ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 61-80.

УДК 519.64 + 517.518.87

НОВЫЙ АЛГОРИТМ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

М.Д. РАМАЗАНОВ

Аннотация. Решетчатые кубатурные формулы служат для приближенных вычислений интегралов гладких функций нескольких переменных, $\int\limits_\Omega f(x)dx$, с помощью линейных комбинаций $h^n \sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n,\\ hk\in\Omega}} c_k f(hk)$. Асимптотически оптимальная формула на W_2^m –пространстве определяется равенством $\sup\limits_{f\in W_2^m(\Omega)} \left|\int\limits_\Omega f(x)dx - h^n \sum\limits_{hk\in\Omega} c_k^{as} f(hk)\right| /$ $\inf\limits_{\{c_k\}} \sup\limits_{f\in W_2^m(\Omega)} \left|\int\limits_\Omega f(x)dx - h^n \sum\limits_{hk\in\Omega} c_k f(hk)\right| = 1.$

К.И. Бабенко принадлежит понятие ненасыщаемости вычислительных алгоритмов [7] — сохранения оптимальных порядков сходимостей для всех пространств функций, являющихся параметрами задачи.

В работе описан новый алгоритм построения решетчатых кубатурных формул, ненасыщаемых не только по порядку, но и по свойству асимптотической оптимальности на W_2^m –пространствах, $m\in(n/2,\infty)$.

Ключевые слова: кубатурные формулы, оптимизация, ненасыщаемый алгоритм

1. Введение

Решетчатые кубатурные формулы дают приближенные значения интегралов $\int\limits_\Omega dx f(x)$ по многомерным областям $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ в виде линейных комбинаций значений подинтегральной функции в узлах выбранной решетки.

$$K_N f \equiv \det H_N \cdot \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n,\\ H_N k\in\Omega}} c_k(N) f(H_N k), \quad H_N \text{ — матрица } n\times n,\ \det H_N = |\Omega|/N.$$

В конце 60–х годов прошлого века С.Л. Соболев [1]–[3] предложил алгоритм формул высокой точности, объединяющий подходы функционального анализа и алгебраический. Именно, гладкость интегрантов задавалась принадлежностью их конкретному банахову функциональному пространству $B(\Omega)\subset C$, качество формулы определялось нормой функционала погрешности
$l_N^\Omega:\ f\to\int\limits_\Omega dx\ f(x) - K_N f$, с оптимизацией по коэффициентам $\{c_k\}$.

$$l_N^{\Omega,\,opt} = \arg\min_{l_N^\Omega,\{c_k\}} \|l_N^\Omega\|_{[B(\Omega)]^*}. \tag{1}$$

А сам алгоритм строился как сумма локальных формул для интегрирования по элементарным ячейкам решетки $Q_{N,k}=\{x|\ H_N^{-1}x-k\in[0,1)^n\}$ с помощью алгебраических формул с теми же узлами, точно интегрирующих многочлены до некоторой степени M, связанной

M.D. Ramazanov, New algorithm of asymptotically optimal lattice cubature formulas.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00349-а).

Поступила 5 июля 2010 г.

с гладкостью интегрантов. С.Л. Соболев установил, что при $N \to \infty$ последовательность функционалов погрешностей таких формул обладает свойством асимптотической оптимальности:

$$\|l_N^{\Omega, as}\|_{[B(\Omega)]^*} = \|l_N^{\Omega, opt}\|_{[B(\Omega)]^*} \cdot (1 + o(1)) \tag{2}$$

на пространствах интегрантов $B(\Omega) = L_2^{(m)}(\Omega)$ с полунормой

$$\|f \mid L_2^{(m)}(\Omega)\| = \left[\int\limits_\Omega dx \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha f(x)|^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Свойство асимптотической оптимальности было установлено и для многих других банаховых пространств, обычно употребляемых в вычислительной математике [2]–[6]. Важнейшей особенностью соболевского алгоритма является свойство пограничного слоя: узлам, удаленным от границы области на расстояние больше $O(N^{-1/n})$ соответствуют одинаковые коэффициенты:

$$\exists L,\ \forall k,\ N \quad \text{dist } (H_N k,\ \partial\Omega) > LN^{-1/n} \Rightarrow c_k \equiv 1. \tag{3}$$

Это на порядок уменьшает объем вычислительной работы и позволяет установить для таких формул фактическую эквивалентность асимптотической и порядковой оптимальности на соболевских пространствах W_p^m [5].

Заложенная в алгоритме алгебраическая точность локальных формул на всех многочленах до некоторой степени M проявилась в условной «асимптотической ненасыщаемости» алгоритма. Именно, построенная последовательность кубатурных формул остается асимптотически (при $N \to \infty$) оптимальной на каждом пространстве W_p^m с $m \in (n/p, M)$, то есть в ослабленной форме удовлетворяет введенному К. И. Бабенко определению ненасыщаемости. (У К. И. Бабенко [7], [8] универсальна порядковая оптимальность без ограничения сверху на гладкость интегрантов). Ненасыщаемость — важное свойство вычислительных алгоритмов, позволяющее созданным по ним программам автоматически настраиваться на проявляющиеся характеристики гладкостей параметров задач, обеспечивая наилучшие скорости сходимостей аппроксимаций.

В настоящей работе мы ограничиваемся кубической решеткой узлов $H = hI_n$, $N = h^{-n}$, и предлагаем новый алгоритм решетчатых кубатурных формул $K_h f = h^n \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k f(hk)$, обладающих свойством ограниченного пограничного слоя и являющихся асимптотически ненасыщаемыми на всех пространствах $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ с $m > \frac{n}{2}$.

Сначала выводим формулу коэффициентов оптимальных кубатурных формул для интегралов более общего вида $\mathcal{I}^\varphi f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx\, \varphi(x) f(x)$ и на более общих пространствах $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$. Норма их задается равенством

$$\|f \mid W_2^\mu(\mathbb{R}^n)\| = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi \left| \tilde{f}(\xi) \mu(2\pi i \xi) \right|^2 \right)^{1/2} \tag{4}$$

с довольно произвольной функцией μ. Затем упрощаем выражения оптимальных коэффициентов, отсекая слагаемые, порядки которых пренебрежимо малы по сравнению с главным членом.

Таким образом, мы приходим к формуле коэффициентов асимптотически оптимальной кубатурной формулы с ограниченным пограничным слоем.

Далее мы ограничиваемся частным случаем с весовой функцией φ, являющейся характеристической функцией области интегрирования, и изотропной функцией μ, $\mu(2\pi i \xi) = (1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2}$. Окончательно, упрощая формулу коэффициентов в пограничном слое, получаем коэффициенты асимптотически ненасыщаемой формулы.

2. Формула коэффициентов решетчатой кубатурной формулы, оптимально аппроксимирующей интегралы с весовыми функциями

Определим пространство $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ как пополнение в норме (4) множества $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций.

$$\widetilde{f}(\xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx f(x) e^{-2\pi i x\xi}$$

— это преобразование Фурье функции f; $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — функция с конечным интегралом $\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi/|\mu(2\pi i\xi)|^2 < \infty$, что обеспечивает вложение $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ в пространство непрерывных функций $C(\mathbb{R}^n)$.

Без ограничения общности будем полагать μ бесконечно дифференцируемой, четной, не обращающейся в нуль нигде и равной единице в начале координат, $\mu(0) = 1$. Кроме того, мы полагаем, что функция μ имеет не более, чем степенной порядок роста. Точнее:

$$\exists\, m'' \geqslant m' > 0,\ \exists\, C > 0\ \forall \xi \quad (1 + |\xi|^{m'}/C) \leqslant |\mu(2\pi i\xi)| \leqslant (1 + |\xi|^{m''} \cdot C).$$

Мы берем $\mu(2\pi i\xi)$ символом гипоэллиптического псевдодифференциального оператора

$$\mu(D):\ f(x) \to \mu(D) f(x) = \int d\xi \tilde{f}(\xi) \mu(2\pi i\xi) e^{2\pi i\xi}.$$

Гипоэллиптичность означает выполнение условия

$$\exists\, \rho \in (0, 1] \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists\, C_\alpha : \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \left| \frac{D^\alpha \mu(2\pi i\xi)}{\mu(2\pi i\xi)} \right| \leqslant \frac{C_\alpha}{(1 + |\xi|)^{\rho|\alpha|}}. \tag{5}$$

В этой работе основным частным случаем будет $\mu(2\pi i\xi) = \left(1 + |2\pi\xi|^2\right)^{m/2}$, $m > n/2$. Обычное обозначение этого пространства, взятого в одной из эквивалентных нормировок $W_2^m(\mathbb{R}^n)$.

Как мы уже указали, качество кубатурной формулы характеризуется $[W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)]^*$-нормой ее функционала погрешности $l_h^{\varphi} : f \to \mathcal{I}^{\varphi} f - \mathcal{K}_h f$.
Оптимальные коэффициенты определяются условием

$$\{c_k^{opt}(h)\} = \arg\min_{\{c_k\}} \|\mathcal{I}^{\varphi} - \mathcal{K}_h \mid [W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)]^*\|.$$

Следует заметить, что мы берем кубатурную формулу с суммированием по всем узлам $\{hk \mid k \in \mathbb{Z}^n\}$, требуем принадлежность функционала K_h пространству $[W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)]^*$. Функционал погрешности оптимальной кубатурной формулы $l_h^{\varphi,opt} = \mathcal{I}^{\varphi} - K_h^{opt}$ должен удовлетворять условию

$$\|l_N^{\Omega,opt} \mid [W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)]^*\,\| = \inf_{\{c_k\}} \|\mathcal{I}^{\varphi} - K_h \mid [W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)]^*\,\|.$$

В гильбертовом пространстве шар слабо компактен и слабо замкнут. Поэтому мы можем описанную выше операцию инфимума нормы в $[W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)]^*\,\|$ заменить на нахождение минимума нормы. При этом аргумент минимума — единственный и оптимальный функционал погрешности — однозначно определен.

Первой нашей целью является получение формул оптимальных коэффициентов и выписывание их асимптотики по параметру h до такого порядка, который позволит заменить оптимальную кубатурную формулу асимптотически оптимальной $\mathcal{K}_h^{as} f$, см. (2), с более простым алгоритмом вычисления коэффициентов.

Коэффициенты кубатурных формул естественно считать комплексными, $c_k = c_k^1 + ic_k^2$. Поскольку квадрат нормы функционала погрешности является положительным многочленом второй степени от $\{c_k^1, c_k^2\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, уравнения, которым подчиняются оптимальные коэффициенты, задаются формулами

$$0 = \frac{\partial}{\partial c_k^1} \| l_h^{\varphi,opt} \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^* \|^2 = \frac{\partial}{\partial c_k^2} \| l_h^{\varphi,opt} \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^* \|^2 .$$

Прямыми вычислениями они сводятся к одному равенству

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi \, \frac{e^{2\pi i \xi h j}}{|\mu(2\pi i \xi)|^2} \left[\widetilde{\varphi}(\xi) - h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{opt} \cdot e^{-2\pi i \xi h k} \right] , \quad \forall j \in \mathbb{Z}^n .$$

где $\widetilde{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \, \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi}$. Сходимость этого интеграла обеспечивается нашими основными предположениями о весовой функции φ. Именно, считаем носитель функции замыканием $n-$мерной области Ω, ограниченной гладкой границей Γ, а саму функцию бесконечно дифференцируемой в $\bar{\Omega}$,

$$\operatorname{supp} \varphi \equiv \bar{\Omega} \Subset \mathbb{R}^n, \quad \partial\Omega \equiv \Gamma \in C^\infty, \quad \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}). \tag{6}$$

Эти ограничения впоследствии можно будет ослабить до естественных пределов, включающих обычно употребительные функции весовых интегралов.

Займемся решением уравнений оптимальных коэффициентов.

Интеграл по ξ разобьем на отдельные блоки:

$$\xi = \frac{t}{h} + \eta, \ t \in \mathbb{Z}^n, \ \eta \in Q/h, \ Q = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^n, \ \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \int\limits_{Q/h} d\eta.$$

Теперь

$$h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{opt} \int\limits_{Q/h} d\eta \, e^{2\pi i \eta (j-k) h} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i (\frac{t}{h} + \eta))|^2} =$$
$$= \int\limits_{Q/h} d\eta \, e^{2\pi i \eta j h} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{\widetilde{\varphi}(\frac{t}{h} + \eta)}{|\mu(2\pi i (\frac{t}{h} + \eta))|^2} .$$

Сделаем замену переменных $h \cdot \eta = \zeta$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{opt} \int\limits_Q d\zeta \, e^{2\pi i \zeta (j-k)} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i (t+\zeta)/h)|^2} =$$
$$= h^{-n} \int\limits_Q d\zeta \, e^{2\pi i \zeta j} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{\widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)}{|\mu(2\pi i (t+\zeta)/h)|^2} .$$

Обе части равенства умножим на $e^{-2\pi i \sigma j}$ и просуммируем по $j \in \mathbb{Z}^n$:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i \sigma j} \int\limits_Q d\zeta \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{opt} e^{-2\pi i \zeta k} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i (t+\zeta)/h)|^2} \right] e^{2\pi i \zeta j} =$$
$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i \sigma j} \int\limits_Q d\zeta \, e^{2\pi i \zeta j} \left[h^{-n} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{\widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)}{|\mu(2\pi i (t+\zeta)/h)|^2} \right] .$$

Заменим j на $-j$ и ***заметим***: в правой и левой частях равенства стоят ряды Фурье по j с коэффициентами от функций, заключенных в квадратные скобки. Значит, равны сами функции. Отсюда следует

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{opt} e^{-2\pi i \zeta k} = h^{-n} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{\widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)}{|\mu(2\pi i (t+\zeta)/h)|^2} \Big/ \sum_{s \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i (s+\zeta)/h)|^2} .$$

Заменим ζ на $-\zeta$ и заметим, что c_k^{opt} — это коэффициенты ряда Фурье функции, стоящей с правой стороны равенства.

По формулам для коэффициентов Фурье получаем

$$c_k^{opt} \equiv c_k^{opt}(h) = \int\limits_Q d\zeta\, e^{-2\pi i \zeta k} \cdot h^{-n} \frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n} \widetilde{\varphi}((t-\zeta)/h)/|\mu(2\pi i(t-\zeta)/h)|^2}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1/|\mu(2\pi i(s-\zeta)/h)|^2}\,.$$

Если ввести функцию непрерывного аргумента (и переменить ζ на $-\zeta$)

$$C^{opt}(x,h) = \int\limits_Q d\zeta\, e^{2\pi i \zeta x/h} \cdot h^{-n} \frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n} \widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)/|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1/|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^2}\,, \tag{7}$$

то

$$c_k^{opt}(h) = C^{opt}(x,h)\big|_{x=hk}\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n\,. \tag{8}$$

Назовем $C^{opt}(x,h)$ функцией оптимальных коэффициентов.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Равенства* (7), (8) *задают коэффициенты кубатурной формулы, оптимальной на пространстве* $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$.

3. Оценка порядка точности вычислений при получении функции асимптотически оптимальных коэффициентов

Асимптотическая оптимальность функционала погрешности означает, что отличие его нормы от нормы оптимального функционала есть величина бесконечно малая по сравнению с нормой асимптотически оптимального функционала. В наших гильбертовых пространствах оценка разности норм может быть заменена на оценку нормы разности оптимального и асимптотически оптимального функционалов. Покажем это, обозначая для краткости $[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*$– норму l через $\|l\|_*$ и эквивалентность порядков знаком $\asymp$.

$$0 \leqslant \frac{\|l_h^{\varphi,as}\|_* - \|l_h^{\varphi,opt}\|_*}{\|l_h^{\varphi,as}\|_*} = \frac{\|l_h^{\varphi,as}\|_*^2 - \|l_h^{\varphi,opt}\|_*^2}{(\|l_h^{\varphi,as}\|_* + \|l_h^{\varphi,opt}\|_*)\|l_h^{\varphi,as}\|_*} \asymp \left(\frac{\|l_h^{\varphi,as} - l_h^{\varphi,opt}\|_*}{\|l_h^{\varphi,as}\|_*}\right)^2$$

и это должно быть $o(1)$ при $h \to 0$.

Лемма 1. *Если* $\varphi \not\equiv 0$, *то*

$$\|l_h^{\varphi,as}|[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\| \geqslant \|l_h^{\varphi,opt}|[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\| \geqslant const\, \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i k/h)|^2}}.$$

Доказательство. Очевидно, для любого функционала погрешности и любой функции $u \in W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$

$$\|l_h^\varphi|[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\| \geqslant |(l_h^\varphi,\, u)|/\|u|W_2^\mu(\mathbb{R}^n)\|.$$

Подберем подходящую функцию u. Наша функция u будет неотрицательной и обращающейся в нуль в каждом узле hk. Поэтому $|(l_h^\varphi, u)| = |\int\limits_\Omega dx\, \varphi(x)u(x)|$. Так как φ непрерывна и не является тождественным нулем, то она отделена от нуля на некотором множестве ω, $|\varphi(x)|\,|_{x\in\omega} \geqslant c > 0$.

Можем полагать, что ω имеет форму прямоугольного параллелепипеда $\omega = \prod\limits_{j=1}^n [a_j, b_j]$, целиком помещающегося в единичном кубе $[-1/2, 1/2)^n$.

Обозначим эту область срезывающей функцией. Пусть $\varkappa(t)$ — «гладкая ступенька»: бесконечно дифференцируемая, неотрицательная, монотонная, с графиком, симметричным относительно точки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\varkappa \in C^\infty, \varkappa'(t) \geqslant 0$, $\varkappa(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\varkappa(t) = 1$ при $t \geqslant 1$,

$\varkappa'(\frac{1}{2}-t)=\varkappa'(\frac{1}{2}+t)$. Положим $\theta(x)=\prod_{j=1}^{n}\varkappa\left(\frac{x_j-a_j}{\tau}\right)\cdot\varkappa\left(\frac{b_j-x_j}{\tau}\right)$, подобрав параметр τ так, чтобы множество, на котором $\theta(x)=1$, было достаточно массивным:

$$\int dx\ \theta(x)=\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j-\tau)\geqslant\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)=|\mathrm{supp}\ \theta|/2.$$

Возьмем $u(x)=\theta(x)\cdot[v_h(x)-v_h(0)]$, где $v_h(x)$ — экстремальная функция однородного функционала погрешности $l_h^1(x)=\chi_{Q_h}(x)-h^n\sum\limits_{hk\in Q_h}\delta(x-hk)$, $\quad Q_h=[-Hh,Hh)^n$ с $H=[([1/h]+1)/2]$ (квадратные скобки последней формулы означают целую часть числа).

$$(l_h^1,v_h)=\|l_h^1\mid(\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h))^*\|,\|v_h\mid\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)\|=1.$$

Пространство $\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)$ состоит из периодических с основным периодом Q_h функций $f(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n}f_ke^{2\pi ikx/2Hh}$ с $f_k=(2Hh)^{-n}\int\limits_{Q_h}f(y)e^{-2\pi iy/2Hh}dy$ и конечной нормой

$$\|f\mid\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)\|=(2Hh)^{-n/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|f_k\mu(2\pi ik/2Hh)|^2\right)^{1/2}.$$

Как известно [6], экстремальная функция $v_h(x)$ имеет еще и маленький период h, $v_h(x+hk)=v_h(x)$, $\forall k\in\mathbb{Z}^n$, и вещественна и всюду не меньше своего значения в нуле, $v_h(x)-v_h(0)\geqslant 0$.

Таким образом,

$$\|l_h^{\varphi}\mid(W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n))^*\|\geqslant c\cdot\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^n,\\ \theta(hj)=1}}\int\limits_{hQ}dx[v_h(x-hj)-v_h(0)]/\|(v_h-v_h(0))\theta\mid W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)\|$$

Числитель этой дроби есть

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^n,\\ \theta(hj)=1}}\int\limits_{hQ}dx[v_h(x-hj)-v_h(0)]=\frac{|\{x\mid\theta(x)=1\}|}{h^n}\int\limits_{hQ}dx[v_h(x)-v_h(0)]=$$
$$=|\{x\mid\theta(x)=1\}|\cdot(2Hh)^{-n}\cdot(l_h^1,v_h-v_h(0))=|\{x\mid\theta(x)=1\}|\cdot(2Hh)^{-n}\cdot(l_h^1,v_h)=$$
$$=|\{x\mid\theta(x)=1\}|\cdot(2Hh)^{-n}\cdot\|l_h^1\mid(\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h))^*\|=$$
$$=\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h|^{-2}\right)^{1/2}=|\{x\mid\theta(x)=1\}|\cdot(1+O(h))\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h|^{-2}\right)^{1/2}.$$

При оценке знаменателя учтем известную эквивалентность норм $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)$ для функций, сосредоточенных в $int\ Q_h$, и гипоэллиптических символов μ. Благодаря этому

$$\|(v_h-v_h(0))\theta\mid W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)\|\leqslant\mathrm{const}\cdot\|(v_h-v_h(0))\theta\mid\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)\|\leqslant$$
$$\leqslant\mathrm{const}\cdot\|v_h-v_h(0)\mid\widetilde{W}_2^{\mu}(Q_h)\|\leqslant\mathrm{const}.$$

Итак,

$$\|l_h^{\varphi}\mid(W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n))^*\|\geqslant\mathrm{const}\cdot\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}1/|\mu(2\pi is/h|^2\right)^{1/2}.$$

Следствие 1. $\|l_h^{\varphi}\mid(W_2^m(\mathbb{R}^n))^*\|\geqslant const\cdot\ h^m.$

(Можно показать, что для оптимального функционала выполняется и обратная оценка

$$\|l_h^{\varphi,opt} \mid (W_2^m(\mathbb{R}^n))^*\| \leqslant \mathrm{const} \cdot |\mathrm{supp}\ \varphi|^{\frac{1}{2}} \cdot h^m\ ).$$

4. Упрощение формулы коэффициентов для узлов, достаточно удаленных от области интегрирования

Возвращаясь от переменных $t \in \mathbb{Z}^n,\ \zeta \in Q$ к $\xi = \dfrac{t+\zeta}{h}$, можем написать

$$C^{opt}(x,h) = \int\limits_{\Omega} dy\, \varphi(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, \frac{e^{2\pi i(x-y)\xi}}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} \nu(\xi,h), \text{где } \nu(\xi,h) = \frac{1}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} \dfrac{1}{|\mu(2\pi i \frac{s}{h} + \xi)|^2}}.$$

Функция $\xi \to \nu(\xi,h)$ бесконечно дифференцируемая, периодическая с основным периодом Q/h. Мы накладываем условие

$$\mathrm{dist}\ (x,\Omega) \geqslant \psi(h) = o(1) \quad \text{при } h \to 0.$$

и хотим воспользоваться этим, чтобы упростить выражение $C^{opt}(x,h)$. Зададим финитную функцию $\sigma(\xi,\delta) = \prod_{j=1}^n [1 - \varkappa(|\xi_j| h^\delta - 2)]$ с некоторым $\delta > 0$. Рассмотрим часть функции $C^{opt}(x,h)$ вне $O(h^{-\delta})$ окрестности начала координат переменных ξ.

$$C_\delta^{opt}(x,h) \equiv \int\limits_{\Omega} dy\, \varphi(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, \frac{e^{2\pi i(x-y)\xi}}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} \nu(\xi,h)[1-\sigma(\xi,\delta)].$$

Теперь подготовим удобное нам интегрирование по частям в интеграле по ξ с вычислением первообразных от $e^{2\pi i(x-y)\xi} \cdot \nu(\xi,h)$. Пусть будет

$$\nu(\xi,h). \cdot e^{2\pi i(x-y)\xi} \equiv \Delta_\xi^N (e^{2\pi i(x-y)\xi} \cdot f(\xi)).$$

Вычислим $f(\xi)$ как решение этого уравнения.

$$\Delta_\xi^N(g(\xi)f(\xi)) = \Delta_\xi^N \left[F^{-1}_{x\to\xi} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} dt\, \tilde{g}(t) \cdot \tilde{f}(x-t) \right) \right](\xi) =$$
$$= \Delta_\xi^N \int dx\, e^{2\pi i x\xi} \int dt\, \tilde{g}(t) \cdot \tilde{f}(x-t) = \int dx \int dt\, (2\pi i)^{2N} \tilde{g}(t) \cdot \tilde{f}(x-t) e^{2\pi i x\xi} \equiv I$$

Для упрощения формулы возьмем N четным числом.

$$I = (2\pi)^{2N} \int dx \int dt\, (|t|^2 + 2(t,x-t) + |x-t|^2)^N \tilde{g}(t)\tilde{f}(x-t) e^{2\pi i x\xi} =$$
$$= (2\pi)^{2N} \int dx \int dt\, e^{2\pi i x\xi} \cdot \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N} C_N^\alpha |t|^{2\alpha_1} \cdot (2(t,x-t))^{\alpha_2} |x-t|^{2\alpha_3} \tilde{g}(t)\tilde{f}(x-t).$$

$(2(t,x-t))^{\alpha_2} = 2^{\alpha_2}(t_1(x_1-t_1) + \ldots + t_n(x_n-t_n))^{\alpha_2} = 2^{\alpha_2} \sum\limits_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\\ \beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2}} C_{\alpha_2}^\beta t^\beta (x-t)^\beta$. Поэтому

$$I=(2\pi)^{2N}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}\ \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2}C_N^{\alpha}C_{\alpha_2}^{\beta}2^{\alpha_2}\cdot$$

$$\cdot\int dx\int dt\, e^{2\pi ix\xi}(|t|^{2\alpha_1}\cdot t^{\beta}\tilde{g}(t))\cdot(|x-t|^{2\alpha_3}(x-t)^{\beta}\tilde{f}(x-t))=$$

$$=(2\pi)^{2N}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}\ \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2}C_N^{\alpha}C_{\alpha_2}^{\beta}2^{\alpha_2}F^{-1}_{x\to\xi}\cdot$$

$$\cdot\int dt\, e^{2\pi ix\xi}(|t|^{2\alpha_1}\cdot t^{\beta}\tilde{g}(t))\cdot(|x-t|^{2\alpha_3}(x-t)^{\beta}\tilde{f}(x-t))=$$

$$=(2\pi)^{2N}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}\ \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2}C_N^{\alpha}C_{\alpha_2}^{\beta}2^{\alpha_2}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(2\pi i)^{2\alpha_1+2(\beta_1+\ldots+\beta_n)+2\alpha_3}}(D_\xi^{\beta}\Delta_\xi^{\alpha_1}g(\xi))(D_\xi^{\beta}\Delta_\xi^{\alpha_3}f(\xi)).$$

Применим эту формулу к $g(\xi)=e^{2\pi i(x-y)\xi}$

$$\Delta_\xi^N\left(e^{2\pi i(x-y)\xi}\cdot f(\xi)\right)=(2\pi)^{2N}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}\ \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2}C_N^{\alpha}C_{\alpha_2}^{\beta}2^{\alpha_2}(2\pi i)^{2\alpha_1+\beta_1+\ldots+\beta_n}\cdot$$

$$\cdot(x-y)^{\beta}\cdot|x-y|^{2\alpha_1}e^{2\pi i(x-y)\xi}\cdot D_\xi^{\beta}\Delta_\xi^{\alpha_3}f(\xi)=e^{2\pi i(x-y)\xi}\cdot\nu(\xi,h).$$

Относительно $f(x)$ получили уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами. Это эллиптическое уравнение — с главным членом $\Delta_\xi^{2N}f(\xi)$. $P(D)f(\xi)=\nu(\xi,h)$.

Характеристический многочлен дифференциального оператора есть

$$P(2\pi it)\equiv(2\pi)^{2N}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}\ \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2}C_N^{\alpha}C_{\alpha_2}^{\beta}(x-y)^{\beta}|x-y|^{2\alpha_1}(2\pi i)^{2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\cdot$$

$$\cdot t^{\beta}|t|^{2\alpha_3}=(2\pi)^{4N}\cdot[|t|^{2N}+|x-y|^{2N}+$$

$$+\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N\\ \alpha_1\neq N\neq\alpha_3}}\ \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2\\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n}}C_N^{\alpha}C_{\alpha_2}^{\beta}(x-y)^{\beta}|x-y|^{2\alpha_1}\cdot t^{\beta}|t|^{2\alpha_3}].$$

Замена переменных $t=\tau|x-y|$ дает

$$P(2\pi i\tau|x-y|)=(4\pi^2|x-y|)^{2N}[|\tau|^{2N}+1+$$

$$+\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N\\ \alpha_1\neq N\neq\alpha_3}}C_N^{\alpha}\sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2\\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n}}C_{\alpha_2}^{\beta}\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)^{\beta}\cdot\tau^{\beta}|x-y|^{2\alpha_1}\cdot|\tau|^{2\alpha_3}]\equiv(4\pi^2|x-y|)^{2N}Q(\tau).$$

Отметим:

$$\sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_n=\alpha_2\\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n}}C_{\alpha_2}^{\beta}\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)^{\beta}\tau^{\beta}=(e_{x-y},\tau)^{\alpha_2},\text{где } e_{x-y}=\frac{x-y}{|x-y|}.$$

Фундаментальное решение дифференциального оператора $P(D)$ можно задать формулой

$$\Phi_N(\xi)=\int\limits_{\Gamma_n}dt\,\frac{e^{2\pi i\xi t}}{P(2\pi it)}=|_{t=\tau|x-y|}=|x-y|^n\int\limits_{\Gamma_n/|x-y|}d\tau\,\frac{e^{2\pi i\tau\xi|x-y|}}{(4\pi^2|x-y|)^{2N}Q(\tau)}.$$

Здесь Γ_n — это n –мерная поверхность в $\mathbb{C}^n$ — лестница Хёрмандера для многочлена $P(2\pi i\xi)$, [9], а $\Gamma_n/|x-y|$ — соответствующая лестница Хёрмандера для многочлена

$$Q(\tau) = |\tau|^{2N} + 1 + \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N \\ \alpha_1\neq N\neq\alpha_3}} C_N^\alpha (e_{x-y},\tau)^{\alpha_2}|\tau|^{2\alpha_3} \quad \text{с } |\tau|^2 \equiv \tau_1^2+\ldots+\tau_n^2.$$

с может быть комплексными $\tau_1,\ldots,\tau_n$. Фундаментальное решение гладкое при достаточно большом N, $\Phi_N \in C^{2N-n}$.

Отметим еще: вещественные корни многочлена $Q(\tau)$, $\{\tau \mid \tau\in\mathbb{R}^n,\ Q(\tau)=0\}$, если они есть, остаются в ограниченной области равномерно по параметрам $(x-y)$. Поэтому лестницу Хёрмандера можно построить так, чтобы фундаментальное решение экспоненциально убывало при $|\xi|\to\infty$, $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Подходящее нам решение дифференциального уравнения $P(D_\xi)f(\xi) = \nu(\xi,h)$ можно выписать в виде свертки этого фундаментального решения с правой частью $f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\, \Phi_N(\eta)\cdot\nu(\xi-\eta,h)$.

Итак,

$$\begin{aligned}
C_\delta^{opt}(x,h) &= \int\limits_\Omega dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, e^{2\pi i(x-y)\xi} f(\xi)\Delta_\xi^N\left(\frac{1}{\mu^2(2\pi i\xi)}\cdot[1-\sigma(\xi,\delta)]\right) = \\
&= (2\pi)^{-2N}\int\limits_\Omega dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, e^{2\pi i(x-y)\xi}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\,|x-y|^{n-2N}\int\limits_{\Gamma_n/|x-y|} d\tau\,\frac{e^{2\pi i\tau\xi|x-y|}}{Q(\tau)}\nu(\xi-\eta,h)\cdot \\
&\qquad \cdot\Delta_\xi^N\left(\frac{1}{\mu^2(2\pi i\xi)}\cdot[1-\sigma(\xi,\delta)]\right)\equiv \\
&\equiv (2\pi)^{-2N}\int\limits_\Omega dy\,\varphi(y)|x-y|^{n-2N}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\,\hat{\Phi}_N(\eta|x-y|)\nu(\xi-\eta,h)\cdot \\
&\qquad \cdot\Delta_\xi^N\left(\frac{1}{\mu^2(2\pi i\xi)}\cdot[1-\sigma(\xi,\delta)]\right),
\end{aligned}$$

где $\hat{\Phi}_N(\eta|x-y|) \equiv \int\limits_{\Gamma_n/|x-y|} d\tau\,\dfrac{e^{2\pi i\tau\eta|x-y|}}{Q(\tau)}$.

Для гипоэллиптического символа $\mu(2\pi i\xi)$ (5) имеем

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_\xi^N\frac{1}{\mu^2(2\pi i\xi)}\cdot[1-\sigma(\xi,\delta)]\right| &\leqslant C_N\frac{1}{|\mu^2(2\pi i\xi)|}\left(\max_{|\xi|\geqslant\frac{1}{h^\delta}}\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N\rho}} + h^{\delta\cdot 2N}\right) = \\
&= C_N\frac{1}{|\mu^2(2\pi i\xi)|}\left(h^\rho+h^\delta\right)^{2N}.
\end{aligned}$$

Полагая $\psi(h) = O(h^\gamma)$ с $\gamma<\min\{\rho,\delta\}$, получаем

$$\left|C_\delta^{opt}(x,h)\right| \leqslant \text{const}\ \cdot\frac{h^{2N\rho}}{\psi(h)^{2N-n}}\cdot\left|\int\limits_{|\xi|\leqslant h^{-\delta}} d\xi\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\,\hat{\Phi}_N(\eta|x-y|)\nu(\xi-\eta,h)\frac{1}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}\right|.$$

Внутренний интеграл допускает такую оценку

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\eta\, \hat{\Phi}_N(\eta|x-y|)\nu(\xi-\eta,h)\right| =$$

$$=|_{\eta=\frac{t+\zeta}{h},t\in\mathbb{Z}^n,\zeta\in Q}= \left|\sum_{t\in\mathbb{Z}^n} h^{-n}\int\limits_{Q} d\zeta\ \hat{\Phi}_N\left(\frac{t+\zeta}{h}\cdot|x-y|\right)\nu\left(\xi-\frac{t+\zeta}{h},h\right)\right| =$$

$$= h^{-n}\left|\int\limits_{Q} d\zeta\ \nu\left(\xi-\frac{\zeta}{h},h\right)\sum_{t\in\mathbb{Z}^n}\hat{\Phi}_N\left(\frac{t+\zeta}{h}\cdot|x-y|\right)\right| \leqslant C_N\cdot h^{-n}.$$

Теперь, чтобы сделать $C_\delta^{opt}(x,h) = o\left(\left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\backslash 0} 1/\mu(2\pi i s/h)\right)^{1/2}\right)$, достаточно взять большое N.

При соблюдении этого условия мы можем пренебречь членом $C_\delta^{opt}(x,h)$, переходя от оптимальной формулы к асимптотически оптимальной.

Таким образом,

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, e^{2\pi i(x-y)\xi}\frac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}\sigma(\xi,\delta) \text{ при } \operatorname{dist}(x,\Omega)\geqslant O(h^\gamma),$$

и

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\, e^{2\pi i(x-y)\xi}\frac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} \quad \text{при } \operatorname{dist}(x,\Omega)\leqslant O(h^\gamma).$$

В варианте $\operatorname{dist}(x,\Omega) \geqslant O(h^\gamma)$, возможно уточнение оценки. Благодаря условию $|\xi|\leqslant O(h^{-\delta})$ на носителе $\sigma(\xi,\delta)$ после замены $\xi=\frac{t}{h}+\eta,\ t\in\mathbb{Z}^n,\ \eta\in Q/h$ остается только слагаемое с $t=0$. Поэтому

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{Q/h} d\eta\, e^{-2\pi i y\eta}\sigma(\eta,\delta)\cdot\frac{1}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n}\left|\mu(2\pi i\eta)/\mu(2\pi i(\frac{s}{h}+\eta))\right|^2} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{Q/h} d\eta\, e^{-2\pi i y\eta}\sigma(\eta,\delta)\,(1-\rho(\eta,h))$$

с

$$\rho(\eta,h) \equiv \sum_{s\in\mathbb{Z}^n\backslash 0}\left|\mu(2\pi i\eta)/\mu(2\pi i(\frac{s}{h}+\eta))\right|^2 \Big/ \left(1+\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\backslash 0}\left|\mu(2\pi i\eta)/\mu(2\pi i(\frac{s}{h}+\eta))\right|^2\right).$$

Подберем достаточно малое δ так, чтобы с некоторым $\lambda>0$ было

$$|\mu(2\pi i\eta)|^2\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\backslash 0}|\mu(2\pi i s/h)|^{-2}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\cdot h^{-2m''\delta}\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\backslash 0}|\mu(2\pi i s/h)|^{-2}\right)^{1/2} = O(h^\lambda). \quad (9)$$

Тогда

$$\frac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} = \frac{1}{1+\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi i\xi)|^2/|\mu(2\pi i(s/h-\xi))|^2} =$$

$$= 1 + O\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}\right)\cdot|\mu(2\pi i\xi)|^2 =$$

$$= 1 + o\left(\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}\right)^{1/2}\right),$$

и можно исключить из рассматриваемой формулы $\dfrac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}$.

Получаем с $\gamma < \min\{\delta,\rho\}$

$$C^{as}(x,h) = \begin{cases} \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\,\sigma(\xi,\delta)e^{2\pi i(x-y)\xi} & \text{если } \operatorname{dist}(x,\Omega)\geqslant O(h^\gamma),\\ \int\limits_{\Omega} dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\,\dfrac{\nu(\xi,h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2}e^{2\pi i(x-y)\xi}, & \text{если } \operatorname{dist}(x,\Omega)\leqslant O(h^\gamma).\end{cases}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\,\sigma(\xi,\delta)e^{2\pi i(x-y)\xi} = \prod_{j=1}^n\int d\xi_j\,(1-\varkappa(|\xi_j|h^\delta-2))e^{2\pi i(x_j-y_j)\xi_j} =$$

$$= h^{-\delta n}\prod_{j=1}^n\int\limits_{|\tau|\leqslant 4} d\tau\,(1-\varkappa(|\tau|-2))e^{2\pi i(x_j-y_j)\tau/h^\delta}.$$

Функция $\int d\tau\,(1-\varkappa(|\tau|-2))e^{2\pi it\tau} \equiv T(t)$, принадлежит известному пространству S быстро убывающих функций. Значит,

$$I = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi\,\sigma(\xi,\delta)e^{2\pi i(x-y)\xi}\right| \leqslant \text{const}\ h^{-\delta n}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^n\left(1+\dfrac{|x_j-y_j|}{h^\delta}\right)^M}$$

с любым M. Следовательно

$$I \leqslant \text{const}\ h^{-\delta n}\left(\frac{h^\delta}{\psi(h)}\right)^M = O\left(h^{-\delta n+(\delta-\gamma)M}\right) = o(h^{m''}) = o\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}\right)$$

при достаточно большом M.

Поэтому мы положим $C^{as}(x,h)=0$, если $\operatorname{dist}(x,\Omega)\geqslant O(h^\gamma)$ и $\gamma<\min\{\delta,\rho\}$.

Приведем в пример пространство $W_2^m(\mathbb{R}^n)$. Для $|\xi|\leqslant c\cdot h^{-\delta}$

$$|\mu(2\pi i\xi)|^2\sqrt{\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi is/h)|^{-2}} \leqslant \text{const}\ h^{-2m\delta+m}.$$

Чтобы это было порядка $O(h^\lambda)$ с $\lambda>0$, достаточно положить $\lambda = m(1-2\delta)$ и $\delta\in\left(\frac12,1\right)$. При этом $\min\{\delta,\rho\} = \min\{\delta,1\} = \delta = \frac12+\varepsilon$ с $\forall\varepsilon_1\in\left(0,\frac12\right)$. Значит, можно взять любое $\gamma\leqslant\frac12$.

Итак,

$$C^{as}(x,h)=\begin{cases}0, & \text{при } \operatorname{dist}(x,\Omega)\geqslant O(h^\gamma)\\ \int\limits_\Omega dy\,\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\xi\,\dfrac{\nu(\xi,h)}{(1+|2\pi\xi|^2)^m}e^{2\pi i(x-y)\xi}, & \text{если } \operatorname{dist}(x,\Omega)\leqslant O(h^\gamma).\end{cases}$$

5. Асимптотически оптимальные коэффициенты кубатурной формулы в случае финитной бесконечно дифференцируемой весовой функции φ

Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.
За основу опять берем формулу оптимальных коэффициентов

$$C^{opt}(x,h)=\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}h^{-n}\frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n}\widetilde{\varphi}\left((t+\zeta)/h\right)/|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h|^2}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n}1/|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}.$$

Лемма 2.

$$C^{as}(x,h)=C^{opt}(x,h)\cdot(1+o(1))=\varphi(x)\cdot(1+o(1)).$$

Доказательство
Оценим $\widetilde{\varphi}((t+\zeta)/h)$. $\widetilde{\varphi}(\xi)$ является элементом пространства S бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со своими производными быстрее любой степени $|\xi|$. Поэтому при $t\neq 0$ $|\widetilde{\varphi}\left((t-\zeta)/h\right)|\leqslant \text{const}\ \dfrac{1}{(1+|t-\zeta|/h)^M}=O(h^M)$ с любым M. В частности, при $t\neq 0$

$$|\widetilde{\varphi}\left((t+\zeta)/h\right)|=o\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\left(1/|\mu(2\pi is/h|^2\right)\right).$$

Значит, для асимптотически оптимальной функции достаточно оставить только слагаемое с $t=0$

$$C^{as}(x,h)=\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}\cdot h^{-n}\cdot\widetilde{\varphi}(\zeta/h)\cdot 1/|\mu(2\pi i\zeta/h|^2/\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}1/|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2.$$

Здесь тоже выделим слагаемое с $s=0$.

$$C^{as}(x,h)=\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}h^{-n}\widetilde{\varphi}\left(\zeta/h\right)-$$

$$-\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}h^{-n}\widetilde{\varphi}\left(\zeta/h\right)\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\dfrac{|\mu(2\pi i\zeta/h|^2}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}}{1+\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\dfrac{|\mu(2\pi i\zeta/h|^2}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}}.$$

Первое слагаемое есть

$$\int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h}h^{-n}\widetilde{\varphi}\left(\zeta/h\right)=\int\limits_{Q/h}d\eta\ e^{2\pi i\eta x}\widetilde{\varphi}\left(\eta\right)=\varphi(x)+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q/h}d\eta\ e^{2\pi i\eta x}\widetilde{\varphi}\left(\eta\right).$$

Остаток $\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q/h}d\eta\ e^{2\pi i\eta x}\widetilde{\varphi}\left(\eta\right)=o\left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\dfrac{1}{|\mu(2\pi is/h)|^2}\right)$, так как $\widetilde{\varphi}\in S$.
Поэтому первое слагаемое в формуле $C^{as}(x,h)$ заменим на $\varphi(x)$.

Оценим второе слагаемое. Пусть $\delta \in (0,1)$ удовлетворяет условию

$$\max_{|\zeta|\leqslant h^\delta} |\mu(2\pi i\zeta/h)|^2 = o\left(1/\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}\right)^{1/2}\right).$$

Тогда дробь, выписанная в формуле второго слагаемого,

$$\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} \frac{|\mu(2\pi i\zeta/h|^2}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}}{1+\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} \frac{|\mu(2\pi i\zeta/h|^2}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2}},$$

не превосходит $o\left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}\right)$.

А для $|\zeta| > h^\delta$ используем то, что вся эта дробь меньше 1. Поэтому соответствующая часть интеграла по ζ допускает оценку

$h^{-n} \int\limits_{\substack{\zeta\in Q,\\ |\zeta|>h^\delta}} d\zeta\, |\widetilde{\varphi}(\zeta/h)| \leqslant \mathrm{const}\ \cdot h^{-n} \int\limits_{\substack{\zeta\in Q,\\ |\zeta|>h^\delta}} d\zeta \frac{1}{(1+|\zeta/h|)^M}$ с любым M.

Очевидно, что при достаточно большом M это есть

$$O(h^{(1-\delta)(M-n)}) = o\left(\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}\right)^{1/2}\right).$$

Таким образом, мы показали, что при $\varphi \in C_0^\infty$ можно положить

$$C^{as}(x,h) = \varphi(x).$$

6. Функция асимптотически оптимальных коэффициентов вне пограничного слоя

Теперь покажем, что для внутренних узлов, удаленных от границы Γ, области больше, чем на $\psi(h)$, в асимптотически оптимальной формуле можно полагать значения коэффициентов $c_k(h)$ равными $\varphi(hk)$. Действительно, функцию $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ через гладкую границу Γ можно продолжить с сохранением гладкости любых порядков производных вне области — на все пространство. Причем вне некоторого шара $\{x \mid |x| \leqslant R\}$ можно считать $\varphi(x) \equiv 0$.

Для оптимальной кубатурной формулы, выписанной для области $\{x \mid |x| \leqslant R\}\setminus\Omega$, внутренность Ω будет внешностью. Соответственно, сохраняя асимптотическую оптимальность, можно полагать коэффициенты нулевыми для узлов, лежащих внутри Ω на расстоянии $\psi(h)$ от границы Γ. Разность асимптотически оптимальных формул для области $\{x \mid |x| \leqslant R\}$ с $\varphi \in C_0^\infty(\{x \mid |x| \leqslant R\})$ и области $\{x \mid |x| \leqslant R\}\setminus\Omega$ будет асимптотически оптимальной для области Ω с $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Очевидно, ее коэффициенты в узлах из Ω, удаленных от границы Γ на расстояние большее $\psi(h)$, будут равны значениям весовой функции $\varphi(x)$ в этих узлах.

В частности, для $\varphi(x) = \chi_\Omega(x)$ — характеристической функции области Ω, в этих внутренних узлах коэффициенты равны 1. Таким образом, в этом отношении полученные формулы являются естественными обобщениями кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. Здесь следует отметить, что прежнее определение ОПС формул [6] ограничивало толщину пограничного слоя порядком $O(h)$. Пограничиный слой наших формул толще, имеет порядок $\psi(h)$. Поэтому изменим определение свойства ОПС, разрешив большую толщину пограничного слоя. Пусть теперь требуется, чтобы толщина пограничного слоя была $o(1)$ при $h \to 0$. Это сохраняет основные качественные свойства решетчатых ОПС формул, полезные в приложениях, в частности, утверждение об эквивалентности порядковой и асимптотической оптимальностей решетчатых ОПС формул на семействах W_p^m пространств [5].

Предлагаемые формулы являются асимптотически оптимальными на каждом $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)-$ пространстве интегрантов, вложенном в $C(\mathbb{R}^n)$.

Сформулируем этот наш основной результат

Рассматриваются решетчатые кубатурные формулы $\mathcal{K}_h(f)=h^n\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k f(hk)$, приближающие интегралы с весом $\mathcal{I}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^\ltimes} dx\ \varphi(x)f(x)$. Весовая функция предполагается гладкой в ограниченной области Ω с гладкой границей Γ : $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\Omega},\ \varphi \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega}),\ \Gamma \in \mathbb{C}^\infty$. Интегранты f принадлежат пространствам $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ с нормами

$$\|f \mid W_2^\mu(\mathbb{R}^n)\| = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi |\widetilde{f}(\xi)\cdot\mu(2\pi i\xi)|^2}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\xi|\mu(2\pi i\xi)|^2 < \infty.$$

Другие свойства функций μ перечислены в начале пункта 2.

Теорема 2. *Асимптотически оптимальная решетчатая кубатурная формула с ограниченным пограничным слоем может быть задана такой функцией своих коэффициентов* $c_k^{as}(h) = C^{as}(hk,h)$,

$$C^{as}(x,h) = \begin{cases} 0 & \text{при } dist(x,\Omega) \geqslant O(h^\gamma), \\ \varphi(x) & \text{при } dist(x,\mathbb{R}^n\backslash\Omega) \geqslant O(h^\gamma), \\ C^{opt}(x,h) = \int\limits_Q d\zeta e^{2\pi i\zeta x/h} h^{-n}\cdot & \\ \cdot\dfrac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n}\widetilde{\varphi}\left((t+\zeta)/h\right)/|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h|^2}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1/|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h|^2} & \text{при } dist(x,\Gamma) \leqslant O(h^\gamma), \end{cases}$$

с любым $\gamma < \min(\delta,\rho)$, *где* $\rho-$ *показатель гипоэллиптичности символа* μ, *см.* (5), *а* δ *определяется условием* (9).

Сформулируем этот результат в самом важном частном случае, когда пространство изотропно $\mu(2\pi i\xi) = (1+|2\pi\xi|^2)^{m/2}$, а интеграл невесовой

$$\varphi(x) \equiv \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Omega}, \\ 0, & x \neq \Omega. \end{cases}$$

Теорема 3. *Для любых* $m > n/2$ *асимптотически оптимальная кубатурная формула с ограниченным пограничным слоем может быть задана функцией коэффициентов: с любым* $\gamma < \frac{1}{2}$

$$C^{as}(x,h) = \begin{cases} 0 & \text{при } dist(x,\Omega) \geqslant h^\gamma, \\ 1 & \text{при } dist(x,\mathbb{R}^n\backslash\Omega) \geqslant h^\gamma, \\ C^{opt}(x,h) = \int\limits_\Omega dy \int\limits_Q d\zeta\ \cdot h^{-n} & \\ \cdot\dfrac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i(x-y)(t+\zeta)/h}/(h^2+|2\pi(t+\zeta)|^2)^m}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1/(h^2+|2\pi(s+\zeta)|^2)^m} & \text{при } dist(x,\Gamma) \leqslant h^\gamma. \end{cases}$$

7. Упрощение формулы асимптотически оптимальных коэффициентов в пограничном слое

Упростим формулу асимптотически оптимальных коэффициентов в пограничном слое. Пограничиный слой задается условием dist $(x, \Gamma) \leqslant \psi(h) = o(1)$ при $h \to 0$. Нам достаточно считать переменные y меняющимися в некоторой малой, но фиксированной (независимо от h) окрестности Γ_y. Эту окрестность вырежем домножением на соответствующую гладкую ступеньку $\varkappa_\Gamma(y)$, полагая вместо $\varphi(y)$ произведение $\varphi(y) \cdot \varkappa_\Gamma(y) \equiv g(y)$. С некоторой постоянной C $g(y)$ совпадает с $\varphi(y)$ в окрестности границы, dist $(y, \Gamma) \leqslant C$, и $g(y) = 0$ в $\Omega \backslash \{y \mid \text{dist } (y, \Gamma) \leqslant 2C\}$.

$$C_\Gamma^{opt}(x,h) = \int\limits_{\Gamma_y} dy\, g(y) \int\limits_Q d\zeta\, h^{-n} e^{2\pi i(x-y)\zeta/h} \cdot \frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i y t/h}/\mu^2(2\pi i(t+\zeta)/h)}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} 1/\mu^2(2\pi i(s+\zeta)/h)} =$$

$$= h^{-n} \int\limits_Q d\zeta \int\limits_{\Gamma_y} dy\, g(y) e^{2\pi i(x-y)\zeta/h} \cdot \frac{1 + \sum\limits_{t\neq 0} e^{-2\pi i t y/h} \dfrac{\mu^2(2\pi i\zeta/h)}{\mu^2(2\pi i(t+\zeta)/h)}}{1 + \sum\limits_{s\neq 0} \dfrac{\mu^2(2\pi i\zeta/h)}{\mu^2(2\pi i(s+\zeta)/h)}}.$$

Зададимся вопросом: для каких ζ будет

$$\sum_{s\neq 0} \frac{\mu^2(2\pi i\zeta/h)}{\mu^2(2\pi i(s-\zeta)/h)} = o(\nu_{opt}(h)), \text{где } \nu_{opt}(h) = \sqrt{\sum_{s\neq 0} \frac{1}{\mu^2(2\pi i s/h)}}$$

— порядок оптимального функционала погрешности.

Дело в том, что для такого множества $\{\zeta\}_h$ можно убрать из формулы $C^{opt}(x,h)$ суммы $\sum\limits_{t\neq 0}$ и $\sum\limits_{s\neq 0}$. Останется

$$C_\Gamma^{as}(x,h) = h^{-1} \int\limits_{\{\zeta\}_h} d\zeta \int\limits_{\Gamma_y} g(y) e^{2\pi i(x-y)\zeta/h} \equiv \int\limits_{\{\zeta\}_h/h} d\xi\, \widetilde{g}(\xi) e^{2\pi i x\xi}. \tag{10}$$

Например, для $\mu(2\pi i\xi) = (1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2}$ наше требование означает

$$\sum_{s\neq 0} \left(\frac{1 + |2\pi\zeta/h|^2}{1 + |2\pi(s-\zeta)/h|^2} \right)^m = o(h^m).$$

Или $|\zeta/h|^{2m} \cdot h^{2m} = o(h^m) \Leftrightarrow |\zeta| \leqslant O(h^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ с $\forall \varepsilon > 0$.

В общем случае это будет некоторой окрестностью нуля

$$\{\zeta\}_h \equiv \left\{ \zeta \mid |\zeta| \leqslant O(h^\alpha), \text{ где } \mu(2\pi i\zeta/h) \leqslant o(1) \cdot \frac{1}{\nu_{opt}(h)} \right\}.$$

Заметим, что наши ранее проделанные вычисления показывают, что можно взять $\alpha = \delta$.

Для $|\zeta| \geqslant Ch^\delta$ при $t = 0$ или $\forall \zeta \in Q$ при $t \neq 0$ упрощение формулы коэффициентов в пограничном слое произведем за счет интегрирования по частям по переменной y. Именно, будем много раз перебрасывать оператор Лапласа Δ_y с множителя

$$\Delta_y \left(e^{-2\pi i(t+\zeta)/h} \cdot \frac{h^2}{-|2\pi(t+\zeta)|^2} \right) |_{\forall t\in\mathbb{Z}^n} \ \text{ на } g(y).$$

Для этого воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_{\Gamma_y} dy\, g(y)\Delta_y f(y) = \int\limits_{\Gamma_y} dy\, \Delta_y g(y) f(y) +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma} d\Gamma\, g(y)\left(n_x(y), D_y\right) f(y) - \int\limits_{\Gamma} d\Gamma\, \left(n_{exp}(y), D_y\right) g(y) f(y).$$

После многократного применения этой формулы интеграл $\int\limits_{\Gamma_y}$ можно будет исключить, когда порядок этого слагаемого по h при $h \to 0$ станет выше $\nu_{opt}(h)$.

Итак, при $|\zeta| \geqslant Ch^\delta$ с $f(y) = e^{-2\pi i(t+\zeta)/h} \cdot \dfrac{h^2}{-|2\pi(t+\zeta)|^2}$ имеем

$$C^{as}_{\Gamma}(x,h) = -\int\limits_{\substack{|\zeta|\geqslant ch^\delta,\,(t=0),\\ \zeta\in Q\ (t\neq 0)}} d\zeta\, h^{-n}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t\in\mathbb{Z}^n}\left\{\int\limits_{\Gamma} d\Gamma\, \left[\Delta^{j-1} g(y)\cdot\right.\right.$$
$$\cdot\, h^{2j-1}\cdot\frac{\langle n_{ex}(y), 2\pi i(t+\zeta)\rangle}{(-\left|2\pi(t+\zeta)\right|^2)^j} - \langle n_{ex}(y), D_y\rangle \Delta_y^{j-1} g(y)\cdot$$
$$\left.\left.\cdot\frac{e^{-2\pi i(t+\zeta)y/h}}{(-|2\pi(t+\zeta)|^2)^j}h^{2j}\right]\cdot\frac{\mu^2(2\pi i(t+\zeta)/h)}{\frac{1}{\mu^2(2\pi i\zeta/h)}+\sum\limits_{s\neq 0}\frac{1}{\mu^2(2\pi i(s+\zeta)/h)}}\right\} e^{2\pi i x\zeta/h}.$$

Надо взять J из условия $h^{(1-\delta)\cdot 2J-n} = o(\nu^{opt}(h))$. Например, при $\mu(2\pi i\xi) = (1+|2\pi\xi|^2)^{m/2}$ получаем $J > \dfrac{m+n}{2(1-\delta)}$.

В итоге, функция асимптотически оптимальных коэффициентов в пограничном слое dist $(x,\Gamma) \leqslant h^\gamma$ принимает вид

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{|\xi|\leqslant O(h^{\delta-1})} d\xi\, \widetilde{g}(\xi) e^{2\pi i x\xi} + h^{-n}\int\limits_{\substack{|\zeta|\geqslant ch^\delta,\,(t=0),\\ \zeta\in Q\ (t\neq 0)}}\sum_{t\in\mathbb{Z}^n}\frac{1}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2}$$
$$\sum_{j=1}^{J}\frac{\int\limits_{\Gamma} d\Gamma\left[\dfrac{e^{-2\pi i(t+\zeta)y/h}}{(-|2\pi(t+\zeta)|^2)^j}h^{2j-1}\langle n_e(y), 2\pi i(t+\zeta) - D_y\rangle\right]}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n}\dfrac{1}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^2}}\cdot\Delta^{j-1} g(y) e^{2\pi i x\zeta/h}.$$

Напомним: здесь $\delta > 0$ определяется условием

$$\left\{\zeta \mid |\zeta| \leqslant O(h^\delta)\right\} \subset \left\{\zeta \mid |\mu(2\pi i(\zeta/h)|^2 = o(1)/\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi i s/h)|^{-2}\right)^{1/2}\right\},$$

а $J = J(h)$ — условием $h^{(1-\delta)\cdot 2J-n} = o\left(\left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}|\mu(2\pi i s/h)|^{-2}\right)^{1/2}\right)$.

Если $\varphi(x) = \chi_\Omega(x)$, то в пограничном слоем $D^\beta g(y)\mid_\Gamma = 0$ при любой $|\beta| \geqslant 1$ и остается

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{|\xi|\leqslant c\cdot h^{\delta-1}} d\xi\, \widetilde{\varkappa_\Gamma}(\xi) e^{2\pi i x\xi} -$$

$$- i\cdot h^{-n} \int\limits_{\substack{|\zeta|\geqslant ch^\delta,\,(t=0),\\ \zeta\in Q\ (t\neq 0)}} \frac{\sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^n} \dfrac{1}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} \int\limits_\Gamma d\Gamma \langle n_{ex}(y), \frac{(t+\zeta)}{|t+\zeta|^2}\rangle}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} \dfrac{1}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^2}} \cdot e^{-2\pi i y t/h} \cdot e^{2\pi i(x-y)\zeta/h}.$$

Для дальнейших преобразований введем разбиение единицы в приграничной области $\Omega\cap\operatorname{supp}\varkappa_\Gamma$, $\sum\limits_{p=1}^{P}\varphi_p(y) \equiv 1$. Можно сделать (так и будем считать), чтобы пересечение границы Γ с носителем любой функции φ_p задавалось уравнением, выражающим одну координату через остальные:

$$\forall p \quad \Gamma\cap\operatorname{supp}\varphi_p = \left\{ y \mid y_p = \gamma_p(y_1,\ldots,y_{s_p-1},y_{s_p+1},\ldots,y_n)\right\},$$

причем $\gamma\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$.

Теперь

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{|\xi|\leqslant c\cdot h^{\delta-1}} d\xi\, \widetilde{\varkappa_\Gamma}(\xi) e^{2\pi i x\xi} + \sum_{p=1}^{P} C_p^{as}(x,h)$$

с

$$C_p(x,h) = -i\cdot h^{-n} \int\limits_{\substack{|\zeta|\geqslant ch^\delta,\,(t=0),\\ \zeta\in Q\ (t\neq 0)}} \sum_{t\in\mathbb{Z}^n} \frac{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^{-2}}{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^{-2}} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_\Gamma d\Gamma \varphi_p(y) \langle n_{ex}(y), \frac{t+\zeta}{|t+\zeta|^2}\rangle \cdot e^{-2\pi i y t/h + 2\pi i(x-y)\zeta/h}. \quad (11)$$

Для сокращения записи вычисления проведем только для содержащегося внутри формулы $C(x,h)$ интеграла по Γ, считая

$$\Gamma\cap\operatorname{supp}\varphi_p = \{y \mid y_n = \gamma(y_1,\ldots,y_{n-1}) \equiv \gamma(y')\}.$$

Остановимся сначала на варианте $\gamma(y') \equiv \text{ const } = y_n^0$. Тогда $n_{ex} = \begin{pmatrix} 0' \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\int\limits_\Gamma d\Gamma\varphi_p(y)\langle n_{ex}(y), t+\zeta\rangle/|t+\zeta|^2 \cdot e^{-2\pi i y t/h + 2\pi i(x-y)\zeta/h} =$$

$$= \int dy' \frac{\varphi_p(y',\gamma(y'))}{\sqrt{1+|D\gamma(y')|^2}} \frac{t_n+\zeta_n}{|t_n+\zeta_n|^2} e^{-2\pi i(t'+\zeta')y'/h} \cdot e^{2\pi i x\zeta/h - 2\pi i y_n^0(t_n+\zeta_n)/h}.$$

В интеграле по y' произведем многократные интегрирования по частям, используя формулу

$$(-\Delta_{y'})^N \left(\frac{h}{2\pi|t'+\zeta'|}\right)^{2N} e^{-2\pi i(t'+\zeta')y'/h} = e^{-2\pi i(t'+\zeta')y'/h}.$$

Дифференциальный оператор $(-\Delta_{y'})^N$ перекинем на сомножитель $\dfrac{\varphi_p(y',\gamma(y'))}{\sqrt{1+|D\gamma(y')|^2}}$. Благодаря финитности функции $\varphi_p(y',\gamma(y'))$ граничные члены не появятся.

Самая грубая оценка результата дает порядок убывания при $h \to 0$ больший $O\left(h^{(1-\delta)\cdot 2N}\right)$, который при достаточно большом x можно сделать бесконечно малым по сравнению с главным членом. Таким образом, мы можем пренебречь слагаемыми $C_p(x,h)$ с функциями γ_p, являющимися константами.

Рассмотрим общий случай $D\gamma(y') \not\equiv 0$, для которого построим специальный оператор интегрирования по частям. Мы хотим подобрать функцию $f(y',h)$, удовлетворяющую условию

$$\Delta_y \cdot \left[f(y',h)\cdot \frac{e^{2\pi i\xi_n\gamma(y')-2\pi i\xi' y'}}{|\xi|^2}\right] = e^{2\pi i\xi_n\gamma(y')-2\pi i\xi' y'}. \tag{12}$$

Здесь обозначено $\xi = \frac{t+\zeta}{h}$ с $|\zeta| > ch^\delta$ при $t=0$ и $\zeta \in Q$ при $t \neq 0$. То есть при $h \to 0$ $|\xi| \equiv \lambda \to \infty$ с порядком не ниже $h^{1-\delta}$.

Функция f должна быть решением уравнения

$$M(y',D)f \equiv \Delta_{y'}f - 4\pi i\langle \xi' + \xi_n D\gamma(y'), D_{y'}f\rangle - \\ - \left[\left|2\pi\xi' + 2\pi\xi_n D\gamma(y')\right|^2 + 2\pi i\xi_n\Delta_{y'}\gamma\right] f = \lambda^2. \tag{13}$$

Ищем это решение в виде $f(y',h) = g(\lambda\cdot y',h)$, что приводит к такому уравнению для $g(z',h):$ где

$$L(z',D)g \equiv \Delta_{z'}g - 4\pi i\langle e' + e_n D\gamma, D_{z'}g\rangle - \\ - 2\pi\left[\left|e' + e_n D\gamma\right|^2 + ie_n\Delta\gamma/\lambda\right] g = 1, \tag{14}$$

где $e \equiv \xi/\lambda$.

Естественно положить $g(z',h) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} g_s(z',h)/\lambda^s$ с рекуррентными соотношениями для функций $g_s: \quad \forall s \geqslant 0$ и $g_{-1} \equiv 0$

$$L_1(z',D)g_s \equiv \Delta g_s - 4\pi i\langle e' + e_n D\gamma, Dg_s\rangle - \\ - 4\pi^2|e' + e_n D\gamma|^2 g_s = 2\pi i e_n\Delta\gamma\cdot g_{s-1} + \delta_0^1. \tag{15}$$

Или

$$\Delta g_0 - 4\pi^2|e' + e_n D\gamma|^2 g_0 - 4\pi i\langle e' + e_n D\gamma, Dg_0\rangle = 1.$$

а для $s \geqslant 1$

$$\Delta g_s - 4\pi^2|e' + e_n D\gamma|^2 g_s - 4\pi i\langle e' + e_n D\gamma, Dg_s\rangle = 2\pi i e_n\Delta\gamma\cdot g_{s-1}.$$

Область определения функции g — это увеличенная в λ раз область определения f — последняя является ограниченным множеством в $\mathbb{R}^{n-1}$,
$\{y' \mid (y',\gamma(y')) \in \Gamma \cap \operatorname{supp}\varphi_p\}$.

Наше требование к f следующее: каждое найденное решение уравнения $M(y',D)f_r = f_{r-1}$, $r \geqslant 1$, $f_0 = 1$, должно быть ограниченным равномерно по $\lambda \to \infty$. Но может быть, с весом λ^{-k} с фиксированным k при $r \to \infty$.

Безусловно, все f_r бесконечно дифференцируемы как решения эллиптических уравнений (13) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Но нужны равномерные по λ оценки. Благодаря теореме вложения $W_2^m(\mathbb{R}^{n-1}) \subset C(\mathbb{R}^{n-1})$ при $m > \dfrac{n-1}{2}$ достаточно иметь оценки W_2^m –норм, допуская $K = m$. Это значит, достаточно получить равномерные по λ оценки W_2^m–норм функции $g(z',h)$, которая удовлетворяет более удобному для нас эллиптическому уравнению (14) с ограниченными коэффициентами. Годится любое подходящее решение, поэтому рассмотрим область определения $g(z',h)$, продолжив коэффициенты (теми же аналитическими выражениями) и потребовав от g быть решением однородной краевой задачи Дирихле в расширенной области,границу которой можно считать тоже бесконечно дифференцируемой. Перейдем к уравнению (15). Обычными априорными оценками можно показать, что решение такой задачи будет единственным и, следовательно, будет существовать в W_2^2 при любых правых частях из $\mathcal{L}_2$. Более того, по теоремам о повышении гладкости эллиптического уравнения с оператором Лапласа в главной части получим принадлежность функции g пространству W_2^m с оценкой нормы равномерно по $\lambda \to \infty$ (несмотря на то, что диаметр области растет пропорционально λ). Это то, что нам нужно.

Теперь обратимся к формуле (12), поместив ее в интеграл $\int\limits_{\Gamma} dy'$. Интегрированием по частям перебросим оператор Лапласа $\Delta_{y'}$ на остальные сомножители и в результате получим функцию f/λ^2. Повторяя такую операцию много раз, накопим в знаменателе множитель $\dfrac{1}{\lambda^{2N-m}}$. Это при достаточно большом N обеспечит всему интегралу порядок убывания по h, пренебрежимо малый по сравнению с главным членом. Таким образом, и в общем случае в пограничном слое остается только

$$C^{as}(x,h) = \int\limits_{|\xi| \leqslant c \cdot h^{\delta-1}} d\xi\, \widetilde{\varkappa_{\Gamma}}(\xi) e^{2\pi i x\xi}.$$

Теорема 4. *Асимптотически оптимальную решетчатую кубатурную формулу, приближающую* $\int\limits_{\Omega} dx\, f(x)$ *на интегрантах из пространства* $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ *с гипоэллиптическим символом гладкости* $\mu(2\pi i\xi)$ *с показателем* $\rho \in (0,1]$, *подчиненным условию* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \dfrac{d\xi}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} < \infty$, *можно задать функцией коэффициентов*

$$C^{as}(x,h) = \begin{cases} 0, & \text{для } dist(x,\Omega) \geqslant h^{\gamma}, \\ 1, & \text{для } dist(x,\mathbb{R}^n \backslash \Omega) \geqslant h^{\gamma}, \\ \int\limits_{\max\limits_{1\leqslant j \leqslant n} |\xi_j| \leqslant h^{\delta-1}} d\xi\, \widetilde{\varkappa}(\xi) e^{2\pi i x\xi}, & \text{для } dist(x,\Gamma) \geqslant h^{\gamma}. \end{cases}$$

с любым $\gamma < \min(\rho,\delta)$, *где* $\delta \in (0,1)$ *и выбирается из условия*

$$\int\limits_{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\xi_j| \leqslant h^{\delta-1}} d\xi\, |\mu(2\pi i\xi)|^2 \cdot \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \backslash 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2} \right)^{1/2} = o(1).$$

Например, для $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ *пространств можно взять любое* $\delta \leqslant \dfrac{1}{2}$ *и* $\rho = 1$. *Тогда будет* $\gamma \leqslant \dfrac{1}{2}$.

8. Заключение

Нам удалось получить асимптотически ненасыщаемую формулу. То есть вид коэффициентов не зависит от показателя гладкости — функции $\mu(2\pi i\xi)$. А в частном случае (наиболее важном) $\mu(2\pi i\xi) = (1+|2\pi\xi|^2)^{m/2}$ и толщина пограничного слоя остается одной и той же для всех $m > \frac{n}{2}$. И над каждым пространством интегрантов $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ наши формулы коэффициентов дают асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем.

Более того, вид функции коэффициентов в пограничном слое проявляет явление Гиббса в колебаниях амплитуд коэффициентов кубатурной формулы. В частности, эти колебания амплитуд не зависят от гладкостей, заданных пространствами $W_2^m(\mathbb{R}^n)$. В указанном пограничном слое

$$|C^{as}(x,h)| \leqslant \left| \int\limits_{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\xi_j|\leqslant h^{\delta-1}} d\xi \int\limits_{\Omega} dy\, \varkappa_\Gamma(y) e^{-2\pi i y\xi + 2\pi i x\xi} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} dy\, \varkappa_\Gamma(y) \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin 2\pi (x_j - y_j) h^{\delta-1}}{\pi (x_j - y_j)} \right|.$$

Согласно явлению Гиббса последнее выражение ограничено равномерно по x и h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука. 1974. 808 с.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. *Кубатурные формулы.* Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН. 1996. 484 с.
3. S.L. Sobolev, V.L. Vaskevich *The Theory of Cubature Formulas (Mathematics and Its Applications)* // 1st edition. Kluwer. 1997. ISBN 0792346319.
4. Рамазанов М.Д. *Периодическая кубатурная формула интеграла с весом* // Кубатурные формулы и их приложения. X международный семинар-совещание. 24–28 августа 2009 г., г. Улан-Удэ. Материалы конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2009. С. 118–124.
5. M.D. Ramazanov *To the L_p-theory of Sobolev formulas* // Siberian advances in mathematics. 1999. Vol. 9, № 1. P. 99–125.
6. Рамазанов М.Д. *Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем.* ИМВЦ УНЦ РАН. Уфа: ДизайнПолиграфСервис, 2009. 178 с.
7. Бабенко К.И. *Основы численного анализа.* 2-е изд. М. ; Ижевск: РХД, 2002. 848 с.
8. V.N. Belykh *On the best approximation properties of C^∞-smooth functions on an interval of the real axis (to the phenomenon of unsaturated numerical methods)* // Siberian Mathematical Journal. 2005. Vol. 46, № 3. P. 373–385.
9. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс.* М.: Наука. 1965. 328 с.

Марат Давидович Рамазанов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `ramazanovmd@yandex.ru`