ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 52-60.

УДК 517.982.3

О ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В $\mathbb{R}^n$

И.Х. МУСИН, С.В. ПОПЁНОВ

Аннотация. Рассматривается пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, построенное при помощи некоторого семейства φ весовых функций в $\mathbb{R}^n$, растущих быстрее любой линейной функции. Изучаются задача приближения полиномами в этом пространстве и проблема описания сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов при дополнительных условиях на φ.

Ключевые слова: полиномиальная аппроксимация, преобразование Фурье-Лапласа функционалов, целые функции, теорема типа Пэли-Винера.

1. Введение

Постановка задач. Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство вещественнозначных функций $\varphi_m \in C(\mathbb{R}^n)$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

1). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$);

2). $\lim\limits_{x\to\infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty$.

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : p_m(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\le m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty\}.$$

Очевидно, $\mathcal{E}(\varphi_{m+1}) \subset \mathcal{E}(\varphi_m)$. Пусть $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}(\varphi_m)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $\mathcal{E}(\varphi)$ становится линейным пространством. Наделим $\mathcal{E}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}(\varphi_m)$.

Так как для каждого $m \in \mathbb{N}$ пространство $\mathcal{E}(\varphi_{m+1})$ вложено вполне непрерывно в $\mathcal{E}(\varphi_m)$ [1], то $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство (M^*) [1], [2].

Интерес к изучению пространств типа $\mathcal{E}(\varphi)$ был проявлен в работах [3]-[5].

В данной заметке рассматриваются следующие две задачи:

1. аппроксимация полиномами в $\mathcal{E}(\varphi)$;

2. при условии, что семейство φ состоит из функций степенного роста, описать сильное сопряженное пространство к $\mathcal{E}(\varphi)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}(\varphi)$.

Известно [6], [7], что полиномы плотны в $\mathcal{E}(\varphi)$, если семейство φ состоит из функций $\varphi_m(x) = \Phi(x) - m\ln(1 + \|x\|)$, где Φ — непрерывная вещественнозначная функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что при некоторых $C > 0, D \in \mathbb{R}$ и $\mu > 1$

$$\Phi(x) \ge C\|x\|^\mu - D, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

I.Kh. Musin, S.V. Popënov, On a weighted space of infinitely differentiable functions in $\mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00779, 08-01-97023).

Поступила 20 мая 2010 г.

При тех же условиях на φ и в предположении выпуклости Φ в $\mathbb{R}^n$ вторая задача изучалась для $n = 1$ в [6], а в случае нескольких переменных — в [7] при условии, что при некоторых $\rho > 1, \mu \in (1, \rho]$, $A > 0, B \in \mathbb{R}, C > 0, D \in \mathbb{R}$ всюду в $\mathbb{R}^n$

$$C\|x\|^{\mu} - D \leq \Phi(x) \leq A\|x\|^{\rho} + B.$$

При определённых условиях на φ в работе [8] изучалась сюръективность преобразования Фурье-Лапласа линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}(\varphi)$.

Определения, результаты. Пусть $\mathcal{E}'(\varphi)$ — пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{E}(\varphi)$, $\mathcal{E}^*(\varphi)$ — сильное сопряженное к $\mathcal{E}(\varphi)$.

Для произвольной вещественнозначной функции Φ в $\mathbb{R}^n$ такой, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{\|x\|} = +\infty,$$

пусть

$$\widetilde{\Phi}(x) = -\inf_{y\in\mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle + \Phi(y)),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Через $\widetilde{\varphi}$ обозначим семейство функций $\widetilde{\varphi}_m$.

Отметим, что для любого $z \in \mathbb{C}^n$ функция $f_z(\xi) = exp(i\langle \xi, z\rangle)$ принадлежит пространству $\mathcal{E}(\varphi)$, поскольку при любом $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(f_z) \leq (1 + \|z\|)^m \exp(\widetilde{\varphi}_m(Im\ z)).$$

Преобразование Фурье-Лапласа $\hat{S}$ функционала $S \in \mathcal{E}'(\varphi)$ определим по формуле

$$\hat{S}(z) = S(e^{i<\xi,z>}),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Точно так же, как в [7, лемма 4]) показывается, что $\hat{S}$ — целая функция, причем для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(D_z^{\alpha}\hat{S})(z) = S((i\xi)^{\alpha} e^{i\langle\xi,z\rangle}),\ z \in \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ — пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, $P(\widetilde{\varphi}) = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}_+} P(\widetilde{\varphi}_m)$, где

$$P(\widetilde{\varphi}_m) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_m = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{(1 + \|z\|)^m \exp(\widetilde{\varphi}_m(Im\ z))} < \infty \right\}.$$

С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $P(\widetilde{\varphi})$ становится линейным пространством. Пространство $P(\widetilde{\varphi})$ наделим топологией индуктивного предела нормированных пространств $P(\widetilde{\varphi}_m)$.

В работе установлены следующие основные результы.

Теорема 1. *Пусть φ — семейство вещественнозначных функций $\varphi_m \in C(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям 1), 2). Тогда полиномы плотны в $\mathcal{E}(\varphi)$.*

Теорема 2. *Пусть $\rho > 1$, $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — совокупность выпуклых функций в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям:*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty \quad \forall m \in \mathbb{N}$;

2) $\exists C > 0\ \exists D > 0$: $\varphi_1(x) \leq C||x||^{\rho} + D,\ x \in \mathbb{R}^n$;

3) $\exists a > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists b_m \geq 0$: $\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x) \geq a\ln(1 + ||x||) - b_m,\ x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда преобразование Фурье-Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*(\varphi)$ и $P(\widetilde{\varphi})$.

2. Аппроксимация полиномами в $\mathcal{E}(\varphi)$

Для функции $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{x} = +\infty \tag{2}$$

пусть $u^*(x) = \sup\limits_{y \ge 0}(xy - u(y)),\ u[e](x) = u(e^x),\ x \ge 0.$

Лемма 1. *Пусть непрерывная функция $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (2). Тогда*

$$(u[e]))^*(x) + (u^*[e])^*(x) \le x \ln x - x,\ x > 0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x > 0$. Найдутся точки $t \ge 0$ и $\xi \ge 0$ такие, что

$$(u[e])^*(x) = xt - u(e^t),$$
$$(u^*[e])^*(x) = x\xi - u^*(e^\xi).$$

Таким образом,

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = xt - u(e^t) + x\xi - \sup_{\eta \ge 0}(e^\xi \eta - u(\eta)).$$

Следовательно, для любого $\eta \ge 0$

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \le xt - u(e^t) + x\xi - e^\xi \eta + u(\eta).$$

Полагая здесь $\eta = e^t$, имеем

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \le xt + x\xi - e^{\xi + t}.$$

Следовательно,

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \le \sup_{y \ge 0}(xy - e^y) \le \sup_{y \in \mathbb{R}}(xy - e^y) = x \ln x - x.$$

Замечание. В работе [9] рассматривался класс функций u, для которых в (3) имеет место равенство.

Доказательство теоремы 1. Следуем схеме доказательства леммы 6 из [7], повторяя для полноты изложения часть использованных там рассуждений.

Для краткости пусть $\theta_m(x) = \exp(\varphi_m(x)),\ x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, то есть, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $c_m > 0$ такая, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \le c_m \theta_m(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha| \le m. \tag{4}$$

Приблизим f полиномами в $\mathcal{E}(\varphi)$. Это будет проделано в три этапа.

1. Для $r > 0$ пусть $\Pi_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < r, j = 1, \dots, n\}$. Выберем функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ так, что supp $\chi \subseteq [-2, 2], \chi(x) = 1$ для $x \in [-1, 1]$, $0 \le \chi(x) \le 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. Положим $\eta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_n)$.

Пусть $f_\nu(x) = f(x)\eta(\frac{x}{\nu}),\ \ \nu \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, $f_\nu \in \mathcal{E}(\varphi)$. Покажем, что $f_\nu \to f$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\nu \to \infty$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \le \sup_{x \notin \Pi_\nu} \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)} \le \sup_{x \notin \Pi_\nu} \frac{c_{m+1}\theta_{m+1}(x)}{\theta_m(x)}.$$

Следовательно, при $\nu \to \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \to 0. \tag{5}$$

Далее,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, 1 \le |\alpha| \le m} \frac{|D^\alpha(f_\nu(x) - f(x))|}{\theta_m(x)} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 1\le|\alpha|\le m} \frac{|\sum\limits_{\beta\le\alpha,|\beta|<|\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} (D^\beta f)(x)\nu^{|\beta|-|\alpha|}(D^{\alpha-\beta}\eta)(\frac{x}{\nu}) + (D^\alpha f)(x)(\eta(\frac{x}{\nu})-1)|}{\theta_m(x)} \le$$

$$\le \sup_{x\in\Pi_{2\nu}\setminus\Pi_\nu, 1\le|\alpha|\le m} \frac{\sum\limits_{\beta\le\alpha,|\beta|<|\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} \nu^{|\beta|-|\alpha|}|(D^\beta f)(x)||(D^{\alpha-\beta}\eta)(\frac{x}{\nu})|}{\theta_m(x)} +$$

$$+ \sup_{x\notin\Pi_\nu, 1\le|\alpha|\le m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\theta_m(x)}$$

Пользуясь неравенством (4), заключаем, что при $\nu\to\infty$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, 1\le|\alpha|\le m} \frac{|D^\alpha(f_\nu(x)-f(x))|}{\theta_m(x)} \to 0.$$

Отсюда и из (5) следует, что для каждого $m\in\mathbb{N}$ $p_m(f_\nu - f)\to 0$ при $\nu\to\infty$. Следовательно, последовательность $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty$ сходится к f в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\nu\to\infty$.

2. Зафиксируем $\nu\in\mathbb{N}$. Пусть h — не равная тождественно нулю целая функция экспоненциального типа не выше 1, принадлежащая классу $L_1(\mathbb{R})$, и неотрицательная на вещественной прямой. Можно взять, например, $h(z) = \dfrac{\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}$, $z\in\mathbb{C}$. Положим $H(z_1,z_2,\ldots,z_n) = h(z_1)h(z_2)\cdots h(z_n)$. Воспользовавшись теоремой Пэли-Винера [10, гл. 6], найдем постоянную $C_H>0$ такую, что для любого $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$

$$|(D^\alpha H)(x)| \le C_H\ ,\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Пусть $\int_{\mathbb{R}^n} H(x)\,dx = A$. Для $\lambda>1$ положим

$$f_{\nu,\lambda}(x) = \frac{\lambda^n}{A}\int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(y)H(\lambda(x-y))\,dy,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Очевидно, $f_{\nu,\lambda}\in\mathcal{E}(\varphi)$. Покажем, что $f_{\nu,\lambda}\to f_\nu$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\lambda\to+\infty$. Пусть $m\in\mathbb{N}$ произвольно, $r(\lambda)=\lambda^{-\frac{2n}{2n+1}}$. Для любых $\alpha\in\mathbb{Z}_+, x\in\mathbb{R}^n$

$$(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha f_\nu)(x) = \frac{\lambda^n}{A}\int_{\mathbb{R}^n}((D^\alpha f_\nu)(y) - (D^\alpha f_\nu)(x))H(\lambda(x-y))\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^n}{A}\int_{\|y-x\|\le r(\lambda)}((D^\alpha f_\nu)(y) - (D^\alpha f_\nu)(x))H(\lambda(x-y))\,dy +$$

$$+\frac{\lambda^n}{A}\int_{\|y-x\|> r(\lambda)}((D^\alpha f_\nu)(y) - (D^\alpha f_\nu)(x))H(\lambda(x-y))\,dy.$$

Обозначим слагаемые в правой части последнего равенства через $I_{1,\alpha}(x)$ и $I_{2,\alpha}(x)$, соответственно. Пусть $K_{\nu,m} = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n,|\beta|\le m+1}|(D^\beta f_\nu)(x)|$. В результате элементарных оценок получим

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\le m}|I_{1,\alpha}(x)| \le \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{n}C_H K_{\nu,m}}{A\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\lambda^{-\frac{n}{2n+1}};$$

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\le m}|I_{2,\alpha}(x)| \le \frac{2K_{\nu,m}}{A}\int\limits_{\|u\|>\lambda^{\frac{1}{2n+1}}} H(u)\,du.$$

Из этих двух оценок следует, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\le m}|(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha f_\nu)(x)| \to 0$$

при $\lambda\to+\infty$. Следовательно, $p_m(f_{\nu,\lambda}-f_\nu)\to 0$ при $\lambda\to+\infty$. Отсюда, в силу произвольности $m\in\mathbb{N}$, имеем: $f_{\nu,\lambda}\to f_\nu$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\lambda\to+\infty$.

3. Зафиксируем $\lambda > 0, \nu \in \mathbb{N}$. Приблизим $f_{\nu,\lambda}$ многочленами в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Для $N \in \mathbb{N}, x(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ пусть

$$U_N(x) = H(0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\sum\limits_{1 \le i_1 \le n} \cdots \sum\limits_{1 \le i_k \le n} \frac{\partial^k H}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(0) x_{i_1} \cdots x_{i_k}}{k!} .$$

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$|H(x) - U_N(x)| \le \frac{\sum\limits_{1 \le i_1 \le n} \cdots \sum\limits_{1 \le i_{N+1} \le n} \sup\limits_{\xi \in l(0,x)} \left| \frac{\partial^{N+1} H}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{N+1}}}(\xi) x_{i_1} \cdots x_{i_{N+1}} \right|}{(N+1)!} ,$$

где $l(0, x)$ — интервал, соединяющий начало и точку x. Воспользовавшись неравенством (6), получим

$$|H(x) - U_N(x)| \le \frac{C_H n^{N+1} \|x\|^{N+1}}{(N+1)!} . \tag{7}$$

Пусть $R > 0$ таково, что $supp f_\nu \subset \Pi_R$. Положим

$$V_N(x) = \frac{\lambda^n}{A} \int_{\Pi_R} f_\nu(y) U_N(\lambda(x - y)) \, dy, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

V_N — многочлен степени не выше N. Покажем, что последовательность $(V_N)_{N=1}^\infty$ сходится к $f_{\nu,\lambda}$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $N \to \infty$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, x \in \mathbb{R}^n$

$$(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha V_N)(x)) = \frac{\lambda^n}{A} \int_{\Pi_R} (D^\alpha f_\nu)(y)(H(\lambda(x - y)) - U_N(\lambda(x - y))) \, dy.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (7), найдем положительные числа C_1 и C_2 такие, что при любых $N \in \mathbb{N}, |\alpha| \le m, x \in \mathbb{R}^n$

$$|(D^\alpha f_{\nu,\lambda})(x) - (D^\alpha V_N)(x)| \le \frac{C_1 C_2^N (1 + \|x\|)^{N+1}}{(N+1)!} .$$

Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \le \frac{C_1 C_2^N}{(N+1)!} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{(1 + \|x\|)^{N+1}}{\theta_m(x)} .$$

Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Для $\sigma \in S^{n-1}$ пусть

$$\varphi_{m,\sigma}(t) = \varphi_m(\sigma t), \ t \ge 0.$$

Проведя элементарные выкладки и воспользовавшись неравенством (3), получим

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \le \frac{C_3 C_4^N}{(N+1)!} \frac{(N+1)^{N+1}}{\exp(\inf\limits_{\sigma \in S^{n-1}} (\varphi_{m,\sigma}^*[e])^*(N+1))} ,$$

где C_3 и C_4 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от N. Отсюда, пользуясь формулой Стирлинга и тем, что равномерно по $\sigma \in S^{n-1}$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{(\varphi_{m,\sigma}^*[e])^*(N+1)}{N+1} = +\infty,$$

делаем вывод, что $p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \to 0$ при $N \to \infty$. Это означает, что функцию $f_{\nu,\lambda}$ удалось приблизить многочленами в $\mathcal{E}(\varphi)$ (поскольку $m \in \mathbb{N}$ было произвольно).

Из 1) — 3) следует полнота многочленов в $\mathcal{E}(\varphi)$.

3. О сильном сопряженном пространстве к $\mathcal{E}(\varphi)$ в специальном случае весовых функций

При доказательстве теоремы 2 понадобятся два следующих результата.

Лемма 2. *Пусть $\nu > 1$, а функция $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что для некоторых положительных чисел C_h, D_h*

$$h(x) \geq C_h ||x||^\nu - D_h, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\xi_0(x)$ — точка, в которой достигается точная верхняя грань в $\mathbb{R}^n$ функции

$$u_x(\xi) = < x, \xi > -h(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда при некотором $K_h > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$||\xi_0(x)|| \leqslant K_h ||x||^{\frac{1}{\nu-1}} + K_h.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ произвольно. Пользуясь условием на h, имеем

$$u_x(\xi) \leq \|x\| \cdot \|\xi\| - C_h \|\xi\|^\nu + D_h.$$

Так как $\sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} u_x(\xi) \geq -h(0)$, то $\sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} u_x(\xi)$ достигается на множестве

$$G_x = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| \cdot \|x\| \geq C_h \|\xi\|^\nu - D_h - h(0)\}.$$

Положим $L_h = D_h + h(0)$. Из условия на h следует, что $L_h \geq 0$. Пусть для $\lambda \geq 0$ T_λ — множество решений неравенства

$$\lambda x \geq C_h x^\nu - L_h,$$

принадлежащих $\mathbb{R}_+$. Это множество — отрезок вида $[0, x_2]$, где $x_2 < \infty$. Оценим x_2 сверху. Имеем

$$\lambda x_2 = C_h x_2^\nu - L_h.$$

Предположим, что $x_2 \geq 1$. Тогда

$$\lambda = C_h x_2^{\nu-1} - \frac{L_h}{x_2} \geq C_h x_2^{\nu-1} - L_h.$$

Отсюда

$$x_2 \leqslant \left(\frac{\lambda + L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}.$$

С учётом случая $x_2 < 1$, имеем

$$x_2 \leqslant \left(\frac{\lambda + L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1.$$

Отсюда, если $0 \leq \lambda \leq 1$, то

$$x_2 \leqslant \left(\frac{1 + L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1.$$

Если $\lambda > 1$, то

$$x_2 \leqslant \lambda^{\frac{1}{\nu-1}} \left(\frac{1 + L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1.$$

Положим $K_h = \left(\frac{1+L_h}{C_h}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1$. Тогда

$$x_2 \leqslant K_h (1 + \lambda^{\frac{1}{\nu-1}}).$$

Правую часть последнего неравенства обозначим через d_λ. Итак, $T_\lambda \subseteq [0; d_\lambda]$. Поскольку $\xi \in G_x \Leftrightarrow ||\zeta|| \in T_{||x||}$, то $\forall \xi \in G_x$ имеем

$$||\xi|| \leqslant K_h \cdot ||x||^{\frac{1}{\nu-1}} + K_h.$$

В частности,

$$||\xi_0(x)|| \leqslant K_h ||x||^{\frac{1}{\nu-1}} + K_h.$$

Лемма 2 доказана.

Для преобразования Фурье обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ используем символ $\mathcal{F}[f]$. $\mathcal{F}[f]$ — это функционал из $S'(\mathbb{R}^n)$, определяемый формулой

$$(\mathcal{F}[f], g) = (f, \mathcal{F}[g]), \ g \in S(\mathbb{R}^n),$$

где $\mathcal{F}[g]$ — преобразование Фурье функции g:

$$\mathcal{F}[g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} \, d\xi.$$

Определение [11], [12]. Спектральной функцией функции $f \in H(\mathbb{C}^n)$ называется обобщенная функция $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, обладающая свойствами:

1). $g(\xi)e^{-\langle y, \xi \rangle} \in S'(\mathbb{R}^n)$ при всех $y \in \mathbb{R}^n$;

2). $f(z) = \mathcal{F}[g(\xi)e^{-\langle y, \xi \rangle}](x)$ при всех $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$.

Следующий результат был получен в работе [8].

Теорема A. *Пусть ϕ — положительная выпуклая в $\mathbb{R}^n$ функция такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует $y = y(x) \in \mathbb{R}^n$, что*

$$\phi(x) = \langle y, x \rangle - \widetilde{\phi}(y),$$

и, кроме того, для некоторых постоянных $A > 0, B > 0, \beta > 0$,

$$\|y(x)\| \le A\|x\|^\beta + B, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $f(z)$ — целая в $\mathbb{C}^n$ функция, удовлетворяющая оценке

$$|f(z)| \le C(1 + \|z\|)^k e^{\widetilde{\phi}(y)},$$

где $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}^n, C > 0, k \ge 0$.

Тогда ее спектральная функция $g(\xi)$ представляется в виде суммы конечного числа обобщенных производных от непрерывных функций $g_\alpha(\xi)$, удовлетворяющих при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и некоторых $l_\alpha \in \mathbb{N}, c_\alpha > 0$ оценке:

$$|g_\alpha(\xi)| \le c_\alpha (1 + \|\xi\|)^{l_\alpha} e^{-\phi(\xi)}.$$

Теорема A является обобщением теоремы Г.И. Эскина [13] (см. также [11], [12]), в которой $\phi(x) = \|x\|^p, \ p > 1$.

Заметим ещё, что топология пространства $\mathcal{E}^*(\varphi)$ может быть описана следующим образом. Пусть $V_m = \{f \in \mathcal{E}(\varphi) : p_m(f) \le 1\}, \ m \in \mathbb{N}$. Пусть

$$V_m^0 = \{F \in \mathcal{E}'(\varphi) : |F(f)| \le 1, \quad \forall f \in V_m\}$$

— поляра в $\mathcal{E}'(\varphi)$ окрестности V_m. Образуем векторное подпространство $Q_m = \cup_{\alpha > 0} (\alpha V_m^0)$ в $\mathcal{E}'(\varphi)$, порождённое полярой V_m^0. Наделим Q_m топологией, введя норму

$$q_m(F) = \sup_{f \in V_m} |F(f)|, \ F \in Q_m.$$

Очевидно, $\mathcal{E}'(\varphi) = \cup_{m=1}^\infty Q_m$. Определим в $\mathcal{E}'(\varphi)$ топологию λ внутреннего индуктивного предела пространств Q_m. Поскольку $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство (M^*), то $\mathcal{E}(\varphi)$ — монтелевское [2, Предложение 7], а значит, и рефлексивное пространство. Поэтому $\mathcal{E}(\varphi)$ относится к классу так называемых правильных пространств [14, стр. 699]. Следовательно, сильная топология в $\mathcal{E}'(\varphi)$ совпадает с топологией λ.

Доказательство теоремы 2. Если $S \in \mathcal{E}'(\varphi)$, то найдутся числа $c > 0, m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|S(f)| \le cp_m(f)\ ,\ f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Следовательно,

$$|\hat{S}(z)| \le c(1 + \|z\|)^m \exp(\widetilde{\varphi}_m(Im\ z)),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Таким образом, линейное отображение $\mathcal{A}$, сопоставляющее всякому функционалу $S \in \mathcal{E}^*(\varphi)$ целую функцию $\hat{S}$, действует из $\mathcal{E}^*(\varphi)$ в $P(\widetilde{\varphi})$.

Отображение $\mathcal{A}$ непрерывно. Пусть $S \in Q_m,\ \ m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|S(f)| \le q_m(S)p_m(f),\ \forall f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Следовательно, для $S \in Q_m$

$$|\hat{S}(z)| \le q_m(S)(1 + \|z\|)^m e^{\widetilde{\varphi}_m(Im\ z)},\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Таким образом, $\|\hat{S}\|_m \leqslant q_m(S)$. Отсюда следует непрерывность $\mathcal{A}$.

В силу теоремы 1 и формулы (1) при $z = 0$ отображение $\mathcal{A}$ инъективно.

Отображение $\mathcal{A}$ сюръективно. Действительно, пусть целая функция U при некоторых $m \in \mathbb{N}, c > 0$ удовлетворяет в $\mathbb{C}^n$ неравенству

$$|U(z)| \le c(1 + \|z\|)^m \exp(\widetilde{\varphi}_m(Im\ z)).$$

Действуем, как в [8]. По теореме A для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ функция $U(x + iy)$, рассматриваемая как элемент из $S'(\mathbb{R}^n)$, есть преобразование Фурье обобщенной функции медленного роста $g_y(\xi) = g(\xi)e^{-\langle y,\xi\rangle}$, где для обобщенной функции $g(\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеет место представление в виде суммы конечного числа дифференциальных операторов конечного порядка от непрерывных функций $g_\alpha(\xi)$:

$$g(\xi) = \sum_\alpha D^\alpha g_\alpha(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n),$$

причем функции $g_\alpha(\xi)$ удовлетворяют при некоторых $l_\alpha \in \mathbb{N}, c_\alpha > 0$ оценке

$$|g_\alpha(\xi)| \le c_\alpha(1 + \|\xi\|)^{l_\alpha} e^{-\varphi_m(\xi)},\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определим функционал T на $\mathcal{E}(\varphi)$ по формуле

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_\alpha g_\alpha(\xi)((-D)^\alpha f)(\xi)\ d\xi\ ,\ f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Очевидно, $T \in \mathcal{E}'(\varphi)$.

Заметим, что для любой функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(x)f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_\alpha g_\alpha(\xi)((-D)^\alpha e^{i\langle x,\xi\rangle})\ d\xi \right) f(x)\ dx.$$

Отсюда вытекает, что $\hat{T}(x) = U(x),\ x \in \mathbb{R}^n$. По теореме единственности $\hat{T}(z) = U(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Итак, $\mathcal{A}$ — линейное непрерывное взаимно однозначное отображение пространства $\mathcal{E}^*(\varphi)$ на $P(\widetilde{\varphi})$. По теореме об открытом отображении [14] отображение $\mathcal{A}^{-1}$ непрерывно. Следовательно, отображение $\mathcal{A}$ осуществляет топологический изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*(\varphi)$ и $P(\widetilde{\varphi})$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жаринов В.В. *Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS* // УМН. 1979. Т. 34, вып. 4(208). С. 97–131.
2. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // сб. пер. Математика. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–77.
3. L. Hörmander *La transformation de Legendre et la théorème de Paley-Wiener* // Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences. 1955. V. 240. P. 392–395.
4. L. Ehrenpreis *Fourier analysis in several complex variables.* New York: Wiley-Interscience publishers. 1970.
5. B.A. Taylor *Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions* // Communications on pure and applied mathematics. 1971. V. 24. № 1. P. 39–51.
6. Мусин И.Х. *О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций* // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 57–86.
7. Мусин И.Х. *О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$* // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 83–108.
8. Попенов С.В. *Об одном весовом пространстве целых функций* // Исследования по теории аппроксимации функций. Уфа. БФАН СССР. 1986. С. 89–96.
9. Напалков В.В., Попенов С.В. *О преобразовании Лапласа на весовом пространстве Бергмана целых функций в $\mathbb{C}^n$* // Доклады РАН. 1997. Т. 352(5). С. 595–597.
10. Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p*. М.: Мир. 1984.
11. Владимиров В.С. *Функции, голоморфные в трубчатых конусах* // Известия АН СССР. 1963. Т. 27, №1. С. 75–100.
12. Владимиров В.С. *Методы теории функций многих комплексных переменных.* М.: Наука. 1964.
13. Эскин Г.И. *Обобщение теоремы Палея-Винера-Шварца* // УМН. 1961. Т. 16, вып. 1. С. 185–188.
14. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1972.

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `musin@matem.anrb.ru`

Сергей Викторович Попёнов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `popenov@matem.anrb.ru`