ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 15-28.

УДК 519.248

ТЕСТ: РАСТЕТ ЛИ ИНТЕНСИВНОСТЬ ПОТОКА ЗАЯВОК В СМО?

$\boxed{\text{Н.К. БАКИРОВ}}$, М.В. СНАЧЕВ

Аннотация. Рассматривается математическая модель функционирования СМО, когда в пуассоновские моменты времени поступают заявки от клиентов на обслуживание. В приложениях (например, в банковском деле или страховании) может быть актуален следующий вопрос: растет или не растет на данном промежутке времени скорость поступления заявок от клиентов. В работе предлагаются тесты для проверки соответствующей статистической гипотезы и изучаются их асимптотические свойства.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, пуассоновский поток, интенсивность потока заявок, критерий отношения правдоподобия, метод наименьших квадратов, гипотеза об однородности пуассоновского потока.

1. Введение

При анализе работы систем массового обслуживания (СМО) может возникнуть следующий вопрос: растет ли на данном промежутке времени скорость поступления заявок от клиентов. В настоящей работе предлагаются тесты для проверки соответствующей статистической гипотезы и изучаются их свойства.

Математическая модель. Рассматривается вероятностная модель функционирования СМО, когда заявки от клиентов поступают в пуассоновские моменты времени, при этом соответствующий пуассоновский процесс $\eta(t), t \in [0, \infty]$ предполагается, вообще говоря, неоднородным с параметром $\lambda(t)$, являющимся выпуклой функцией, то есть скорость поступления заявок не убывает во времени.

В частном случае мы будем предполагать, что

$$\lambda(t) = \int_0^t (A + Bs)ds = At + \frac{Bt^2}{2}, \quad A > 0. \tag{1}$$

Другими словами, на промежутке времени $[0, t]$ в СМО поступает $\eta(t)$ заявок, при этом, в случае, когда $\lambda(t) = A, B = 0$, процесс поступления заявок равномерен во времени: в среднем в единицу времени поступает A заявок, и рассматриваемый пуассоновский процесс $\eta(t)$ однороден. Если же в формуле (1) $B > 0$, то тогда среднее число заявок, поступивших в СМО на интервале времени $[0, t]$, растет с темпом

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = A + Bt,$$

то есть скорость роста количества поступающих заявок не постоянна, а пуассоновский процесс $\eta(t)$ — неоднороден. При этом вероятностный смысл параметра B раскрывается равенством:

$$B = [\lambda(T + 1) - \lambda(T)] - [\lambda(T) - \lambda(T - 1)], \qquad \forall T,$$

N.K. Bakirov, M.V. Snachev, The test: does the input flow intensity grow in queueing system?

Поступила 1 марта 2010 г.

иными словами, величина B равна приросту среднего числа заявок на соседних единичных интервалах времени. Если единица измерения времени равна одному дню, то тогда в рассматриваемой математической модели каждый новый день в СМО поступает на B заявок больше, чем в предыдущий день.

Исходные данные. На интервале времени $[0, T]$ фиксируются все моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$ поступления в СМО заявок от клиентов, тем самым фиксируется соответствующая траектория (реализация) пуассоновского процесса $\eta(t), t \in [0, T]$, при этом, очевидно,

$$\eta(t_k) = k, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Отметим, что величина n — количество точек t_k на отрезке времени $[0, T]$ случайно и равно $\eta(T)$. Начало периода наблюдения мы отождествляем с моментом времени $t = 0$.

Задача. По исходным данным требуется проверить нулевую гипотезу H_0 об однородности пуассоновского процесса $\eta(t), t > 0$ против альтернатив: H_{01} — о том, что скорость поступления заявок в СМО растет во времени, точнее, производная $\lambda'(t)$ не убывает с ростом t и в модели (1) — $H_{11} : B > 0$ — о том, что рассматриваемое среднее количество заявок за единичный интервал времени растет во времени с ненулевой постоянной скоростью. Отметим, что альтернативу, в соответствии с которой интенсивность поступления заявок в СМО убывает во времени, формально можно свести к случаю возрастания интенсивности, рассматривая на интервале времени $[0, T]$ процесс с обратным временем: $\eta(T) - \eta(t)$.

Задачи проверки параметрических и непараметрических гипотез для пуассоновских и других точечных процессов рассматривались в работах И.А.Ибрагимова, Р.З.Хасьминского, Р.Ш.Липцера, А.Н.Ширяева, Ю.А.Кутоянца, Ю.Н.Линькова и др., [1]–[5].

2. Критерий отношения правдоподобия

В данном параграфе определяется алгоритм вычисления статистики критерия отношения правдоподобия в случае альтернатив H_{01}, который, однако, оказывается достаточно сложным для анализа его асимптотических свойств. Мы приводим близкий к нему по своей конструкции критерий проверки H_0, для которого определяется асимптотическая значимость и доказывается состоятельность против специальных альтернатив.

Распределение рассматриваемого пуасоновского процесса абсолютно непрерывно относительно распределения стандартного пуассоновского процесса с $\lambda(t) = \lambda_0(t) = t$, соответствующая плотность Радона-Никодима равна, [1], [2], стр.168:

$$\pi(\lambda) = e^{\lambda_0(T) - \lambda(T) + \int_0^T \ln \frac{\mu(t)}{\mu_0(t)} d\eta(t)}, \qquad \mu(t) = \lambda'(t), \qquad \mu_0(t) = \lambda_0'(t).$$

Критерий отношения правдоподобия базируется на статистике

$$T_n = \ln \frac{\sup_{\lambda \in H_{01}} \pi(\lambda)}{\sup_{\lambda \in H_0} \pi(\lambda)} = T_{n,1} - T_{n,0},$$

где

$$T_{n,0} = \sup_{\lambda \in H_0} \left(-\lambda(T) + \int_0^T \ln \mu(t) d\eta(t) \right) = \sup_{A > 0} \left(-AT + \int_0^T \ln A d\eta(t) \right) =$$

$$= \eta(T) \ln \frac{\eta(T)}{T} - \eta(T) = n \ln \frac{n}{T} - n,$$

и для $t_{n+1} = T, t_0 = 0, \Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, учитывая монотонное неубывание $\mu(t)$, мы можем записать

$$T_{n,1} = \sup_{\lambda \in H_{01}} \left(-\lambda(T) + \int_0^T \ln \mu(t) d\eta(t) \right) = \sup_{\lambda \in H_{01}} \left(-\lambda(T) + \sum_{k=1}^{n} \ln \mu(t_k) \right) =$$

$$= \sup_{\lambda \in H_{01}} \sum_{k=1}^{n} \left[\ln \mu(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(t) dt \right] = \sup_{\lambda \in H_{01}} \sum_{k=1}^{n} \left[\ln \mu(t_k) - (t_{k+1} - t_k)\mu(t_k) \right] =$$

$$= \sup_{0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n} \sum_{k=1}^{n} \left[\ln a_k - \Delta t_k a_k \right],$$

Наша ближайшая цель — указать алгоритм вычисления максимума функции

$$F(a) = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln a_k - \Delta t_k a_k \right], \qquad a = (a_1, a_2, ..., a_n),$$

на множестве

$$a: \quad 0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n. \tag{2}$$

Заметим, что функция $F(a)$ строго вогнута и, стало быть, принимает свое максимальное значение на выпуклом множестве (2) в единственной точке, более того, любой ее локальный максимум на (2) является глобальным. Следующую элементарную лемму мы приводим без доказательства.

Лемма 1. *Функция* $\ln b_1 - \Delta s_1 b_1$ *достигает максимума в точке* $b_1 = 1/\Delta s_1$, *она строго возрастает на* $(0, 1/\Delta s_1]$ *и строго убывает на* $[1/\Delta s_1, \infty)$.

В точке максимума функции $F(a)$ некоторые из чисел a_k могут совпадать, поэтому в этой точке

$$\sup_{0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n} F(a) = \sum_{j=1}^{M} m_j \left[\ln b_j - \Delta t_j^* b_j \right], \tag{3}$$

где

$$\Delta t_j^* = \frac{1}{m_j} \sum_{j_s \in D_j} \Delta_{j_s}, \qquad \sum_{j=1}^{M} m_j = n,$$

и непересекающиеся подмножества D_j состоят из подряд идущих индексов, и каждое следующее множество лежит правее предыдущего, при этом имеют место строгие неравенства

$$b_1 < b_2 < ... < b_M.$$

В силу строгости этих неравенств и леммы 1 имеем, что $b_j = 1/\Delta t_j^*, \forall j$, тем самым, в точке глобального максимума выполнены строгие неравенства

$$1/\Delta t_1^* < 1/\Delta t_2^* < ... < 1/\Delta t_M^*, \tag{4}$$

более того, для каждого слагаемого в экстремальной сумме в (3) должно быть выполнено необходимое условие локального экстремума, которое мы рассмотрим для простоты для первого слагаемого, то есть для $j = 1$. Итак, пусть

$$L(a_1, a_2, ..., a_{m_1}) = \sum_{k=1}^{m_1} \left[\ln a_k - \Delta t_k a_k \right],$$

тогда при $a_1 = a_2 = ... = a_{m_1} = b_1$

$$m_1 [\ln b_1 - \Delta t_1^* b_1] = m_1 L(a_1, a_2, ..., a_{m_1}),$$

а упомянутое необходимое условие экстремума означает следующее:

$$Q = L(b_1 + \delta_1, b_1 + \delta_2, , ..., b_1 + \delta_{m_1}) - L(b_1, b_1, , ..., b_1) \le 0, \qquad \forall \delta_1 \le \delta_2 \le ... \le \delta_{m_1},$$

для достаточно малых δ_j. Для главного члена асимптотики Q при $\delta_j \to 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{m_1} \delta_k \left[\frac{1}{b_1} - \Delta t_k\right] = \sum_{k=1}^{m_1} \delta_k \left[\Delta t_1^* - \Delta t_k\right] = \sum_{k=2}^{m_1} (\delta_k - \delta_{k-1})(m_1 - k + 1)\left[\Delta t_1^* - \Delta t_{1,k}^*\right] \leq 0,$$

где

$$\Delta t_{1,k}^* = \frac{1}{m_1 - k + 1} \sum_{j=k}^{m_1} \Delta t_j, \qquad \Delta t_1^* = \frac{1}{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} \Delta t_j,$$

таким образом, необходимое условие экстремума для первого слагаемого в (3) состоит в выполнении системы неравенств

$$\sum_{j=k}^{m_1} \Delta t_j \geq (m_1 - k + 1)\Delta t_1^*, \qquad \forall k = 2, 3, ..., m_1, \tag{5}$$

при этом, очевидно, вероятность равенств здесь равна нулю.

Наоборот, при наличии такого разбиения множества индексов $\{1, 2, ..., n\} = \cup_{j=1}^{M} D_j$, для которого выполнены соотношения (4) и соотношения, аналогичные (5) для всех элементов этого разбиения, соответствующее значение целевой функции $F(a)$ будет максимально и равно

$$T_{n,1} = \sum_{j=1}^{M} m_j \left[\ln b_j - \Delta t_j^* b_j\right] = \sum_{j=1}^{M} m_j \ln \frac{1}{\Delta t_j^*} - n.$$

и, значит, статистика критерия отношения правдоподобия будет равна

$$T_n = T_{n,1} - T_{n,0} = \sum_{j=1}^{M} m_j \ln \frac{\Delta t^*}{\Delta t_j^*}, \qquad \Delta t^* = \frac{\sum_{k=0}^{n} \Delta t_k}{n} = \frac{T}{n}.$$

Альтернатива H_{01} будет приниматься, если $T_n > R_n$ для некоторого порога R_n, подбираемого так, чтобы асимптотическая значимость критерия равнялась бы заданному числу. Отметим, что асимптотическая значимость данного критерия не зависит от A, то есть он подобный, действительно, предел при $T \to \infty$ можно заменить на предел при $n \to \infty$ и заметить, что при нулевой гипотезе сл.в. $A\Delta t_k, k = 0, 1, 2, ...$ образуют последовательность независимых сл.в. с одинаковым экспоненциальным распределением с параметром 1, см. [6], так что распределение статистики T_n в силу ее конструкции при неслучайном n не зависит от параметра A.

Для построения разбиения $\cup_{j=1}^{M} D_j$ нам потребуется выяснить вопрос: сохраняется ли свойство (5) при объединении двух подмножеств индексов, скажем, D_1 и D_2.

Лемма 2. *Пусть*

$$D_1 = \{1, 2, ..., m_1\}, \qquad D_2 = \{m_1 + 1, m_1 + 2, ..., m_1 + m_2\},$$

и для обоих множеств выполнено условие (5). Если $1/\Delta t_1^* \geq 1/\Delta t_2^*$, то тогда условие (5) выполнено и для объединенного множества $D_1 \cup D_2$.

Доказательство: Обозначим

$$\Delta t^* = \frac{m_1 \Delta t_1^* + m_2 \Delta t_2^*}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \sum_{j=1}^{m_1+m_2} \Delta t_j.$$

Условие (5) выполнено для D_1 и $\Delta t_2^* \geq \Delta t_1^*$, поэтому при $k \leq m_1$

$$\sum_{j=k}^{m_1+m_2} \Delta t_j = \sum_{j=k}^{m_1} \Delta t_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \Delta t_j \geq (m_1 - k + 1)\Delta t_1^* + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \Delta t_j =$$

$$= (m_1 - k + 1)\Delta t_1^* + m_2 \Delta t_2^* \geq (m_1 + m_2 - k + 1)\Delta t^*.$$

И, аналогично, для $m_1 < k \leq m_1 + m_2$

$$\sum_{j=k}^{m_1+m_2} \Delta t_j \geq (m_1 + m_2 - k + 1)\Delta t_2^* \geq (m_1 + m_2 - k + 1)\Delta t^*.$$

Доказанные неравенства означают выполнимость условия (5) для множества $D_1 \cup D_2$.

Лемма доказана.

Алгоритм построения разбиения $\cup_{j=1}^{M} D_j$. В соответствии с алгоритмом сначала строятся некоторые подмножества D'_k, а затем и множества D_k путем последовательного объединения некоторых из подмножеств D'_k.

Шаг 1. Построим сначала D'_1. Включим в D'_1 индекс $j = 1$ и затем последовательно будем включать следующие по величине индексы пока выполняется система неравенств (5). Формирование D'_1 прекращается, когда добавление к D'_1 следующего по величине индекса ведет к нарушению системы неравенств (5). Аналогично и последовательно формируются подмножества индексов $D'_2, D'_3, ..., D'_M$.

Шаг 2. Построенное разбиение укрупняется путем объединения некоторых D'_j. Если система строгих неравенств (4) выполняется, то построенное на первом шаге разбиение и есть искомое, в противном случае, если для некоторого индекса j имеем $1/\Delta t_j^* \geq 1/\Delta t_{j+1}^*$, тогда мы объединяем D'_j и D'_{j+1}, что в силу леммы 2 сохранит для нового разбиения выполнимость свойства (5). После серии таких объединений добиваемся выполнения (4).

Анализ асимптотических свойств статистики критерия отношения правдоподобия в случае альтернатив H_{01} достаточно сложен, мы предполагаем провести его в отдельной публикации.

Рассмотрим следующий упрощенный критерий. Ввиду вогнутости логарифмической функции и неравенства Йенсена

$$T_n \leq T'_n = \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{\Delta t^*}{\Delta t_j},$$

причем в случае справедливости нулевой гипотезы с $A = 1$ при $n \to \infty$ по закону больших чисел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} T'_n = \lim_{n\to\infty} \left(\ln \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k \right) = \ln E\xi_1 - E \ln \xi_1 =$$

$$= - \int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = C = 0,577..., \tag{6}$$

здесь $\xi_k = \Delta t_k, k = 1, 2, ...$ последовательность независимых сл.в., имеющих показательное распределение с единичным математическим ожиданием, C — постоянная Эйлера, см. [7], стр.587. Кроме того, при справедливости нулевой гипотезы с $A = 1$ при $n \to \infty$ по центральной предельной теореме имеет место слабая сходимость

$$\frac{T'_n - Cn}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Longrightarrow}} N(0, \sigma^2),$$

где

$$\sigma^2 = E(\xi_1 - 1 - \ln \xi_1)^2 = \int_0^\infty (x - 1 - \ln x)^2 e^{-x} \, dx = \frac{\pi^2}{6} + C^2 - 1 = 0.978...,$$

см. [7], стр. 588. Тем самым, критерий, отвергающий H_0 при

$$T'_n > R'_n = Cn + \sqrt{n}\sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha), \tag{7}$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной гауссовской величины, имеет асимптотический уровень значимости $\alpha, \forall \alpha \in (0, 1)$.

Рассмотрим асимптотическое поведение данного критерия при альтернативах. Пусть $F_T(x) = \lambda(xT)/\lambda(T), x \in [0,1]$ и $F_T^{-1}(x)$ — обратная функция, в частности, при $\lambda(T) = AT$ (т.е. когда пуассоновский процесс однороден) имеем $F_T(x) = x$. Рассмотрим последовательность альтернатив

$$H_1^\alpha : \lim_{T\to\infty} F_T(x) = x^{\alpha+1}, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{dF_T^{-1}(x)}{dx} = \frac{x^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0,$$

равномерно по x (тем самым, в частности, функция интенсивности $\lambda(t)$ является правильно меняющейся функцией и сверхлинейно возрастает).

Нетрудно видеть, что распределение случайного вектора $(t_1/T, t_2/T, ..., t_n/T)$ при условии $\{\eta(T) = n\}$ совпадает с распределением набора порядковых статистик, построенных по выборке независимых сл.в. с общей ф.р. $F_T(x)$, в частности при $\lambda(T) = AT$ получаем набор порядковых статистик для равномерного распределения на $[0,1]$. Следовательно, мы можем записать, что $t_k = TF_T^{-1}(u_k)$, где u_k — порядковые статистики для равномерного распределения и по теореме о среднем

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = T(u_{k+1} - u_k)\psi_k, \quad \psi_k = \frac{d}{dx}\left[F^{-1}(u_k^*)\right], \qquad u_k^* \in [u_k, u_{k+1}].$$

Запишем с учетом сделанных замечаний

$$\frac{1}{n}T_n' = \ln \Delta^* - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln \Delta t_k = \ln\frac{T}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln[T(u_{k+1} - u_k)\psi_k] =$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln[n(u_{k+1} - u_k)] - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\psi_k,$$

здесь при $n \to \infty$ сумма первое слагаемое стремится к C — константе Эйлера, поскольку набор сл.в. $\{n(u_{k+1} - u_k)\}_{k=1}^n$ распределен так же, как и набор $\{\xi_k/S_n^*\}_{k=1}^n$, где ξ_k — суть независимые показательные сл.в. с единичным математическим ожиданием, $S_n^* = (\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n)/n$, см. [8], тем самым мы можем получить требуемый предел, используя (6). Нижний предел по вероятности второго слагаемого по закону больших чисел не меньше, чем

$$E\ln\left[(\alpha+1)U^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right] = \ln(\alpha+1) + \frac{\alpha}{\alpha+1}\int_0^1 \ln x\, dx =$$

$$= \ln(\alpha+1) - \frac{\alpha}{\alpha+1} > 0, \qquad \forall\alpha > 0,$$

где сл.в. U равномерно распределена на $[0,1]$. Следовательно,

$$\frac{T_n' - Cn}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \infty$$

и, стало быть, критерий (7) состоятелен против альтернатив H_1^α.

3. Конструкция критерия в модели (1)

В модели (1) мы рассматриваем два критерия, базирующихся соответственно на оценке параметра B, близкой к оценке наибольшего правдоподобия, и на оценке по методу наименьших квадратов (МНК). Эти оценки наглядны, несмещены и сохраняют хорошие свойства при отклонениях от модели (1), см. п.4 . Оценки наибольшего правдоподобия в модели (1) асимптотически эффективны при $T \to \infty$, но могут быть смещены. Нас, однако, интересует и случай конечных T, когда мы хотим распознать возрастание интенсивности пуассоновского процесса как можно раньше.

Если в модели (1) известно, что $A = 0$, то тогда оценка наибольшего правдоподобия $\hat{B} = 2\eta(T)/T^2$ несмещена и имеет наименьшую дисперсию в классе несмещенных оценок параметра B, [2], стр. 174. Однако, нам интересен случай, когда $A > 0$, а B мало, то есть мы хотим заметить малое возрастание B от нуля.

Учитывая вид функции правдоподобия $\pi(\lambda)$, запишем уравнения для оценок A^*, B^* наибольшего правдоподобия:

$$\int_0^T \frac{d\eta(t)}{A+Bt} = T, \qquad \int_0^T \frac{td\eta(t)}{A+Bt} = \frac{T^2}{2},$$

справедливые, если максимум $\pi(\lambda)$ достигается при $A^*B^* \neq 0$. Из этих уравнений сразу вытекает линейное соотношение $A^*T + B^*T^2/2 = \eta(T)$. Выражая отсюда A^* и подставляя получающуюся формулу во второе уравнение, получаем при малых B

$$\frac{T^2}{2} = \int_0^T \frac{td\eta(t)}{A+Bt} = \int_0^T \frac{td\eta(t)}{\frac{\eta(T)}{T} + B\left(t - \frac{T}{2}\right)} \approx$$

$$\approx \frac{T}{\eta(T)} \int_0^T td\eta(t) - \frac{BT^2}{\eta^2(T)} \int_0^T t\left(t - \frac{T}{2}\right) d\eta(t),$$

откуда получаем приближенную формулу

$$B^* \approx \frac{\int_0^T \left(t - \frac{T}{2}\right) d\eta(t)}{\frac{T}{\eta(T)} \int_0^T t\left(t - \frac{T}{2}\right) d\eta(t)}.$$

Взяв здесь только числитель, который при $A = 0$ имеет нулевое математическое ожидание, сформируем несмещенную оценку

$$\overline{B} = \frac{12}{T^3} \int_0^T \left(t - \frac{T}{2}\right) d\eta(t),$$

которая, как нетрудно подсчитать, имеет дисперсию асимптотически (при $T \to \infty$) втрое больше нижней границы дисперсий Рао-Крамера, [2], стр. 174. Известно, что оценка B^* состоятельна, асимптотически нормальна и эффективна, однако она смещена, [5].

Теорема 1. *1) При справедливости нулевой гипотезы H_0 имеет место сходимость по распределению:*

$$\frac{T^{3/2}\overline{B}}{\sqrt{A}} \xrightarrow[T\to\infty]{D} \gamma_0 N(0,1), \tag{8}$$

где $\gamma_0 = \sqrt{12} = 3.464...$, $N(0,1)$ — стандартная гауссовская случайная величина.

2) при справедливости альтернативы H_{11}

$$\overline{B} \xrightarrow[T\to\infty]{P} B.$$

Доказательство теоремы 1 дается ниже в Приложении.

Для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_{11} теперь мы можем использовать критерий, отвергающий H_0, если

$$\frac{T^2\overline{B}}{\sqrt{\eta(T)}} \geq \gamma_0 \lambda_\varepsilon,$$

где λ_ε — квантиль уровня ε для стандартного гауссовского распределения. Данный критерий при $T \to \infty$ имеет асимптотический уровень значимости, равный ε, он состоятелен против альтернативы H_{11} в силу теоремы 1. Критерий получен заменой в (8) параметра A на его состоятельную оценку $\eta(T)/T$, здесь также учтено, что при нулевой гипотезе

$\eta(T)/(AT) \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1$ и при альтернативе $\eta(T)/T^2 \xrightarrow[T\to\infty]{P} B/2$, см. формулы (11),(15) Приложения. В случае принятия альтернативы заключаем, что в среднем в СМО каждую новую единицу времени поступает на $\overline{B}$ заявок больше.

Рассмотрим теперь критерий проверки H_0, базирующийся на МНК оценке параметра B, соответствующей приближению траектории пуассоновского процесса $\eta(t)$ параболой. Точнее, оценим параметры A, B исходя из минимизации суммы квадратов отклонений

$$J = \sum_{k=1}^{n}\left(\eta(t_k) - At_k - \frac{Bt_k^2}{2}\right)^2.$$

Обозначим

$$\overline{\eta(t)t^p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta(t_k)t_k^p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kt_k^p, \quad \overline{t^p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}t_k^p, \quad p = 1,2,3,...$$

Решая систему нормальных уравнений: $\partial J/\partial A = 0, \partial J/\partial B = 0$, или эквивалентно

$$A\overline{t^2} + \frac{B}{2}\cdot\overline{t^3} = \overline{\eta(t)t}, \quad A\overline{t^3} + \frac{B}{2}\cdot\overline{t^4} = \overline{\eta(t)t^2},$$

получаем МНК-оценку параметра B:

$$\widehat{B} = 2\,\frac{\overline{t^2}\cdot\overline{\eta(t)t^2} - \overline{t^3}\cdot\overline{\eta(t)t}}{\overline{t^2}\cdot\overline{t^4} - \overline{t^3}\cdot\overline{t^3}}. \tag{9}$$

Отметим, что знаменатель в (9) положителен с вероятностью 1 ввиду неравенства Коши-Буняковского:

$$|E\xi^3| = |E\xi\cdot\xi^2| \le \sqrt{E\xi^2 E\xi^4},$$

где ξ — дискретная случайная величина с равновероятными значениями $t_k, k = 1,2,..,n$. При этом равенство здесь может достигаться только, если сл.в. ξ пропорциональна ξ^2 с вероятностью 1, то есть, если сл.в. ξ — константа п.н.. В рассматриваемом случае все моменты времени t_k различны, так что ξ — не константа и, стало быть, в (9) знаменатель отличен от нуля с вероятностью 1.

Асимптотические при $T\to\infty$ свойства оценки $\widehat{B}$ приведены в следующей теореме.

Теорема 2. *1) При справедливости нулевой гипотезы H_0 имеет место сходимость по распределению:*

$$\frac{T^{3/2}\widehat{B}}{\sqrt{A}} \xrightarrow[T\to\infty]{D} \gamma_1 N(0,1),$$

где $\gamma_1 = \sqrt{128,254} = 11,324...$,

2) при справедливости альтернативы H_{11}

$$\widehat{B} \xrightarrow[T\to\infty]{P} B.$$

Доказательство теоремы 2 дается ниже в Приложении.

Рассуждая далее как и после теоремы 1, мы можем рассмотреть критерий, отвергающий H_0, при

$$\frac{T^2\widehat{B}}{\sqrt{\eta(T)}} \ge \gamma_1\lambda_\varepsilon. \tag{10}$$

Этот критерий при $T\to\infty$ состоятелен против альтернатив H_{11} в силу теоремы 2 и имеет асимптотический уровень значимости ε. Критерий получен заменой в 1) параметра A на его состоятельную оценку $\eta(T)/T$. В случае принятия альтернативы заключаем, что в среднем в СМО каждую новую единицу времени поступает на $\widehat{B}$ заявок больше. Отметим, что в случае справедливости H_0 распределение статистики критерия зависит от параметров T, A через единственный параметр AT ввиду того, что при нулевой гипотезе A — масштабный параметр для распределения сл.в. t_k.

4. Обобщение

Критерий (10) применим для проверки более общих гипотез. Предположим, что интенсивность потока заявок имеет вид

$$B(t) \overset{def}{=} \frac{d\lambda(t)}{dt} = A + t^{\alpha}L(t),$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ — действительное число. Напомним, что функция $L(x), x \in (0, \infty)$ называется медленно меняющейся по Карамата (ММФ), если она положительна, измерима и

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1, \qquad \forall \lambda > 0.$$

Рассмотрим сложную альтернативу

$$H_1^L : B(t) = A + t^{\alpha}L(t), \alpha > 0$$

и сложную гипотезу

$$H_0^L : B(t) = A \pm t^{\alpha}L(t), \alpha < 0, B(t) > 0, \forall t, \qquad \text{либо} \qquad B(t) = A, \forall t,$$

где в обоих случаях $L(t)$ — ММФ и константа $A > 0$.

Ясно, что при $t \to \infty$ в случае справедливости альтернативы параметр $\lambda(t)$ растет по t быстрее, чем линейно, а при справедливости нулевой гипотезы — линейно или почти линейно.

Теорема 3. *1) При справедливости альтернативы* H_1^L

$$\frac{T^2 \widehat{B}}{\sqrt{\eta(T)}} \xrightarrow[T \to \infty]{P} \infty,$$

2) при справедливости нулевой гипотезы H_0^L *имеет место сходимость по распределению:*

$$\frac{T^2 \widehat{B}}{\sqrt{\eta(T)}} \xrightarrow[T \to \infty]{D} \gamma_1 N(0,1).$$

Следствие. При $T \to \infty$ критерий (10) состоятелен и имеет асимптотический уровень значимости равный ε.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2: Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *1) При справедливости нулевой гипотезы* H_0 *для натуральных* p *имеет место сходимость по вероятности:*

$$\frac{\overline{t^p}}{T^p} \xrightarrow[T \to \infty]{P} \frac{1}{p+1}, \qquad \frac{\overline{\eta(t)t^p}}{T^{p+1}} \xrightarrow[T \to \infty]{P} \frac{A}{p+2}.$$

2) При справедливости альтернативы H_1

$$\frac{\overline{t^p}}{T^p} \xrightarrow[T \to \infty]{P} \frac{2}{p+2}, \qquad \frac{\overline{\eta(t)t^p}}{T^{p+2}} \xrightarrow[T \to \infty]{P} \frac{B}{p+4}.$$

Доказательство: 1) Хорошо известно [6], что для однородного пуассоновского процесса $E\eta(t) = \lambda(t) = At, D\eta(t) = E\eta(t) = At$, поэтому

$$\frac{\eta(T)}{\lambda(T)} = \frac{\eta(T)}{AT} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1. \tag{11}$$

С другой стороны, центрированный случайный процесс $\eta^*(t) = \eta(t) - \lambda(t)$ имеет ортогональные приращения и нулевое среднее [6]. Обозначим

$$\psi \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} t_k^p = \int_0^T t^p d\eta(t) = \int_0^T t^p d\eta^*(t) + \int_0^T t^p d\lambda(t) = \int_0^T t^p d\eta^*(t) + \frac{AT^{p+1}}{p+1}.$$

Ввиду сказанного выше

$$E\psi = \frac{AT^{p+1}}{p+1}, \quad D\psi = \int_0^T t^{2p} dD\eta^*(t) = \frac{AT^{2p+1}}{2p+1}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\frac{\psi}{E\psi} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1,$$

и, значит,

$$\frac{\overline{t^p}}{T^p} = \frac{1}{T^p\eta(T)} \int_0^T t^p d\eta(t) = \frac{\psi}{T^p\eta(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{1}{p+1}.$$

Второе соотношение в 1) рассматриваем аналогично, обозначим

$$\psi_1 \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \eta(k_k) t_k^p = \int_0^T \eta(t) t^p d\eta(t) =$$

$$= \int_0^T \eta(t) t^p d\eta^*(t) + \int_0^T \eta^*(t) t^p d\lambda(t) + \int_0^T \lambda(t) t^p d\lambda(t), \tag{12}$$

и, стало быть,

$$E\psi_1 = \int_0^T \lambda(t) t^p d\lambda(t) = A^2 \int_0^T t^{p+1} dt = \frac{A^2 T^{p+2}}{p+2}. \tag{13}$$

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\psi_2 \stackrel{def}{=} \psi_1 - E\psi_1 = \int_0^T \eta(t) t^p d\eta^*(t) + \int_0^T \eta^*(t) t^p d\lambda(t) = \int_0^T \eta(t) t^p d\eta^*(t) + \frac{AT^{p+1}\eta^*(T)}{p+1} -$$

$$- \frac{A}{p+1} \int_0^T t^{p+1} d\eta^*(t) = \int_0^T \left[\eta(t) - \frac{At}{p+1}\right] t^p d\eta^*(t) + \frac{AT^{p+1}\eta^*(T)}{p+1},$$

поэтому $E\psi_2 = 0$ и

$$D\psi_2 = \int_0^T E\left[\eta(t) - \frac{At}{p+1}\right]^2 t^{2p} d\lambda(t) + \frac{A^2 T^{2p+2}\lambda(T)}{(p+1)^2} \le CT^{2p+3}, \tag{14}$$

где C — константа, что позволяет, учитывая (12)-(14), записать, что

$$\frac{\psi_1}{E\psi_1} = \frac{\psi_2}{E\psi_1} + 1 \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1.$$

Итак, учитывая (11), имеем

$$\frac{\overline{\eta(t)t^p}}{T^{p+1}} = \frac{\psi_1}{T^{p+1}\eta(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{A}{p+2},$$

что и требовалось доказать.

При справедливости альтернативы H_{11}, рассуждая аналогично, получаем, что
$$\frac{\eta(T)}{T^2} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{B}{2}. \tag{15}$$

Далее
$$E\psi = \int_0^T t^p d\lambda(t) = \frac{AT^{p+1}}{p+1} + \frac{BT^{p+2}}{p+2},$$
$$D\psi = \int_0^T t^{2p} dD\eta^*(t) = \frac{AT^{2p+1}}{2p+1} + \frac{BT^{2p+2}}{2p+2},$$
и, значит,
$$\frac{\psi}{E\psi} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1, \tag{16}$$
из (15)–(16)следует первое соотношение в 2). Докажем второе соотношение в 2). Действуя так же как и ранее, получаем при $T \to \infty$
$$E\psi_1 = \int_0^T \lambda(t) t^p d\lambda(t) = \frac{B^2 T^{p+4}(1+o(1))}{2(p+4)}$$
и
$$D\psi_1 \le CT^{2p+4}.$$
где C — константа, и, значит,
$$\frac{\overline{\eta(t)t^p}}{T^{p+2}} = \frac{\psi_1}{T^{p+2}\eta(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{B}{p+4}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 базируется на применении функциональной центральной предельной теоремы, точнее, ее частного случая [9]:
$$W_T(s) \stackrel{def}{=} \frac{\eta(Ts) - E\eta(Ts)}{\sqrt{AT}} \xrightarrow[T\to\infty]{D} W(s),$$
где $W(s)$ — стандартный винеровский процесс, а слабая сходимость имеет место в пространстве функций без разрывов второго рода непрерывных справа и имеющих левосторонний предел с метрикой Скорохода.

Рассмотрим сначала асимптотику случайной величины ψ при справедливости нулевой гипотезы. Интегрируя по частям и делая замену переменных, запишем
$$\frac{\psi - E\psi}{T^p\sqrt{AT}} = \frac{1}{T^p\sqrt{AT}} \int_0^T t^p d\eta^*(t) = \frac{\eta^*(T)}{\sqrt{AT}} - \frac{1}{T^p\sqrt{AT}} \int_0^T \eta^*(t) dt^p =$$
$$= W_T(1) - \int_0^1 W_T(s) ds^p \xrightarrow[T\to\infty]{D} W(1) - \int_0^1 W(s) ds^p = \int_0^1 s^p dW(s). \tag{17}$$
Из (17) в частности следует, что
$$\frac{\psi}{T^{p+1}} \xrightarrow[T\to\infty]{P} \frac{A}{p+1}.$$

Аналогично, с тем же самым процессом $W(s)$ имеем
$$\frac{\psi_1 - E\psi_1}{T^{p+1}\sqrt{AT}} = \frac{1}{T^{p+1}\sqrt{AT}} \left(\int_0^T \eta(t) t^p d\eta^*(t) + \int_0^T \eta^*(t) t^p d\lambda(t) \right) =$$
$$= \int_0^1 \left(A + \sqrt{\frac{A}{T}} \cdot W_T(s) \right) s^p dW_T(s) + A \int_0^T W_T(s) s^p ds \xrightarrow[T\to\infty]{D}$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{D} A\int_0^1 s^p dW(s) + A\int_0^T W(s)s^p ds. \tag{18}$$

Таким образом, применяя (17),(18) и лемму 3, окончательно получаем, что при справедливости нулевой гипотезы H_0

$$\frac{T^{3/2}\widehat{B}}{\sqrt{A}} \xrightarrow[T\to\infty]{D} 480\left\{\frac{1}{4}\int_0^1 s^2 dW(s) + \frac{1}{3}\left[\int_0^1 s^2 dW(s) + \int_0^1 s^2 W(s)ds\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{3}\int_0^1 s^3 dW(s) - \frac{1}{4}\left[\int_0^1 s dW(s) + \int_0^1 sW(s)ds\right]\right\} \overset{def}{=} Z. \tag{19}$$

Интегрируя здесь по частям и учитывая, что $W(1) = \int_0^1 dW(s)$, находим, что

$$\int_0^1 sW(s)ds = \int_0^1 W(s)d\,\frac{s^2}{2} = \frac{1}{2}W(1) - \int_0^1 \frac{s^2}{2}\,dW(s) = \int_0^1 \frac{1-s^2}{2}dW(s),$$

$$\int_0^1 s^2 W(s)ds = \int_0^1 W(s)d\,\frac{s^3}{3} = \frac{1}{3}W(1) - \int_0^1 \frac{s^3}{3}\,dW(s) = \int_0^1 \frac{1-s^3}{3}dW(s),$$

поэтому в (19)

$$Z = \int_0^1 f(s)\,dW(s),$$

$$f(s) = 480\left(\frac{17s^2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{s}{4} - \frac{4s^3}{9}\right).$$

Таким образом, ввиду известных свойств интеграла Ито [6]

$$EZ = 0, \qquad \gamma_1^2 = DZ = \int_0^1 f^2(s)\,ds = 128,254.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3: 1) Нам потребуются следующие факты из теории ММФ.

Предложение 1 ([10], с.26). *Пусть ММФ $L(x)$ локально ограничена на $[A,\infty)$ и $\alpha > -1$, тогда*

$$\int_A^T t^\alpha L(t)\,dt = \frac{T^{\alpha+1}L(T)}{\alpha+1}(1+o(1)), \qquad T\to\infty. \tag{20}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что при $\alpha < -1$ интеграл $\int_A^T t^\alpha L(t)\,dt$ сходится к положительному числу.

Предложение 2 ([10], с.16). *1) Пусть $L(x)$ — ММФ и $\beta > 0$, тогда*

$$t^\beta L(t) \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty, \qquad t^{-\beta}L(t) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \tag{21}$$

2) пусть $L_1(t), L_2(t)$ суть ММФ, тогда $L_1(t)L_2(t)$ и $L_1(t)+L_2(t)$ суть также ММФ.

В случае справедливости альтернативы, учитывая свойство ММФ (20), запишем в принятых выше обозначениях: при $T\to\infty$

$$E\psi = \int_0^T t^p\,d\lambda(t) = \frac{AT^{p+1}}{p+1} + \frac{T^{p+\alpha+1}L(T)}{p+\alpha+1}(1+o(1)),$$

$$D\psi = \int_0^T t^{2p}\,d\lambda(t) = \frac{AT^{2p+1}}{2p+1} + \frac{T^{2p+\alpha+1}L(T)}{2p+\alpha+1}(1+o(1)),$$

поэтому в силу (21) $D\psi/(E\psi)^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, следовательно

$$\frac{\psi}{E\psi} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1,$$

и, значит,

$$\psi = \left(\frac{AT^{p+1}}{p+1} + \frac{T^{p+\alpha+1}L(T)}{p+\alpha+1} \right) (1+o(1)) = \frac{T^{p+\alpha+1}L(T)}{p+\alpha+1}(1+o(1)), \tag{22}$$

по вероятности. Далее, в силу (20)

$$\lambda(t) = \int_0^t B(s)\,ds = \int_0^t (A + s^\alpha L(s))\,ds = At + \frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}(1+o(1)) = \frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}(1+o(1)),$$

следовательно, $\lambda(t)$ есть правильно меняющаяся функция. В принятых выше обозначениях: при $T \to \infty$

$$E\psi_1 = \int_0^T \lambda(t)t^p d\lambda(t) = \int_0^T \lambda(t)B(t)t^p dt = \frac{T^{2\alpha+p+2}L^2(T)}{(\alpha+1)(2\alpha+p+2)}(1+o(1)). \tag{23}$$

Далее, для

$$G_p(t) \stackrel{def}{=} \int_0^t s^p d\lambda(s) = \int_0^t s^p B(s)ds = \frac{t^{p+\alpha+1}L(t)}{p+\alpha+1}(1+o(1)), \qquad t \to \infty$$

имеем, интегрируя по частям

$$\psi_1 - E\psi_1 = \int_0^T \eta(t)t^p d\eta^*(t) + \int_0^T \eta^*(t)t^p d\lambda(t) = \int_0^T \eta(t)t^p d\eta^*(t) + \eta^*(T)G_p(T) -$$

$$- \int_0^T G_p(t)d\eta^*(t) = \int_0^T [\eta(t)t^p - G_p(t)]\,d\eta^*(t) + \eta^*(T)G_p(T),$$

поэтому

$$D\psi_1 \le 2E(\eta^*(T))^2 G_p^2(T) + 2\int_0^T E\,[\eta(t)t^p - G_p(t)]^2\,d\lambda(t) = 2\lambda(t)G_p^2(T) +$$

$$+2\int_0^T \left\{ [\lambda(t)t^p - G_p(t)]^2 + t^{2p}\lambda(t) \right\} d\lambda(t) = o((E\psi_1)^2),$$

так, что

$$\frac{\psi_1}{E\psi_1} \xrightarrow[T\to\infty]{P} 1.$$

Таким образом, учитывая (22)–(23), определяем, что

$$\widehat{B} = \frac{T^{\alpha-1}L(T)2\alpha(\alpha+4)(\alpha+5)}{(\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+4)}(1+o(1)).$$

Учитывая теперь, что

$$\eta(T) = \lambda(T)(1+o(1)) = \frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}(1+o(1)),$$

окончательно получаем

$$\frac{T^2\widehat{B}}{\sqrt{\eta(T)}} = \frac{2\alpha(\alpha+4)(\alpha+5)}{(2\alpha+3)(2\alpha+4)}\sqrt{\frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}}(1+o(1)) \xrightarrow[T\to\infty]{P} \infty.$$

Доказательство пункта 2) теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 2. Здесь необходимо только учесть, что при $t \to \infty$

$$\lambda(t) = \int_0^t B(s)ds = At \pm \frac{t^{\alpha+1}L(t)}{\alpha+1}(1+(1)) = At(1+(1)),$$

то есть поведение параметра $\lambda(t)$ асимптотически такое же, как и в случае однородного пуассоновского процесса.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1: Доказательство легко получить, используя методы теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кабанов Ю.М„ Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Мартингальные методы в теории точечных процессов.*– Труды школы-семинара по теории случайных процессов , Друскининкай, Вильнюс, 1975, т.2, с.269-354.
2. Кутоянц Ю.А. *Оценивание параметров случайных процессов.* Ереван: И-во АН Армянской ССР. 1980. 253 с.
3. Линьков Ю.Н. *Асимптотические методы статистики случайных процессов.* Киев: Наукова думка. 1993. 255 с.
4. G. Peskir, A.N. Shiryaev Sequental testing problems for Poisson processes // The Annals of Statistics. 2000. Vol. 28. № 3. P.837—859.
5. Y.A. Kutoyants On properties of estimators in nonregular situations for Poisson processes // Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 363. 2009. С. 26–47.
6. Вентцель А.Д. *Курс теории случайных процессов.* М.: Наука. 1975. 320 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: И-во Физико-математической литературы. 1963. 1100 с.
8. Невзоров В.Б. *Рекорды. Математическая теория.* М.: Фазис. 2000. 256 с.
9. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер.* М:Наука. 1977. 352 с.
10. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Tuegels *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications, volume 27.* Cambridge University Press / Cambridge/ New York/ New Rochelle/ Melbourne/ Sydney. 1987. 510 p.

Наиль Кутлужанович Бакиров
ИМВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: bakirovnk@rambler.ru

Михаил Владимирович Сначев,
ИМВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: Snachev@yandex.ru