам функции α получим

$$|\widetilde{u}(\zeta) - u(\zeta)| = 2\pi\int_0^\infty\left|\int_0^{\frac{1}{2}tr}\frac{\mu(\zeta,\tau)}{\tau}d\tau\right|\alpha(r)rdr.$$

По условию $29'$ получаем первое утверждение леммы 7.

Непосредственно дифференцируя (в обобщенном смысле) под знаком интеграла, получим

$$\Delta\widetilde{u}(\zeta) = \int(\Delta u)\left(\zeta(1+\frac{z}{2})\right)\left|1+\frac{z}{2}\right|^2\alpha(z)dm(z).$$

Произведем замену переменных $w = \zeta(1+\frac{z}{2})$:

$$\Delta\widetilde{u}(\zeta) = 2\pi \int \left|\frac{w}{\zeta}\right|^2 \alpha\left(2(\frac{w}{\zeta}-1)\right)\frac{\Delta u}{2\pi}(w)\frac{4}{|\zeta|^2}dm(w) = \frac{8\pi}{|\zeta|^2}\int \beta(\frac{w}{\zeta})d\mu(w),$$

где

$$\beta(z) = |z|^2\alpha(2(z-1)).$$

По свойствам функции α функция $\beta(z)$ принадлежит $C_0^\infty(B(1,\frac{1}{2}))$, следовательно, $\beta(\frac{w}{\zeta}) \in C_0^\infty(B(\zeta,\frac{|\zeta|}{2}))$ и к последнему интегралу можно применить лемму 6. Получим

$$|\Delta\widetilde{u}(\zeta)| \le 4K(2+\pi\alpha_0)k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}\int |\Delta_w\beta(\frac{w}{\zeta})|dm(w) =$$

$$= 4K(2+\pi\alpha_0)k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}\int |(\Delta\beta)(\frac{w}{\zeta})||\zeta|^{-2}dm(w) =$$

$$= 4K(2+\pi\alpha_0)k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}\int |(\Delta\beta)(z)|dm(z) = 4K\alpha_1(2+\pi\alpha_0)k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть функция $k(t)$ удовлетворяет условиям K1, K2 и, кроме того,*

$$\overline{\lim}_{t\longrightarrow\infty}\frac{\ln k(t)}{\ln t} = \sigma$$

(см. свойство K2'). Положим $q = [\sigma]$ и пусть

$$G_q(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^q}{q}}$$

— первичный множитель (см. [1], стр.16), а непрерывная функция $a(w)$ удовлетворяет оценке

$$|a(w)| \le Ak(|z|)(|z|^2+1)^{-1}, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{34}$$

Тогда функция

$$u(z) = \int_{|w|<1}\ln|z-w|a(w)dm(w) + \int_{|w|\ge 1}\ln G_q(\frac{z}{w})a(w)dm(w),$$

при $|z|\ge 2$ удовлетворяет оценке

$$|u(z)| \le 2\pi A'4^{q+2}(q+2)\left(k_{00}(|z|) + \frac{k_0(|z|)}{q+1} + \chi(q)k_q(|z|) + \frac{\overline{k}_q(|z|)}{q+1}\right) +$$
$$+A\pi k(1)\ln|z|$$

Доказательство.

Положим $a^+ = \max(a,0)$ и $a^- = \max(-a,0)$, тогда $a^\pm \ge 0$ и $a = a^+ - a^-$. Очевидно, каждая из функций $a^\pm(w)$ удовлетворяет оценке (34). Следовательно, нам достаточно доказать лемму в предположении, что функция $a(z)$ неотрицательна. В этом случае функция $u(z)$ субгармонична на всей плоскости. Если $|z|\ge 2$ и $|w|\le 1$, то $|z-w|\ge 1$ и $\ln|z-w|\ge 0$, поэтому

$$0 \le \int_{B(0,1)}\ln|z-w|a(w)dm(w) \le A\pi k(1)\frac{1}{\pi}\int_{B(0,1)}\ln|z-w|dm(w) = A\pi k(1)\ln|z|. \tag{35}$$

Нам остается оценить функцию

$$u_0(z) = \int_{|w|\ge 1}\ln G_q(\frac{z}{w})a(w)dm(w).$$

Воспользуемся леммой 4.4. из [3] (стр. 163), которую сформулируем применительно к рассматриваемому нами случаю и используя применяемые здесь обозначения.

Теорема B. *Предположим, что* μ — *неотрицательная борелевская мера в* $\mathbb{C}$, *и пусть* $\mu(t)$ — *мера круга* $B(0,t)$, $\mu(0)=0$ *и функция*

$$N(r)=\int_0^r \frac{\mu(t)}{t}dt$$

принадлежит классу сходимости порядка не выше $q+1$, *то есть*

$$\int^\infty \frac{N(r)dr}{r^{q+2}}<\infty.$$

Тогда интеграл

$$v(z)=\int_{|w|\ge 1}\ln G_q(\frac{z}{w})d\mu(w)$$

сходится абсолютно в окрестности ∞ *и равномерно для* $|z|\le R$ *при любом фиксированном положительном* R. *Кроме того, если* $|z|\ge 1$, *то*

$$v(z)\le 4^{q+2}(q+2)\left(q|z|^q\int_1^{|z|}\frac{N(r)dr}{r^{q+1}}+(q+1)|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty \frac{N(r)dr}{r^{q+2}}\right).$$

Если через $\mu(z)$ обозначим сужение меры $a(z)dm(z)$ на внешность круга $B(0,1)$, то $\mu(t)=0$ при $t\le 1$, а при $t\ge 1$

$$\mu(t)=\int_{|z|<t}a(z)dm(z)=2\pi A\int_1^t\frac{k(r)}{r}dr\le k(t)\ln t, \tag{36}$$

в частности,

$$\mu(t)\le k(t)\ln^+ t,\quad t\ge 0. \tag{37}$$

Отсюда

$$N(r)\le\int_1^r\frac{k(t)\ln^+ t}{t}dt\le k(r)(\ln^+ r)^2,\quad r\ge 0.$$

По определению числа σ для любого положительного ε имеем

$$k(r)\le \text{Const. } r^{\sigma+\varepsilon},\ r\ge 1.$$

Значит, можно взять достаточно малое $\varepsilon>0$ так, что при больших r будет выполняться

$$N(r)\le\begin{cases}\text{Const. } r^{\sigma+\varepsilon}(\ln^+ r)^2\le \text{Const. } r^{q+1-\varepsilon}, & \text{если } \sigma \text{ нецелое},\\ \text{Const. } r^{q+\varepsilon}(\ln^+ r)^2\le \text{Const. } r^{q+1-\varepsilon}, & \text{если } \sigma \text{ целое}.\end{cases} \tag{38}$$

Тем самым, функция $N(r)$ принадлежит классу сходимости порядка $q+1$ и, кроме того, $N(r)=o(r^{q+1})$. Следовательно, условия теоремы B выполнены, и для $|z|\ge 1$ выполняется соотношение

$$u_0(z)\le 4^{q+2}(q+2)\left(q|z|^q\int_1^{|z|}\frac{N(r)dr}{r^{q+1}}+(q+1)|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty \frac{N(r)dr}{r^{q+2}}\right). \tag{39}$$

Оценим первое слагаемое в правой части соотношения (39) при $q>0$. Интегрируя по частям, учитывая, что $N(1)=0$, получим

$$\int_1^r\frac{N(t)dt}{t^{q+1}}=-\frac{N(r)}{qr^q}+\frac{1}{q}\int_1^r dN(t)t^{q+1}\le\frac{1}{q}\int_1^r\frac{\mu(t)dt}{t^{q+1}}.$$

Отсюда и из оценки (36) имеем

$$\int_1^r\frac{N(t)dt}{t^{q+1}}\le\frac{2\pi A}{q}\int_1^r\left(\int_1^t\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t^{q+1}}=\frac{2\pi A}{q}\int_1^r\left(\int_1^t\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)d\left(-\frac{1}{qt^q}\right)\le$$

$$\le\frac{2\pi A}{q^2}\int_1^r\frac{k(t)dt}{t^{q+1}}.$$

Таким образом, при $|z|\geq 1$ и $q>0$ выполняется оценка

$$q|z|^q\int_1^{|z|}\frac{N(t)dt}{t^{q+1}}\leq\frac{2\pi A}{q}|z|^q\int_1^{|z|}\frac{k(t)dt}{t^{q+1}}. \tag{40}$$

Оценим второе слагаемое в соотношении (39). Интегрируя по частям и учитывая оценку (36), получим

$$\int_r^\infty\frac{N(t)dt}{t^{q+2}}=\frac{N(r)}{(q+1)r^{q+1}}+\frac{1}{q+1}\int_r^\infty\frac{\mu(t)dt}{t^{q+2}}\leq\frac{N(r)}{(q+1)r^{q+1}}+$$
$$+\frac{2\pi A}{q+1}\int_r^\infty\left(\int_1^t\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)d\left(-\frac{1}{(q+1)t^{q+1}}\right)=\frac{N(r)}{(q+1)r^{q+1}}+$$
$$+\frac{2\pi A}{(q+1)^2r^{q+1}}\int_1^r\frac{k(t)dt}{t}+\frac{2\pi A}{(q+1)^2}\int_r^\infty\frac{k(t)dt}{t^{q+2}}.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$(q+1)|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty\frac{N(t)dt}{t^{q+2}}\leq 2\pi A\int_1^{|z|}\left(\int_1^t\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t}+$$
$$+\frac{2\pi A}{q+1}\int_1^{|z|}\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}+\frac{2\pi A}{q+1}|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty\frac{k(t)dt}{t^{q+2}}.$$

Отсюда и из соотношений (35), (40) получаем, что при $|z|\geq 2$ выполняется оценка сверху

$$u(z)\leq 4^{q+2}(q+2)\left(2\pi A\int_1^{|z|}\left(\int_1^t\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t}+\frac{2\pi A}{q+1}\int_1^{|z|}\frac{k(\tau)d\tau}{\tau}+\right.$$
$$\left.+2\pi A\chi(q)|z|^q\int_1^{|z|}\frac{k(t)dt}{t^{q+1}}+\frac{2\pi A}{q+1}|z|^{q+1}\int_{|z|}^\infty\frac{k(t)dt}{t^{q+2}}\right)+\pi Ak(1)\ln|z|, \tag{41}$$

где $\chi(0)=0$ и $\chi(q)=1/q$ при $q>0$. В обозначениях утверждения 4 это неравенство запишется в виде

$$u(z)\leq 4^{q+2}(q+2)\left(2\pi Ak_{00}(|z|)+\frac{2\pi A}{q+1}k_0(|z|)+2\pi A\chi(q)k_q(|z|)+\frac{2\pi A}{q+1}\overline{k}_q(|z|)\right)+$$
$$+\pi Ak(1)\ln|z|. \tag{42}$$

Докажем нижние оценки для $u_0(z)$. Введем обозначение

$$\widetilde{k}(t)=4^{q+2}(q+2)\left(2\pi Ak_{00}(|z|)+\frac{2\pi A}{q+1}k_0(|z|)+\frac{2\pi A\chi(q)}{q}k_q(|z|)+\frac{2\pi A}{q+1}\overline{k}_q(|z|)\right).$$

Тогда по утверждению 4 функция $\widetilde{k}(t)$ при $t\geq e^2$ обладает свойствами K1, K2 и

$$u_0(z)\leq\widetilde{k}(t),\quad t\geq 2. \tag{43}$$

Возьмем произвольное $z\in\mathbb{C}$, положим $T=2|z|$ и воспользуемся представлением Грина функции u в круге $B=B(0,T)$:

$$u_0(z)=H(z)-\int_B G(z,w)d\mu(w), \tag{44}$$

где

$$H(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T^2-|\zeta|^2}{|Te^{i\varphi}-\zeta|^2}u_0(Te^{i\varphi})d\varphi$$

— гармоническая мажоранта функции u_0 в круге B и

$$G(\zeta,w)=\ln\left|\frac{\zeta\overline{w}-T^2}{(w-\zeta)T}\right|$$

— функция Грина круга B. По определению T $|Te^{i\varphi}-z|^2 \geq T^2/4$ и $T^2-|\zeta|^2 \leq T^2$. Следовательно,

$$\frac{T^2-|z|^2}{|Te^{i\varphi}-z|^2} \leq 4,$$

значит,

$$H(z) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{T^2-|z|^2}{|Te^{i\varphi}-z|^2}(u_0-u_0^+)(Te^{i\varphi})d\varphi \geq \frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_0-u_0^+)(Te^{i\varphi})d\varphi.$$

Поскольку u_0^+ удовлетворяет неравенству

$$u_0^+(w) \leq \widetilde{k}(w),$$

то для некоторой константы $\widetilde{K}$ выполняется оценка

$$H(z) \geq \frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(Te^{i\varphi})d\varphi - 4\widetilde{k}(2|z|) \geq -4\widetilde{K}\widetilde{k}(|z|),\ t \geq e^2.$$

Таким образом, на основе представления (44) имеем

$$u_0(z) \geq -\widetilde{K}\widetilde{k}(|z|) - \int_B G(z,w)d\mu(w). \tag{45}$$

Нам остается требуемым образом оценить сверху потенциал Грина

$$\int_B G(z,w)d\mu(w) = \int_{B\setminus B(0,1)} G(z,w)a(w)dm(w)$$

В силу условия на функцию $a(w)$ и неотрицательности функции Грина получим

$$\int_B G(z,w)d\mu(w) \leq A\int_{B\setminus B(0,1)} G(z,w)k(|w|)|w|^{-2}dm(w).$$

В определении функции $k_{00}(t)$ функцию $k(t)$ будем полагать равной 0 в отрезке $[0;1]$. Тогда $k_{00}(|\zeta|)$ становится дважды дифференцируемой функцией, равной нулю в круге $B(0,1)$, причем

$$\Delta k_{00}(|\zeta|) = k(|\zeta|)|\zeta|^{-2}.$$

Через $h(\zeta)$ обозначим гармоническую мажоранту функции $k_{00}(|\zeta|)$ в круге B, то есть $h(\zeta) \equiv k_{00}(2|z|)$. По формуле Грина имеем

$$\int_{B\setminus B(0,1)} G(z,w)k_{00}(|w|)|w|^{-2}dm(w) = 2\pi(h(z)-k_{00}(|z|)) \leq k_{00}(2|z|).$$

Отсюда по утверждению 4 получаем

$$\int_{B\setminus B(0,1)} G(z,w)k_{00}(|w|)|w|^{-2}dm(w) \leq (K+2)k_{00}(|z|),\ |z| \geq e^2.$$

Отсюда и из соотношений (45), (42) следует утверждение леммы 8.

Лемма 8 доказана.

Докажем, что из условия (29′) следует утверждение теоремы 2.

Пусть

$$v(z) = \int_{|w|<1} \ln|z-w|\frac{\Delta\widetilde{u}(w)}{2\pi}dm(w) + \int_{|w|\geq 1} \ln G_q(\frac{z}{w})\frac{\Delta\widetilde{u}(w)}{2\pi}dm(w).$$

По леммам 7 и 8 имеет место оценка

$$|v(z)| \leq 2\pi A'4^{q+2}(q+2)\left(k_{00}(|z|) + \frac{k_0(|z|)}{q+1} + \chi(q)k_q(|z|) + \frac{\overline{k}_q(|z|)}{q+1}\right) +$$
$$+A\pi k(1)\ln|z|, \quad |z|>1.$$

Функция

$$H(z) = v(z) - \widetilde{u}(z)$$

гармонична на всей плоскости. Снова по утверждениям лемм 7 и 8 имеем

$$|u_1(z) - u_2(z) + H(z)| \le |u(z) - \widetilde{u}(z)| + |v(z)| \le$$

$$\le 2\pi A' 4^{q+2}(q+2)\left(k_{00}(|z|) + \frac{k_0(|z|)}{q+1} + \chi(q)k_q(|z|) + \frac{\overline{k}_q(|z|)}{q+1}\right) +$$

$$+A\pi k(1)\ln|z|, \quad |z| > 1.$$

Таким образом, мы доказали, что если выполнено условие (29′), то имеет место соотношение (30).

Пусть теперь выполняется только условие (29).

Лемма 9. *Пусть ассоциированные меры μ_1, μ_2 субгармонических функций u_1, u_2 удовлетворяют условию (29) и функции $\widetilde{u}_j,\ j = 1, 2$ определены как в лемме 7, то есть*

$$\widetilde{u}_j(\zeta) = \int u_j(\zeta + \frac{1}{2}\zeta z)\alpha(z)dm(z), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Тогда вне множеств степенной малости выполняется соотношение

$$|\widetilde{u}(z) - u(z)| = O(k(|z|)),$$

где $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$, $u = u_1 - u_2$. Кроме того, если функции u_j имеют конечный тип при порядке ρ, то

$$|\mathrm{grad}\widetilde{u}(z)| \le M(\alpha)|z|^{\rho-1},\ |z| \ge 1.$$

Доказательство леммы 9. Первое утверждение леммы доказывается так же, как и соответствующее утверждение в лемме 7. Оценим градиент. Заменой переменных

$$z = 2\left(\frac{w}{\zeta} - 1\right)$$

получим представление

$$\widetilde{u}(\zeta) = \int u(w)\alpha\left(2\left(\frac{w}{\zeta} - 1\right)\right)\frac{4}{|\zeta|^2}dm(w).$$

Непосредственными вычислениями получим

$$\left|\mathrm{grad}\left(\alpha\left(2\left(\frac{w}{\zeta} - 1\right)\right)\frac{4}{|\zeta|^2}\right)\right| \le M(\alpha)|\zeta|^{-3}, \quad |z| > 1,$$

где постоянная $M(\alpha)$ зависит только от функции α. Следовательно,

$$|\ \mathrm{grad}\widetilde{u}_j(\zeta)| \le M(\alpha)|\zeta|^{-3}\int_{B(\zeta, \frac{|\zeta|}{2})}|u_j(w)|dm(w), \quad j = 1, 2,\ |z| > 1.$$

Интеграл от модуля функции u_j оценим по соотношению (23) вследствие леммы 2. Если $|\widetilde{u}_j(z)| \le \delta|z|^\rho$ при $|z| > 1$, то

$$|\ \mathrm{grad}\widetilde{u}_j(\zeta)| \le M(\alpha)C|\zeta|^{\rho-1}, \quad j = 1, 2,\ |z| > 2.$$

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Ассоциированные меры $\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2$ субгармонических функций $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2$ удовлетворяют условию* (29′)

Доказательство леммы 10.

Поскольку по лемме 9 для любого γ вне некоторого множества $A_\gamma \in C_\gamma$ выполняется оценка

$$|(\widetilde{u}_1(z)+u_2(z))-(u_1(z)+\widetilde{u}_2(z)|=|(\widetilde{u}_1(z)-\widetilde{u}_2(z))-(u_1(z)-u_2(z))|=$$
$$=|\widetilde{u}(z)-u(z)|\leq M_\gamma k(z),$$

то по доказанной теореме 1 получим, что вне некоторого множества A'_γ для всех $R\in(0;|z|/2)$ выполняется оценка

$$\left|\int_0^R \frac{(\widetilde{\mu}_1(z,t)+\mu_2(z,t))-(\mu_1(z,t)+\widetilde{\mu}_2(z,t))}{t}dt\right|\leq M'_\gamma k(z).$$

то есть

$$\left|\int_0^R \frac{\widetilde{\mu}_1(z,t)-\widetilde{\mu}_2(z,t))}{t}dt-\int_0^R \frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t))}{t}dt\right|\leq M'_\gamma k(z).$$

По условию (29) на меры μ_1,μ_2 вне некоторых множеств A_γ имеем

$$\left|\int_0^R \frac{\widetilde{\mu}_1(z,t)-\widetilde{\mu}_2(z,t))}{t}dt\right|\leq\left|\int_0^R \frac{\mu_1(z,t)-\mu_2(z,t))}{t}dt\right|+$$
$$+M'_\gamma k(z)\leq M_\gamma k(z),\ R\in(0;\frac{|z|}{2}). \qquad (46).$$

Из оценки градиента в лемме 9 для z',z таких, что $|z'|,|z|>1$ и $|z'-z|\leq 2|z|$, имеем

$$|\widetilde{u}_j(z')-\widetilde{u}_j(z)|\leq\max_{w\in B(z,|z|/4}|\operatorname{grad}\widetilde{u}_j(w)||z-z'|\leq \text{Const.}\ |z|^{\rho-1}|z-z'|. \qquad (47)$$

Возьмем произвольное число $\gamma<-\rho$ и пусть $A_\gamma\in C_\gamma$ — множество, вне которого выполняется соотношение (46). По утверждению 2 для всех достаточно больших z найдется точка z' на расстоянии не более чем $|z|^{\gamma+1}$ от точки z, не попадающая в множество A_γ. По соотношению (47) имеем

$$|\widetilde{u}(z)-\widetilde{u}(z')|\leq \text{Const.}\ ,$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\widetilde{u}(z+Re^{i\varphi})-\widetilde{u}(z'+Re^{i\varphi})|d\varphi\leq \text{Const.}\ .$$

Применим к мерте $\widetilde{\mu}=\widetilde{\mu}_1-\widetilde{\mu}_2$ формулу Привалова в точках z,z' соответственно и получим для всех $R\in(0;|z|/2)$

$$\left|\int_0^R \frac{\widetilde{\mu}(z,t)}{t}dt\right|\leq\left|\int_0^R \frac{\widetilde{\mu}(z',t)}{t}dt\right|+\text{Const.}\ .$$

Поскольку точка $z'\notin A_\gamma$, то выполняется соотношение (46), следовательно,

$$\left|\int_0^R \frac{\widetilde{\mu}(z,t)}{t}dt\right|\leq M_\gamma k(|z|)+\text{Const.}\ .$$

Таким образом, для всех $R\in(0;|z|/2)$

$$\left|\int_0^R \frac{\widetilde{\mu}(z,t)}{t}dt\right|\leq M'_\gamma k(|z|),\ z\in\mathbb{C},$$

и лемма 10 доказана.

По доказанному найдется гармоническая функция $H(z)$ такая, что вне множества степенной малости

$$|\widetilde{u}(z)+H(z)|=O(k(|z|)),$$

а по лемме 9 это же верно и для функции u.

Теорема 2 доказана.

В заключении автор выражает глубокую признательность профессору Юлмухаметову Р.С. за большую помощь и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *Распеределение корней целых функций.* Гос. изд.-во тех.-теор. лит. М: 1956. 632с.
2. Юлмухаметов Р.С. Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica, 1985. Т. 11. С.257–282.
3. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. Изд.-во "Мир". М.: 1980. 304 с.
4. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966, 516 с.
5. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций.* М.: Наука, 1970, 591 с.
6. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* М.:Наука, 1971.
7. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика разности субгармонических функций* // Математические заметки, 1987. Т. 41, № 3. С. 348–355.
8. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси* // ДАН, 2009. Т. 429, № 2, С. 155–158.
9. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси* // Уфимский мат. журнал, 2010, Т. 2, № 1, С. 97–109.

Алла Александровна Румянцева,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `AllaRum@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 106-110.

УДК 517.9

О СИММЕТРИЯХ ИЗОБАРИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

А.А. ТАЛЫШЕВ

Аннотация. В работе обсуждается вопрос о целесообразности вычисления группы симметрий Ли для неинволютивных систем дифференциальных уравнений. Например, группа для системы уравнений изобарических движений газа расширяется после приведения ее к инволютивному виду.

Ключевые слова: симметрии Ли, инволютивные системы.

1. Введение

Алгоритм вычисления допускаемой группы Ли точечных преобразований, описанный, например, в [1, §5], вообще говоря, сам по себе применим к любой системе дифференциальных уравнений. Даже, если множество решений этой системы пусто.

В работе [2, п. 2.6] предлагается применять групповой анализ к системам, обладающим свойством локальной разрешимости, которое означает, что через каждую точку многообразия, определяемого уравнениями системы, проходит, по крайней мере, одно решение системы.

Вообще-то понятие локальной разрешимости не очень конструктивно. Классическое свойство инволютивности [3], [4] гарантирует, что продолжение инволютивной системы всегда инволютивно, и что любая система конечным числом продолжений приводится к инволютивной или алгебраически противоречивой системе. Хотя инволютивность гарантирует существование решений только для R-аналитических систем. Имеются примеры инволютивных и гладких, но неаналитических систем, не имеющих гладких решений (например, система Леви).

В работе [5] показано, что для инволютивных систем в классе касательных (на решениях системы) преобразований группа продолженной системы является продолжением группы исходной системы. Откуда следует аналогичное утверждение и для групп точечных преобразований.

В работе [6] представлена 20-параметрическая группа, допускаемая уравнениями изобарических движений газа:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z &= 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0. \tag{2}$$

В настоящей работе посредством продолжения система (1), (2) приводится к двум инволютивным системам. Устанавливается, что эти системы допускают бесконечномерные группы, и 20-параметрическая группа из [6] является подгруппой этих групп. Расширение группы при приведении системы к инволютивному виду — это счастливая случайность или закономерность?

A.A. Talyshev, About symmetries of isobaric motions gaz.

Поступила 13 апреля 2010 г.

Группа линейной системы (9), предложенной в [2] в качестве системы, не обладающей свойством локальной разрешимости, также расширяется после приведения системы к инволютивному виду.

Существуют неинволютивные системы, например, уравнения Навье-Стокса, продолжение которых не сопровождается получением новых уравнений, не превышающих порядка системы[1], т.е., например, уравнения третьего порядка, полученные дифференцированием уравнений Навье-Стокса по всем независимым переменным, не будут иметь следствий меньшего порядка. Просто произвол в построении интегральных элементов у исходной системы и нескольких первых продолжений не удовлетворяет некоторому алгебраическому соотношению. Группа точечных симметрий таких систем не может расшириться при приведении их к инволютивному виду.

2. Приведение системы (1), (2) к инволютивному виду

Действие оператора дивергенции на уравнения (1) с учетом (2) приводит к уравнению

$$2(u_y v_x + v_z w_y + u_z w_x) + u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 = 0. \tag{3}$$

Дифференцирование уравнения (3) по переменной t с последующим исключением вторых производных, полученных из продолжений уравнений (1) и (2), приводит еще к одному уравнению первого порядка

$$\begin{aligned} &3(u_x u_y v_x + u_x u_z w_x + u_y v_x v_y + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y + \\ &+ u_z w_x w_z + v_y v_z w_y + v_z w_y w_z) + u_x^3 + v_y^3 + w_z^3 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Если

$$d = u_x w_x w_y - u_y w_x^2 + v_x w_y^2 - v_y w_x w_y \neq 0,$$

то из уравнений (2), (3), (4) следует, что

$$\begin{aligned} u_z &= (-u_x^3 w_y + u_x^2 u_y w_x - 2u_x u_y v_x w_y + u_x u_y v_y w_x + \\ &+ u_y^2 v_x w_x - u_y v_x v_y w_y + u_y v_y^2 w_x)/d, \\ v_z &= (-u_x^2 v_x w_y + u_x u_y v_x w_x - u_x v_x v_y w_y - u_y v_x^2 w_y + \\ &+ 2u_y v_x v_y w_x - v_x v_y^2 w_y + v_y^3 w_x)/d, \\ w_z &= -u_x - v_y. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае система (1)–(4) может быть записана в виде

$$U_z = F(U, U_x, U_y), \quad U_t = G(U, U_x, U_y), \quad U = (u, v, w),$$

причем перекрестное дифференцирование по t и z не даст новых уравнений. Собственно, уравнения (3), (4) и строились из этих соображений, но можно убедиться в этом и непосредственным вычислением.

Итак, множество решений системы (1)–(4), на которых уравнения (2), (3), (4) разрешимы относительно производных функций u, v, w по одной из переменных x, y или z, удовлетворяют инволютивной системе с характерами Картана [4, §61]: $s_0 = 3$, $s_1 = 3$, $s_2 = 3$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$.

Следующие уравнения выражают условие того, что система (2), (3), (4) неразрешима относительно производных функций u, v, w ни по одной из переменных x, y или z.

$$\begin{aligned} u_y^2 v_z - u_y u_z v_y + u_y u_z w_z - u_z^2 w_y &= 0, \\ u_x v_x v_z - u_z v_x^2 - v_x v_z w_z + v_z^2 w_x &= 0, \\ u_x w_x w_y - u_y w_x^2 + v_x w_y^2 - v_y w_x w_y &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

[1]В систему уравнений Навье-Стокса наряду с уравнением $\operatorname{div} u = 0$ изначально должны быть включены его первые производные по всем независимым переменным.

Если $w_x \neq 0$, то из уравнений (2)–(5) следует, что

$$\begin{aligned} u_y &= u_x w_y / w_x, \\ v_y &= v_x w_y / w_x, \\ u_z &= -(u_x^2 w_x + u_x v_x w_y)/w_x^2, \\ v_z &= -(u_x v_x w_x + v_x^2 w_y)/w_x^2, \\ w_z &= -(u_x w_x + v_x w_y)/w_x. \end{aligned} \tag{6}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что при данном условии система (1)–(5) инволютивна с характерами Картана: $s_0 = 3$, $s_1 = 3$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$.

Система (2)–(5) инвариантна относительно согласованных перестановок переменных x, y, z и u, v, w. Последовательное применение следующих перестановок

$$\begin{aligned} z \leftrightarrow y, \quad w \leftrightarrow v \quad &\Rightarrow \quad w_x \leftrightarrow v_x, \\ x \leftrightarrow z, \quad u \leftrightarrow w \quad &\Rightarrow \quad v_x \leftrightarrow v_z, \\ y \leftrightarrow x, \quad v \leftrightarrow u \quad &\Rightarrow \quad v_z \leftrightarrow u_z, \\ z \leftrightarrow y, \quad w \leftrightarrow v \quad &\Rightarrow \quad u_z \leftrightarrow u_y, \\ x \leftrightarrow z, \quad u \leftrightarrow w \quad &\Rightarrow \quad u_y \leftrightarrow w_y, \end{aligned}$$

к соотношениям (6) показывает, что те решения, на которых система (1)–(5) не будет иметь указанный набор характеров Картана, должны удовлетворять уравнениям $u_y = u_z = v_x = v_z = w_x = w_y = 0$. Откуда с учетом (3) следует, что $u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 = 0$, т.е. эти решения постоянны.

Итак, продолжение уравнений (1), (2) (изобарических движений газа) приводит к двум нетривиальным инволютивным системам уравнений: (1)–(4) и (1)–(5). В следующем разделе будут представлены алгебры Ли, допускаемые этими системами.

3. Допускаемая группа

В данном разделе переменные x, y, z и u, v, w будут обозначаться через x^1, x^2, x^3 и u^1, u^2, u^3 соответственно. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Инфинитезимальные операторы допускаемой группы ищутся в виде

$$\xi^0 \partial_t + \xi^j \partial_{x^j} + \eta^j \partial_{u^j},$$

с коэффициентами, зависящими от переменных $t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3$.

Система (1)–(4) допускает группу со следующей алгеброй

$$\xi^i = u^i(\xi^0 + \varphi^0) + \varphi^i, \quad \eta^i = D(\varphi^i + u^i \varphi^0), \quad i = 1, 2, 3, \tag{7}$$

где $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ — произвольные линейные функции переменных t, x^1, x^2, x^3, т.е.

$$\varphi^j = c_{j0} t + c_{j1} x^1 + c_{j2} x^2 + c_{j3} x^3 + c_{j4}, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

ξ^0 — произвольная функция переменных $t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3$ и

$$D = \partial_t + u^j \partial_{x^j}.$$

Система (1)–(5) допускает группу со следующей алгеброй

$$\xi^i = u^i \xi^0 + t(\eta^i - u^j \eta^i_{u^j} - u^i \psi^0) + x^j \eta^i_{u^j} + x^i \psi^0 + \psi^i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

где η^1, η^2, η^3, ψ^0, ψ^1, ψ^2, ψ^3 — произвольные функции переменных u^1, u^2, u^3, а ξ^0 произвольная функция переменных $t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3$.

Алгебры (7) и (8), в отличие от алгебры из [6], не обладают свойством x-автономии [7].

Первая колонка таблицы содержит операторы 20-параметрической группы из [6]. Вторая и третья колонки содержат значения параметров операторов (7) и (8), при которых они совпадают с операторами первой колонки. Тем самым таблица демонстрирует, что алгебры, допускаемые продолженными инволютивными системами, шире алгебры, допускаемой исходной неинволютивной системой.

Таблица

Система (1), (2)	Система (1) – (4)			Система (1) – (5)			
	ξ^0	φ^0	φ^k	ξ^0	ψ^0	ψ^k	η^k
$x^i\partial_{x^j} + u^i\partial_{u^j}$	0	0	$x^i\delta_j^k$	0	0	0	$u^i\delta_j^k$
$t\partial_{x^i} + \partial_{u^i}$	0	0	$t\delta_i^k$	0	0	0	$t\delta_j^k$
$x^i\partial_t - u^iu^j\partial_{u^j}$	x^i	$-x^i$	0	x^i	u^i	0	$-u^iu^k$
$t\partial_t + x^j\partial_{x^j}$	t	$-t$	x^k	t	1	x^k	0
∂_t	1	-1	0	1	0	$-u^k$	0
∂_{x^i}	0	0	δ_i^k	0	0	δ_i^k	0

Здесь индексы $i, j, k = 1, 2, 3$, по повторяющемуся индексу j производится суммирование и δ_i^k — символ Кронекера.

4. Пример линейной неинволютивной системы

В настоящем пункте рассматривается неинволютивная система [2, (2.118)], допускаемая алгебра которой также расширяется после приведения системы к инволютивному виду.

$$u_{xx} + v_{xy} + v_x = 0, \quad u_{xy} + v_{yy} - u_x = 0. \tag{9}$$

Вычитание второго из уравнений (9), продифференцированного по x из первого уравнения, продифференцированного по y, дает $v_{xy} + u_{xx} = 0$. Вычитание этого соотношения из первого уравнения приводит к $v_x = 0$ и тем самым из первого уравнения следует $u_{xx} = 0$. Итак, в результате продолжения системы (9) получена следующая инволютивная система.

$$u_{xy} + v_{yy} - u_x = 0, \quad u_{xx} = 0, \quad v_x = 0, \quad v_{xx} = 0, \quad v_{xy} = 0. \tag{10}$$

Характеры Картана системы (10) равны: $s_0 = 5$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$.

Далее для систем (9) и (10) вычисляются допускаемые операторы вида

$$\xi^1\partial_x + \xi^2\partial_y + \eta^1\partial_u + \eta^2\partial_v,$$

где коэффициенты ξ^1, ξ^2, η^1 и η^2 зависят от переменных x, y, u, v.

Для системы (9) коэффициенты допускаемых операторов записываются в виде

$$\begin{aligned} &\xi^1 = c_2x + \varphi^2, \quad \xi^2 = c_1, \\ &\eta^1 = \varphi^1_{yy}x + c_3u + \varphi^3 + \varphi^2_yv, \quad \eta^2 = \varphi^1 - \varphi^1_y + (c_3 - c_2)v, \end{aligned} \tag{11}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные константы, а φ^1, φ^2, φ^3 — произвольные функции переменной y.

Для системы (10) коэффициенты допускаемых операторов записываются в виде

$$\begin{aligned} &\xi^1 = \psi^1x + \psi^2, \quad \xi^2 = c_4, \\ &\eta^1 = \varphi^1_{yy}x + (\psi^1 + c_5)u + \psi^3, \quad \eta^2 = \varphi^1 - \varphi^1_y + c_5v, \end{aligned} \tag{12}$$

где c_4, c_5 — произвольные константы, ψ^1, ψ^2, ψ^3 — произвольные функции переменных y и v, а φ^1 — произвольная функция переменной y.

Из выражений (11) и (12) следует, что алгебра, допускаемая системой (10), шире алгебры, допускаемой системой (9).

При проведении объемных вычислений использовалась система аналитических вычислений «Reduce 3.8» (http://reduce-algebra.sourceforge.net).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978.
2. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Пер. с англ. М.: Мир, 1989.
3. Картан Э. *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения.* М.: Изд. МГУ, 1962.
4. Рашевский П.К. *Геометрическая теория уравнений с частными производными.* М.: Гостехиздат, 1947.
5. Талышев А.А. *О касательных преобразованиях высокого порядка систем в частных производных* // В сб.: Динамика сплошной среды. 1982. Вып. 54. С. 142–152.
6. Овсянников Л.В. *Изобарические движения газа* // Дифференциальные уравнения. 1994. Том 30, №10. С. 1792–1799.
7. Овсянников Л.В. *О свойстве x-автономии* // Докл. РАН. 1993. Т. 330, №5. С. 559–561.

Александр Алексеевич Талышев,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: `tal@academ.org`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 111-117.

УДК 517.9

ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА БЕЗ РАСХОЖДЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Для дифференциально-инвариантной подмодели газовой динамики с нулевой дивергенцией рассмотрены решения с линейным полем скоростей. В лагранжевом описании получена подмодель из обыкновенных дифференциальных уравнений с одним конечным соотношением, переопределяющим систему. Для плоского случая найдены все решения.

Ключевые слова: газовая динамика, дифференциально-инвариантные решения, линейное поле скоростей.

Введение

Решения уравнений газовой динамики [1] с дивергенцией, равной нулю, удовлетворяют переопределенной системе уравнений, являющейся дифференциально-инвариантной подмоделью для любой допускаемой подгруппы:

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad \nabla\cdot\vec{u} = 0, \quad \rho_t + \vec{u}\cdot\nabla\rho = 0, \quad p_t + \vec{u}\cdot\nabla p = 0, \tag{0.1}$$

где $\vec{u}$, p, ρ — скорость, давление и плотность, ∇ — градиент. Система справедлива для любого уравнения состояния, из которого определяется энтропия. Система (0.1) не приведена в инволюцию даже в плоском случае. Мы рассмотрим подмодель с линейным полем скоростей в плоском случае $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$.

1. Эйлерово и лагранжево описание движения с линейным полем скоростей

Решение системы (0.1) разыскиваем в виде

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t). \tag{1.1}$$

Система (0.1) записана в эйлеровых переменных t, $\vec{x}$. При подстановке (1.1) система (0.1) принимает вид

$$\nabla p = -\rho\left(\left(A' + A^2\right)\vec{x} + \vec{u}_0' + A\vec{u}_0\right), \quad p_t + (A\vec{x} + \vec{u}_0)\cdot\nabla p = 0,$$

$$\mathrm{tr}A = 0, \quad \rho_t + (A\vec{u} + \vec{u}_0)\cdot\nabla\rho = 0.$$

Совместность уравнений для давления приводит к подмодели из обыкновенных дифференциальных уравнений (эйлерово описание)

$$\begin{gathered} A' + A^2 = B, \quad B' + A^T B + BA = 0, \quad \mathrm{tr}\,A = 0, \\ \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{a}, \quad \vec{a}' + A^T\vec{a} + B\vec{u}_0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

S.V. Khabirov, Plane gas motions with the linear field of the velocity without divergence.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00047-а) и Советом по грантам Президента РФ для государственной поддержки научных школ (№НШ-2826.2008.1).

Поступила 13 апреля 2010 г.

Остаются уравнения для плотности

$$\rho_t + (A\vec{x} + \vec{u}_0) \cdot \nabla\rho = 0, \quad \rho B + \nabla\rho \otimes (B\vec{x} + \vec{a}) = \rho B^T + (B\vec{x} + \vec{a}) \otimes \nabla\rho,$$

которые проще интегрировать в лагранжевых переменных.

Лагранжевы переменные t, $\vec{\xi}$ вводятся как решение задачи

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad \vec{x}|_{t=t_0} = \vec{\xi} \tag{1.3}$$

и задаются формулами

$$\vec{x} = \vec{x}_0(t) + M(t)\vec{\xi}, \quad M(t_0) = I, \quad \vec{x}_0(t) = 0. \tag{1.4}$$

Из (1.3), (1.4) следуют выражения для матриц A, B и векторов $\vec{u}_0$, $\vec{a}$ через матрицу M и вектор $\vec{x}_0$

$$A = M'M^{-1}, \quad B = M''M^{-1}, \quad \vec{u}_0 = \vec{x}_0' - M'M^{-1}\vec{x}_0, \quad \vec{a} = \vec{x}_0'' - M''M^{-1}\vec{x}_0.$$

Из (1.2) следуют уравнения (лагранжево описание)

$$M^TM'' = C, \quad M^T\vec{x}_0'' = \vec{c}, \quad \det M = |M| = 1, \tag{1.5}$$

где C, $\vec{c}$ — постоянные матрица и вектор. Здесь мы пользовались тождеством $|M|' = |M|\mathrm{tr}(M'M^{-1})$.

Начальные условия для системы (1.5) имеют вид

$$M(t_0) = I, \quad M'(t_0) = M_1 = S_1 + \Omega_1, \tag{1.6}$$

где $S_1 = S_1^T = ||s_{ij}^1||$, $\Omega_1 = -\Omega_1^T = E < \vec{\omega}_1 >= \left\| \begin{matrix} 0 & -\omega_1^3 & \omega_1^2 \\ \omega_1^3 & 0 & -\omega_1^1 \\ -\omega_1^2 & \omega_1 & 0 \end{matrix} \right\|$ при $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$. В плоском случае $\Omega_1 = \omega_1 \left\| \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| = \omega_1\Sigma$.

Заметим, что ранги матриц C и B совпадают, так как справедливо тождество $C = M^TBM$.

В лагранжевых переменных уравнения (0.1) принимают вид

$$p_t = 0, \quad \rho_t = 0, \quad \nabla_\xi p = -\rho(\vec{\xi})(C\vec{\xi} + \vec{c}). \tag{1.7}$$

Подставим матрицу C в виде суммы симметричного и антисимметричного слагаемых

$$C = S_0 + \Omega_0, \quad S_0 = S_0^T = ||s_{ij}^0||, \quad \Omega_0 = -\Omega_0^T = E < \vec{\omega}_0 > .$$

В плоском случае $\Omega_0 = \omega_0\Sigma$.

Условие совместности переопределенной системы (1.7) принимает вид

$$\nabla_\xi\rho \times \left(S_0\vec{\xi} + \vec{c} + \vec{\omega}_0 \times \vec{\xi}\right) = -2\rho\vec{\omega}_0.$$

Отсюда следуют равенства

$$\vec{\omega}_0 \cdot \nabla_\xi\rho = 0, \quad \nabla_\xi\rho \times (S_0\vec{\xi} + \vec{c}) + \vec{\omega}_0(\vec{\xi}\nabla_\xi\rho + 2\rho) = 0, \tag{1.8}$$

$$\nabla_\xi\rho\left(\vec{\omega}_0 \cdot (S_0\vec{\xi} + \vec{c})\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_0\vec{\omega}_0 = 0, \quad \vec{\omega}_0 \cdot \vec{c} = 0. \tag{1.9}$$

Если $\vec{\omega}_0 = 0$, то из (1.8) и (1.7) следуют выражения для плотности и давления

$$\rho = p'(J_0), \quad J_0 = \frac{1}{2}\vec{\xi} \cdot S_0\vec{\xi} + \vec{c} \cdot \vec{\xi}, \quad p = P_0 - p(J_0),$$

где P_0 — постоянная, $p(J_0)$ — произвольная возрастающая функция.

Случай $\vec{\omega}_0 \neq 0$ рассмотрим для плоского случая $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$. Трехмерный случай рассматривается аналогично в силу первого уравнения (1.8).

Пусть $\Delta = s^0_{11}s^0_{22} - s^0_{12} + \omega_0^2 \neq 0$, тогда после замены

$$\xi^1 = \eta^1 + \xi^1_0(t), \quad \xi^2 = \eta^2 + \xi^2_0(t),$$

где $\xi^1_0 = \Delta^{-1}\left(c^2(s^0_{12} - \omega_0) - c^1 s^0_{22}\right)$, $\xi^2_0 = \Delta^{-1}\left(c^1(s^0_{12} + \omega_0) - c^2 s^0_{11}\right)$, уравнение (1.8) становится инвариантным относительно растяжения

$$\rho_{\eta^1}\left((s^0_{12} + \omega_0)\eta^1 + s^0_{22}\eta^2\right) - \rho_{\eta^2}\left(s^0_{11}\eta^1 + (s^0_{12} - \omega_0)\eta^2\right) = -2\omega_0\rho.$$

С инвариантом в качестве независимой переменной $I = \eta^2(\eta^1)^{-1}$ уравнение интегрируется

$$\rho = R''(J)\exp\left(2\omega_0\int\frac{dI}{P(I)}\right), \quad p = P_0 - (R(J) - JR'(J))\,\mathrm{sign}P,$$

где $R''(J) > 0$, $R(J)$ — произвольная функция переменной

$$J = \alpha_1\sqrt{|P|}\exp\left(\omega_0\int\frac{dI}{P(I)}\right), \quad P(I) = s^0_{22}I^2 + 2s^0_{12}I + s^0_{11}.$$

Пусть $\Delta = 0$, тогда после замены $I = (s^0_{12} + \omega_0)\xi^1 + s^0_{22}\xi^2$ уравнение (1.8) допускает перенос по ξ^1:

$$\rho_{\xi^1}(I + c^2) - \rho_I s^0_{22}(\lambda I + c^1) = -2\omega_0\rho, \quad \lambda = (s^0_{12} - \omega_0)(s^0_{22})^{-1} = s^0_{11}(s^0_{12} + \omega_0)^{-1}.$$

Решение представим в виде

$$\rho = \frac{Jp'(J)}{2\omega_0 I + (\omega_0 + s^0_{12})c^2 - s^0_{22}c^1}, \quad p = P_0 - p(J),$$

$$J = \left|I + \frac{c^2(\omega_0 + s^0_{12}) - s^0_{22}c^1}{2\omega_0}\right|^k \exp\left(\frac{\xi^1(\omega_0 - s^0_{12}) - \xi^2 s^0_{22}}{2\omega_0}\right),$$

$$k = \frac{c^2(\omega_0 - s^0_{12}) + c^1 s^0_{22}}{2\omega_0},$$

где P_0 — постоянная, $p(J)$ — произвольная функция.

2. Решение с линейной матрицей

Матрица M линейна по t, если $C = 0$: $M = I + M_1 t$. В плоском случае из условия $|M| = 1$ следует $|M_1| = 0$, $\mathrm{tr}\, M_1 = 0$, т.е.матрица M_1 нильпонентна $M_1^2 = 0$, $M^{-1} = I - M_1 t$, $A = M'M^{-1} = M_1 - M_1^2 t$.

Уравнение (1.5) с условием (1.4) определяет вектор $\vec{x}_0$:

$$\vec{x}_0 = -\frac{1}{6}t^3 M_1^T\vec{c} + \frac{1}{2}t^2\vec{c}_1 \tag{2.1}$$

где $\vec{c}_1$ — постоянный вектор.

Формула (2.1) определяет лагранжево решение в виде многочлена третьей степени по времени.

Далее разыскиваем решения с матрицей $C \neq 0$.

3. Интегралы модели

Матричное уравнение (1.5) имеет интеграл ($t_0 = 0$):

$$M^T M' - M^{T\prime} M = 2t\Omega_0 + 2\Omega_1 = 2\omega\Sigma, \quad \Sigma = \left\|\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad \omega = \omega_0 t + \omega_1 \tag{3.1}$$

в плоском случае.

Замечание 1. *Уравнения* (1.5) *допускают перенос по* t. *Поэтому при* $\omega_0 \neq 0$ *можно считать* $\omega_1 = 0$.

Представим матрицу M в виде произведения ортогональной и симметричной матриц

$$M = O\Lambda, \quad O^T O = OO^T = I, \quad \Lambda^T = \Lambda, \quad |M| = |\Lambda| = 1, \tag{3.2}$$

где $\Lambda(t_0) = I = O(t_0)$.

Матрица $O_1 = O^T O' = -O_1^T$ антисимметрична и $O_1(t_0) = \Omega_1$, $\Lambda'(t_0) = S_1$. Интеграл (3.1) принимает вид $\Lambda\Lambda' - \Lambda'\Lambda + 2\Lambda O_1 \Lambda = 2\omega\Sigma$. Отсюда определяется O_1:

$$O_1 = \omega\Lambda^{-1}\Sigma\Lambda^{-1} + \frac{1}{2}(\Lambda^{-1}\Lambda' - \Lambda'\Lambda^{-1}). \tag{3.3}$$

Матричное уравнение (1.5) в силу (3.3) запишем для Λ^2: $|\Lambda^2| = 1$,

$$\Lambda^{2\prime\prime} - \frac{1}{2}\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}\Lambda^{2\prime} + \omega(\Sigma\Lambda^{-2}\Lambda^{2\prime} - \Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}\Sigma) + 2\omega^2\Sigma\Lambda^{-2}\Sigma = 2S_0 \tag{3.4}$$

с начальными условиями

$$\Lambda^2(t_0) = I, \quad \Lambda^{2\prime}(t_0) = 2S_1. \tag{3.5}$$

Дополнительные уравнения на симметричную матрицу Λ^2 получаются дифференцированием условия $|\Lambda^2| = 1$:

$$\mathrm{tr}\,(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}), \quad \mathrm{tr}\,(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})' = 0, \quad \mathrm{tr}\,(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})'' = 0, \ldots \tag{3.6}$$

Удобно использовать следующую запись уравнения (3.4)

$$\begin{gathered}(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})' = -\frac{1}{2}(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})^2 + \omega(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}\Sigma\Lambda^{-2} - \Sigma\Lambda^{-2}\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2}) + \\ +2\omega^2 I + 2S_0\Lambda^{-2}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Из уравнений (3.6) в силу (3.7) и равенства $(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})^2 = -|\Lambda^{2\prime}|I$ следуют интегралы

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\Lambda^{2\prime}\Lambda^{-2})^2 = 4\omega^2 + 2\mathrm{tr}\,(S_0\Lambda^{-2}) \quad \Rightarrow \quad |\Lambda^{2\prime}| + 4\omega^2 + 2S_0 : \Lambda^{-2} = 0, \\ \mathrm{tr}\,(S_0\Lambda^{-2\prime}) + \omega^{2\prime} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_0 : \Lambda^{-2} + \omega^2 = \mathrm{tr}\,S_0 + \omega_1^2.\end{gathered} \tag{3.8}$$

При $t = t_0$ из равенств (3.6), (3.8) получаем условия на постоянные параметры

$$\mathrm{tr}\,S_1 = 0, \quad |S_1| + \omega_1^2 + 2^{-1}\mathrm{tr}\,S_0 = 0 \tag{3.9}$$

в силу начальных условий.

4. Уравнения на собственные числа

Представим решение задачи (3.4), (3.5) с помощью диагональной матрицы $\mathcal{D} = \mathrm{diag}\,(d_1, d_2)$ из собственных чисел матрицы Λ^2 и ортогональной матрицы поворота $O = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$: $\Lambda^2 = O\mathcal{D}O^T$. Величины d_i задают сингулярные числа матрицы M [2]. Матрица $O_1 = O^T O' = -\varphi'\Sigma$ — антисимметрична. Из условия $|\Lambda^2| = 1$ следует $d_1 = d$, $d_2 = d^{-1}$. Интегралы (3.8) принимают вид: $d(t_0) = 1$,

$$\frac{d'^2}{d^2} + \varphi'^2(d - d^{-1})^2 = 2(\omega^2 + \omega_1^2 + \mathrm{tr}\,S_0), \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,S_0(d + d^{-1}) - (d - d^{-1})k\cos 2(\varphi + \varphi_0) + \omega^2 = \omega_1^2 + \mathrm{tr}\,S_0, \tag{4.2}$$

где $4k^2 = (s_{11}^0 - s_{22}^0)^2 + 4(s_{12}^0)^2 = (\mathrm{tr}\,S_0)^2 - 4|S_0|$, $\mathrm{tr}\,2\varphi_0 = 2s_{12}^0(s_{11}^0 - s_{22}^0)^{-1}$ (при $s_{11}^0 = s_{22}^0$, $k = s_{12}^0$, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$).

Матричное уравнение (3.4) перейдет в следующее

$$\mathcal{D}'' + (-2\varphi' d'(1+d^{-2}) + \varphi''(d^{-1}-d)) \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| - 2\varphi'^2(\mathcal{D} - \mathcal{D}^{-1}) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d'}{d}\right)^2 + \varphi'^2(d-d^{-1})^2\right)\mathcal{D} +$$

$$+2\omega\left(\frac{d'}{d}\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| + \varphi'(\mathcal{D}^2 - I)\right) - 2\omega^2\mathcal{D} =$$

$$= I \operatorname{tr} S_0 + (s_{11}^0 - s_{22}^0)\left\| \begin{matrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{matrix} \right\| + 2s_{12}^0 \left\| \begin{matrix} -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \end{matrix} \right\|.$$

Из матричного уравнения следует три скалярных равенства

$$\varphi''(d^{-1}-d) - 2\varphi'(d-d^{-1})' + 2\omega\frac{d'}{d} = 2k\sin 2(\varphi+\varphi_0); \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} d'' - 2\varphi'^2(d-d^{-1}) - \frac{1}{2}\left(\frac{d'^2}{d} + \varphi'^2(d^{-1}-d)^2 d\right) + 2\omega\varphi'(d^2-1) - \\ -2\omega^2 d = \operatorname{tr} S_0 + 2k\cos 2(\varphi+\varphi_0), \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered} d^{-1\prime\prime} - 2\varphi'^2(d^{-1}-d) - \frac{1}{2}\left((d^{-1\prime})^2 d + \varphi'^2(d^{-1}-d)^2 d^{-1}\right) + \\ +2\omega\varphi'(d^{-2}-1) - 2\omega^2 d^{-1} = \operatorname{tr} S_0 - 2k\cos 2(\varphi+\varphi_0). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) тождественно выполняется в силу (4.3), (4.2), (4.1). Если дифференцировать по t (4.1), то в силу (4.3), (4.4), (4.2) получим тождество. Значит, (4.1) есть интеграл (4.3), (4.4), (4.2), и уравнение (4.4) есть следствие интегралов (4.1), (4.2) и уравнения (4.3). Следовательно, переопределенная подмодель задается уравнениями (4.1), (4.2), (4.3).

Начальные данные для функций φ, d определяются из равенств

$$\Lambda^2(t_0) = O(t_0)\mathcal{D}(t_0)O^T(t_0) = I, \quad \Lambda^{2\prime}(t_0) = O(t_0)\mathcal{D}'(t_0)O^T(t_0) = 2S_1.$$

Если $O(t_0)$ задает поворот на угол φ_1, то начальные данные определяются элементами матрицы S_1:

$$\begin{gathered} d(t_0) = 1, \quad d'(t_0) = 2(-|S_1|)^{1/2}, \quad \varphi(t_0) = \varphi_1, \\ s_{11}^1 = -s_{22}^1, \quad \operatorname{tg} 2\varphi_1 = s_{12}^1(s_{22}^1)^{-1}. \end{gathered} \tag{4.6}$$

5. Простейшее решение задачи

Пусть $d = 1$, тогда из (4.1) следует $\omega_0 = 0$, $2\omega_1^2 + \operatorname{tr} S_0 = 0$. Из (3.9) получим $\operatorname{tr} S_1 = 0$, $|S_1| = 0$. Значит, $S_1 = 0$. Уравнение (4.2) тождественно выполняется, а из (4.3) следует $\varphi = -\varphi_0$.

Итак, получили простейшее решение

$$d = 1, \quad \varphi = -\varphi_0, \quad \operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2s_{12}^0}{s_{11}^0 - s_{22}^0} \quad (\text{при} \quad s_{11}^0 = s_{22}^0, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}) \tag{5.1}$$

при условии на параметры задачи $S_1 = 0$, $\omega_0 = 0$, $2\omega_1^2 + \operatorname{tr} S_0 = 0$. При этом матрица $M = e^{\omega_1 t \Sigma} = I\cos(\omega_1 t) + \Sigma\sin(\omega_1 t)$.

Пусть $\omega_0 = 0$, $\omega = \omega_1$, $d \neq 1$, тогда из (4.2) следует $d = \dfrac{\mathrm{tr}\, S_0 + 2k\cos 2(\varphi+\varphi_0)}{\mathrm{tr}\, S_0 - 2k\cos 2(\varphi+\varphi_0)}$ и $\mathrm{tr}\, S_0 \neq 0$. Если φ — постоянно, то из (4.1) и (4.6) следует $d = 1$. Значит, φ переменная величина ($\varphi' \neq 0$).

Уравнение (4.1) принимает вид

$$4k\,\mathrm{tr}\, S_0\varphi' = \sqrt{-|S_1|}\left((\mathrm{tr}S_0)^2 - 4k^2\cos^2 2(\varphi+\varphi_0)\right).$$

В силу этого уравнения (4.3) становится тождеством по $\cos^2 2(\varphi+\varphi_0)$:

$$16\sqrt{-|S_1|}k^3\cos^2 2(\varphi+\varphi_0)\mathrm{tr}\, S_0 + |S_1|\left((\mathrm{tr}\, S_0)^4 - 16k^4\cos^4 2(\varphi+\varphi_0)\right) +$$

$$+\left(k^2\mathrm{tr}S_0 - 2\omega_1\sqrt{-|S_1|}k\right)\left((\mathrm{tr}\, S_0)^2 - 4k^2\cos^2 2(\varphi+\varphi_0)\right) = 0.$$

Отсюда следует $|S_1| = 0$ и $\varphi' = 0$ противоречие. Итак, при $\omega_0 = 0$ возможно только простейшее решение.

6. Случай $\omega_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$

Замечание в пункте 3 позволяет считать $t_0 = 0$, $\omega_1 = 0$, если $\omega_0 \neq 0$. Уравнения (4.1), (4.2), (4.3) допускают подобие $\sqrt{\omega_0}t \to t$, $\omega_0^{-1}S_0 \to S_0$, а также перенос по φ. После таких преобразований можно считать $\omega_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$ ($s_{12}^0 = 0$), и уравнения принимают вид в силу формул (3.9):

$$-|S_1|(d + d^{-1} - 2) + t^2 = (d - d^{-1})k\cos 2\varphi, \tag{6.1}$$

$$\left(\frac{d'}{d}\right)^2 + \varphi'^2(d - d^{-1})^2 = 2(t^2 - 2|S_1|), \tag{6.2}$$

$$\varphi''(d - d^{-1}) + 2\varphi'(d - d^{-1})' - 2t\frac{d'}{d} + 2k\sin 2\varphi = 0, \tag{6.3}$$

где $k = \dfrac{1}{2}(s_{11}^0 - s_{22}^0)$, $|S_1| = -\dfrac{1}{2}(s_{11}^0 + s_{22}^0)$, $\mathrm{tr}\, S_1 = 0$.

В силу начальных данных (4.6) решение (6.1) $\div$ (6.3) представим рядами

$$d = 1 + 2t\sqrt{-|S_1|} + d_2t^2 + d_3t^3 + d_4t^4 + \cdots, \quad \varphi = \varphi_1 + t\varphi_2 + t^2\varphi_3 + t^3\varphi_4 + \cdots \tag{6.4}$$

Подставим ряды 6.4 в 6.1, 6.2, 6.3 и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях t.

Из (6.1) при степенях t, t^2, t^3 получим

$$k|S_1|\cos 2\varphi_1 = 0, \tag{6.5}$$

$$2k\left(d_2\cos 2\varphi_1 - 4(-|S_1|)^{1/2}\varphi_2\sin 2\varphi_1\right) = 1 + 4|S_1|^2, \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered} 2(d_2 + 2|S_1|)\left((-|S_1|)^{3/2} + k\varphi_2\sin 2\varphi_1\right) + \\ +4(-|S_1|)^{1/2}k\varphi_3\sin 2\varphi_1 = d_3k\cos 2\varphi_1. \end{gathered} \tag{6.7}$$

Из (6.2) при степенях t и t^2 получим

$$|S_1|(d_2 + 2|S_1|) = 0, \tag{6.8}$$

$$1 + 16|S_1|\varphi_2^2 = 6d_3(-|S_1|)^{1/2} + 4|S_1|^2 + 2(d_2 + 2|S_1|)^2. \tag{6.9}$$

Из (6.3) коэффициент при t и свободный член дают

$$(-|S_1|)^{1/2}\varphi_2 = -\frac{1}{4}k\sin 2\varphi_1, \tag{6.10}$$

$$6\varphi_3(-|S_1|)^{1/2} + 2\varphi_2(d_2 + 2|S_1|) + k\varphi_2\cos 2\varphi_1 = (-|S_1|)^{1/2}. \tag{6.11}$$

Из (6.6) следует $k \neq 0$.

Если $|S_1| \neq 0$, то из (6.5), (6.8) получим $\cos 2\varphi_1 = 0$, $\sin 2\varphi_1 = 1$, $d_2 = -2|S_1|$. Из (6.7) следует $\varphi_3 = 0$, а из (6.11) следует $\varphi_3 = \dfrac{1}{6}$. Противоречие. Значит, $|S_1| = 0$, а так как $\operatorname{tr} S_1 = 0$, то симметричная матрица $S_1 = 0$ и $\operatorname{tr} S_0 = 0$, т.е. матрица $S_0 = k \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|$. Из (6.6) $\div$ (6.11) следует $\varphi_1 = 0$,

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = k, \quad d_3 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при t^4 в уравнении (6.1), получим $d_4 = \dfrac{1}{4}$. Приравнивая нулю коэффициенты при t^2 и t^3 в уравнении (6.2), получим $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$. Коэффициент при t^2 в (6.3) приводит к противоречию.

Итак, кроме простейшего решения (5.1) и решения (2.1) с линейной матрицей $M = I + M_1 t$ других решений с линейным полем скоростей подмодель (0.1) не имеет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики.* Москва-Ижевск. 2003. 336 с.
2. Годунов С.К. *Современные аспекты линейной алгебры.* Новосибирск. Научная книга. 1997. 390 с.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики УНЦ РАН,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru

ABSTRACTS

V.A. Baikov, N.K. Bakirov, A.A. Yakovlev

Asymptotic behaviour of the variogramm in the zero

Abstract. It is known, that the second derivative of covariance function at distance zero plays the great role in topology and geometry of stationary random fields. Proceeding from the external information about stochastic function realization, a question of its account occurs in applied sciences, in particular, by specifying its power-mode behavior in zero. In the given work the model is offered providing the specified asymptotic behavior.

Keywords: geostochastic modelling, the spectral theory of stationary random fields, Euler characteristic, fractal. dimension

N.K. Bakirov, M.V. Snachev

The test: does the input flow intensity grow in queueing system?

Abstract. The mathematical model of queueing system with Poisson time moments of inputs is considered. Practically, it's actual (e.g. in the banking and insurance industry) to know the answer on the following question: Does the input flow intensity grow on a certain time interval? In this article the tests for this statistical hypothesis is proposed and their asymtotic properties is examed.

Keywords: queueing system, Poisson flow, input flow intensity, likelihood ratio test, least squares method, hypothesis of Poisson flow homogeneity.

R.A.Baladai, B.N. Khabibullin

Three equivalent conjectures on an estimate of integrals

Abstract. We offer a conjecture on sharp estimation of a definite improper integral depend on a parameter $\lambda \in (0, +\infty)$ by means of given estimate of other definite integral depend on parameters $t \in [0, +\infty)$ and λ. Such sharp estimate is proved for $\lambda \leqslant 1$. Besides, an estimate is obtained for $\lambda > 1$. The last estimate is not exact seemingly. We give also two conjectures that are equivalent to the original conjecture. Sources of our conjectures are extremal problems for entire, meromorphic, and plurisubharmonic functions of several variables.

Keywords: improper integral, estimate, inequality, entire function, meromorphic function, plurisubharmonic function, Paley problem.

A.M. Gaisin, Zh.G. Rakhmatullina

Behaviour of the minimum of the modulus of the Dirichlet series on the system of segments

Abstract. We consider the problem of asymptotic equivalence of the logarithms of the least upper bound of the modulus of the entire Dirichlet series' sum on vertical line and its minimum of the modulus. In general case we take the minimum of the modulus on some compact that in certain sense is closely approximated by vertical segment of fixed length.

The required relation takes place everywhere on the positive ray probably except the set of the finite measure under optimal restrictions on the sequence of indexes of the series established in this paper.

Keywords: Dirichlet series, minimum of the modulus.

V.I. Lutsenko, R.S. Yulmukhametov

On the accuracy of the asymptotic approximation of subharmonic functions of the logarithm of the modulus of an entire function

Abstract. We study the degree of possible accuracy of the asymptotic approximation of subharmonic functions of the logarithm of the modulus of an entire function. It is proved that if the subharmonic function u is twice differentiable and satisfies the condition

$$m \leq |z|\Delta u(z) \leq M, \ |z| > 0,$$

where $M, m > 0$, then approximation with accuracy $q \ln |z| + O(1)$ with constant $q \in (0, \frac{1}{4})$ possible only outside sets of non-C_0-set. On the other hand, it is shown that the approximation accuracy $q \ln |z| + O(1)$ with constant $q \geq \frac{1}{4}$ possible outside sets, allowing coverage circles $B(z_k, r_k)$ so that

$$\sum_{|z_k| \leq R} r_k = O(R^{\frac{3}{4} - q})$$

when $q \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ and

$$\sum_{|z_k| \geq R} r_k = O(R^{\frac{3}{4} - q})$$

when $q > \frac{3}{4}$. In particular, these sets are C_0-sets when $q > \frac{1}{4}$. In the second case, the approximating function is the same for all $q \geq \frac{1}{4}$, and this function is only a small modification of functions of sine type, built Yu. Lubarsky and M. Sodin.

Keywords: subharmonic functions, entire functions.

I.Kh. Musin, S.V. Popënov

On a weighted space of infinitely differentiable functions in $\mathbb{R}^n$

Abstract. It is studied the weighted space of infinitely differentiable functions in $\mathbb{R}^n$ constructed with the use of a family φ of weight convex functions in $\mathbb{R}^n$ which have fast growth dominating any linear function. It is proved that the closure of linear span of all polynomials is dense. It is obtained the description of strong dual space in terms of the Laplace transformation.

Keywords: approximation by polynomials, the Fourier-Laplace transform of functionals, entire functions, Paley-Wiener type theorem.

M.D. Ramazanov

New algorithm of asymptotically optimal lattice cubature formulas

Abstract. Lattice cubature formulas are used to approximate computation of integrals of smooth functions of several variables $\int\limits_{\Omega} f(x)dx$, by linear combinations $h^n \sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n,\\ hk\in\Omega}} c_k f(hk)$. Asymptotically optimal formula on W_2^m –space is defined by

$$\sup_{f\in W_2^m(\Omega)} \left| \int\limits_{\Omega} f(x)dx - h^n \sum_{hk\in\Omega} c_k^{as} f(hk) \right| /$$

$$\inf_{\{c_k\}} \sup_{f\in W_2^m(\Omega)} \left| \int\limits_{\Omega} f(x)dx - h^n \sum_{hk\in\Omega} c_k f(hk) \right| = 1.$$

Babenko proposed the concept of unsaturated computational algorithms [7] — preserving of optimal orders of convergence for all spaces of functions that are the parameters of the problem.

The paper describes a new algorithm for constructing the lattice cubeture formulas, unsaturated not only by order, but also by the property of asymptotic optimality on W_2^m –spaces, $m \in (n/2, \infty)$.

Keywords: cubature formulas, optimization, nonsaturated algorithm

A.A. Rumyantseva

Asyptotic of δ-subharmonic functions and their associated measures

Abstract. It is studied the question of the relationship aimptoticheskogo behavior difference of two subharmonic functions $u_1 - u_2$ in a neighborhood of infinity and the difference of their associated measures $\mu_1 - \mu_2$. The asymptotic behavior of the difference is considered outside the exceptional sets of "power"is smallness, namely, outside the set, which for any $gamma$ permit coverage by the circle $B(z_j, r_j)$, such that

$$\sum_{R/2\le|z_j|\le R} r_j = o(R^{\gamma+1}),\ R \longrightarrow \infty.$$

Asymptotics of the difference associated measures is characterized by the behavior of the function

$$\max_{R\le|z|/2} \left| \int_0^R \frac{\mu_1(z,t) - \mu_2(z,t)}{t} dt \right|$$

at infinity. Shown, for example, that this function behaves like$o(|z|^\sigma)$, if the difference $|u_1(z) - u_2(z)|$ outside an exceptional set of "power"smallness behaves like $o(|z|^\sigma)$. If $\sigma \notin \mathbb{N}$, then converse is also true.

Keywords: subharmonic functions, associated measure, Jensen formula, harmonic functions, Riesz representation.

A.A. Talyshev

About symmetries of isobaric motions gaz

Annotation. The paper examines the utility of calculating Lie symmetries for non-involutive systems of differential equations. For example, group symmetries for system equations of isobaric motions gas will widen after the system is brought into an involutive form.

Keywords: Lie symmetries, involutive systems.

S.V. Khabirov

Plane gas motions with the linear field of the velocity without divergence

Annotation. We consider solutions of the gasdynamic equations with the linear feild of the velocity without divergence as a differentialy invariant submodel. The submodel from odinery differential equations with one finite overdetermining correlation is obtained in Lagrange representation. All solutions of this submodel are found in the plane case.

Keywords: gas dynamics, differential-invariant solution,linear field of velocity.

CONTENTS

ДЛЯ АВТОРОВ

«Уфимский математический журнал» публикует оригинальные научные исследования преимущественно по теории функций, комплексному анализу, функциональному анализу, обыкновенным дифференциальным уравнениям, дифференциальным уравнениям в частных производных, математической физике, теории вероятностей и математической статистике. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре номера в год.

К публикации в периодическом издании «Уфимский математический журнал» принимаются статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более сорока страниц. Работы, превышающие сорок страниц, принимаются к публикации по особому решению редколлегии журнала.

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей также размещаются в свободном доступе в Интернете на сайте Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (http://matem.anrb.ru).

Публикации в журнале для авторов бесплатны.

1. Все материалы предоставляются в редакцию в двух экземплярах. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая страницы с рисунками, таблицами и списком литературы, следует пронумеровать. Авторам для окончательной правки высылается макет статьи в формате PDF или PS.

2. В отдельном файле, набранном в любом текстовом редакторе, указываются фамилии, имена, отчества всех авторов, название статьи, аннотации и ключевые слова на русском и английском языках. В этом же файле указываются ученое звание и ученая степень, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты, адрес прописки каждого из авторов. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

3. Текст статьи должен быть подготовлен на компьютере в издательской системе LaTeX2e (стиль amsart, пакеты amsmath, amsfonts, amssymb). Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX , не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте (umj@matem.anrb.ru) или передаются в редакцию на любых электронных носителях. Официально поданным в журнал для публикации считается распечатанный и подписанный всеми авторами вариант.

В тексте статьи определяются индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся краткие, не более 20 строк, аннотации на русском и английском языках, даются списки ключевых слов на русском и английском языках. Далее в файле приводятся полностью фамилия, имя, отчество каждого из авторов и наименование учреждения, где была выполнена работа, с полным почтовым адресом.

В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами, не следует переопределять греческие буквы и другие стандартные команды. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета.

Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова Рис. с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отцентрированной надписью Табл. с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. В списке литературы должно быть не более 40 позиций.

В случае отклонения статьи авторы получают мотивированный отказ, экземпляры рукописи авторам не возвращаются.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:

ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г. Уфа, Россия, ул. Чернышевского, 112, к. 22.
Тел. +7 347 273 33 42.
Email: umj@matem.anrb.ru, сайт журнала: http://matem.anrb.ru

Information for authors

Requirements for preparation of manuscripts

Ufimskii Matematicheskii Zhurnal publishes original research papers on the theory of functions, complex analysis, ordinary differential equations, partial differential equations, mathematical physics, probability theory and mathematical statistics. It is intended for researchers, teachers, postgraduate and undergraduate students. The journal publishes four regular issues per each year. We publish papers written in Russian or English which generally comprise up to 40 printed pages. Paper exceeding 40 printed pages can be accepted for publication by special consideration by the Editorial board.

Papers published in the journal are also freely placed in full volume on the official site of the Institute of mathematics with computer center of RAS (http://matem.anrb.ru).

The publication of papers in the journal is free of charge.

1. All documents are presented to editorial board in duplicate. The manuscript should be carefully checked. All pages should be numbered including drawings, tables and bibliographical references. The layout of the paper in PDF or PS format will be sent to authors for the final proof-reading.

2. Manuscript should be prepared on computer using LaTeX2e publishing software (style amsart, packages amsmath, amsfonts, amssymb). Typewritten manuscripts or the ones prepared by the software, different from TeX, will not be considered. Files *.tex and *.ps (*.pdf) of the paper should be sent to the editorial board by e-mail or submitted on any electronic data carriers. A variant of the manuscript is regarded as officially filed if it is in printed form and is signed by all authors.

3. In a detached file using any text editor should be represented full names of all authors, title of the paper, annotation and key words in Russian and English. The file should also contain science title and academic degrees, positions, full names of scientific institutions, addresses with the post office code, phone numbers with city code and mobile phone numbers, e-mail addresses and registration addresses of all authors. It is necessary to indicate the author responsible for

corresponding with Editorial board.

The date of submission to editorial board of two copies of manuscript, signed by all the authors is considered as the official date of submission of the paper.

Exemplary setup of the file of the paper (*.tex)

In the text index UDC and the title of the paper is defined, then it follows initials and family names of all authors, short annotation (at most 20 lines) in Russian and English, and the list of key words in Russian and English. Further it is given full names of all authors and names of institutions, where the work was implemented with full post addresses.

It is not admissible for the annotation includes intricate formulas, references on the text of the paper or on reference list. It should be in special attention that it is undesirable to use new (defined by authors) command sequences, especially with parameters, to redefine the Greece letters and other standard commands! In general it should be used standard package means.

Black-and-white drawings should be prepared in EPS format (Encapsulated PostScript) in such a way that guarantees its adequate representation under sequel optical two time decrease. If using drawings it is necessary to attach package epsfig. Inscription under the drawing must be placed on the center and include the word Fig. with sequel number. The numbers of drawings must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to drawings should be placed in the text of the paper. The tables are accompanied by centered inscription Tab. with sequel number. The numbers of tables must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to tables should be placed in the text of the paper. Diagrams are made as drawings.

The list of references must include only the items with references in the text with the order of citing. It is inadmissible the references on unpublished papers, the results of which are used in the proofs of the paper. In the case of rejection of the paper authors receive a notice with relevant valid reasons. Manuscripts are not returned.

Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, 450008, Ufa, Russian Federation,
112 Chernyshevsky Street.
Tel. +7 347 273 33 42.
http://matem.anrb.ru
Email: umj@matem.anrb.ru