ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 3 (2010). С. 8-14.

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВАРИОГРАММЫ В НУЛЕ (МОДЕЛЬ ЧЕРНЫЙ ШУМ)

В.А. БАЙКОВ, Н.К. БАКИРОВ , А.А. ЯКОВЛЕВ

Аннотация. Известно, что большую роль в топологии и геометрии стационарных гауссовых случайных полей играет вторая производная ковариации в нуле. Исходя из внешней информации о реализации случайной функции в прикладных науках возникает вопрос ее учета, в частности, по средством задания степенного поведения в нуле. В данной работе предложена модель, обеспечивающая заданное асим-тотическое поведение.

Ключевые слова: геостохастическое моделирование, спектральная теория стационарных случайных полей, эйлерова характеристика, фрактальная размерность.

1. Введение

На практике, ввиду неполноты знания о системе и возможной противоречивости входной информации, для воспроизведения реальности необходим вероятностный подход (см, например,[1, 2, 3, 4, 5, 6]). При моделировании случайных полей, как правило, используют (1) Гауссово моделирование, (2) спектральную теорию, (3) Байесовский подход. Однако предполагается знание случайного поля (с вероятностной точки зрения), а именно для моделирования стационарных Гауссовых случайных полей необходимо знание математическиго ожидания и ковариации.

Большую роль при моделировании стационарных гауссовых случайных полей играет вторая производная ковариации в нуле. А именно, в геометрии случайных полей известно, что среднее Эйлеровой характеристики ϕ множества экскурсии $A_u = A_u(X_t, T) = \{X_t \in T : x_t \geq u\}$, ($x_t$ — реализация случайного поля X_t) $u \in R$, $T = \oplus_{i=1}^{N} T_i$, $T_i \subset R$ (T — прямоугольная область из R^N) процесса $\{X_t\}_{t \in T}$ можно определить [7] по формуле

$$E\{\phi(A_u)\} = e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \sum_{k=1}^{N} \sum_{J \in Q_k} \frac{|J||\Lambda_J|^{1/2}}{(2\pi)^{\frac{k+1}{2}} \sigma^k} H_{k-1}\left(\frac{u}{\sigma}\right) + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right), \tag{1}$$

где $J_k = J_k(T)$ — число $2^{N-k} C_N^k$ граней объекта размерности k в T; $H_n(x)$ — полиномы Эрмита; переменная Q_k определяет C_N^k элементов J_k, которые содержат нулевую точку; k−мерный объем $|J|$ некоторого $J \in J_k$ определяется как $|J| = \prod_{i \in \sigma(J)} T_i$; Λ — матрица спектральных моментов второго порядка. Отметим, что эта формула справедлива только в случае существования спектральных моментов второго порядка, которые, в свою очередь, определяются второй производной от ковариационной функции в нуле (см, например, [8]), и это существенно ввиду использования при доказательстве теории Морса. В случае линейного поведения ковариации в нуле (вторые производные не существуют) также определены оценки экскурсии, например, ее средних размеров [9].

V.A. Baikov, N.K. Bakirov, A.A. Yakovlev, Asymptotic behaviour of the variogramm in the zero.

Поступила 7 июня 2010 г.

Связь поведения ковариации в нуле с естественными процессами отмечали многие исследователи. Барроу [10] провел анализ обширного ряда измерений параметров окружающей среды и получил оценки фрактальных размерностей различных процессов. Например, фрактальная размерность содержания натрия в почве — от 1,7 до 1,9, камней — от 1,1 до 1,8. Установлено, что фрактальная размерность выражается как $D = 2 - H$, где H есть показатель степени пропорциональности дисперсии приращения случайного процесса к разности координат: $V(\Delta x) \approx |\Delta x|^{2H}$, другими словами, пропорциональности разности дисперсии и ковариации в нуле.

Данная работа посвящена обеспечению заданного степенного поведения ковариационной функции в нуле моделью степенных хвостов спектральной плотности $f(\lambda) = \lambda^{-\beta}$. Такая модель в одномерном случае часто называется *шумом*. Среди шумов различают белый шум со спектральным показателем $\beta = 0$, коричневый шум со спектром мощности, пропорциональным λ^{-2}, розовый шум со спектром λ^{-1} и черный шум, пропорциональный $\lambda^{-\beta}$, где $\beta > 2$.

Черные шумы описывают развитие во времени многих природных и искусственных катастроф, таких как наводнения, засухи, рынки с тенденцией к понижению курсов и различные аварийные ситуации — например, перебои в электроэнергии [11].

Поскольку данная работа имеет непосредственное прикладное значение, и мы работаем с реальными данными, нам необходима удобная мера устойчивости статистического явления, которой, на наш взгляд, является показатель Херста, определяемый как $H = ln(R/S)/ln(\Delta t)$. R/S есть *нормированный размах*, который по существу представляет собой размах $R(\Delta t)$ данных на временном интервале Δt (после вычитания любого линейного тренда), деленный на стандартное отклонение выборки $S(\Delta t)$ [12, 13]. Отметим, что между показателем Херста и спектральным показателем β существует простое отношение[11] $\beta = 2H + 1$.

2. Модель степенных хвостов

Рассмотрим стационарное случайное поле $\{X_t\}_{t\in T\subset R^2}$. Предположим, что выполнено условие эргодичности и известны значения реализации $\{x_t\}_{t\in T_k\subset T}$ случайного поля $\{X_t\}_{t\in T\subset R^2}$, для дискретного $T_k \subset T$. Предположим также, что существует характерный шаг дискретизации Δ множества T_k, а именно, для любого $t \in T_k$ существует $\epsilon > 0 : \Delta - \epsilon < \min\limits_{t_1\in T} |t - t_1| < \Delta + \epsilon$ и выполнено $T \subset \bigcup\limits_{t\in T_k} U_{\Delta+\epsilon}(t)$.

Таким образом, мы имеем можем говорить об отсутствии входной информации на масштабе от 0 до Δ. Данный масштаб заполняется внешней информацией о системе (поведение ковариационной функции в нуле), исходя из ее топологии, фрактальных свойств и др.

При оценивании спектральной плотности одномерного стационарного случайного поля $X(t)$ с нулевым средним, заданного на области $D \subset R^2$, традиционно используется периодограмма:

$$I_D(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2|D|}\left|\int\limits_D e^{-i(t,\lambda)}X(t)\,dt\right|,$$

где $|D|$ — площадь области D. Известно, что если спектральная плотность распределения $f(\lambda)$ непрерывна в точке λ_0, то тогда при неограниченном расширении области D

$$EI_D(\lambda_0) \to f(\lambda_0).$$

Известно, что периодограмма $I_D(\lambda)$ не является состоятельной оценкой спектральной плотности, однако, линейные интегральные функционалы от нее состоятельно оценивают аналогичные линейные интегральные функционалы от спектральной плотности.

Непосредственное вычисление периодограммы в нашем случае невозможно, поэтому мы приближаем векторную периодограмму соответствующей интегральной суммой следующего вида:

$$\hat{I}_D(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2|D|}\left(\sum_{k=1}^{N}\eta(x_k)\int\limits_{D_k} e^{-i(x,\lambda)}\,dx\right)\times\left(\overline{\sum_{k=1}^{N}\eta(x_k)\int\limits_{D_k} e^{-i(x,\lambda)}\,dx}\right)^T, \tag{2}$$

где D_k, $k = 1, \ldots, N$ – суть некоторые подобласти области D (разбиение Вороного), с $x_k \in D_k$. Причем данная оценка периодограммы справедлива в интервале $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, где $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi\Delta}$ — частота Найквиста, определяемая из следующего соображения: наименьшая длина волны, которую мы можем себе позволить оценивать по имеющимся данным, вдвое больше наименьшего расстояния между данными.

Пусть $f(x)$ — спектральная плотность случайного поля X_t. Положим, что $\int\limits_{R^2} f(\lambda)\,d\lambda = 1$. Согласно теореме Бохнера-Хинчина ковариационная функция является преобразованием Фурье спектральной плотности. Обозначим $\gamma(\lambda) = \int\limits_{R^2}\left(1 - e^{i(h,\lambda)}\right) f(\lambda)\,d\lambda$.

Задача заключается в обеспечении асимптотики $\gamma(h) \sim h^{2H}$, $|h| \to 0$, $H \in (0,1)$ моделью степенных хвостов для $f(\lambda)$ — спектральной плотности распределения стационарного процесса X_t. Итак, запишем спектральное представление

$$\gamma(h) = \int\limits_{R^2}(1 - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{|\lambda|\le\lambda_0}(1 - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+\int\limits_{|\lambda|>\lambda_0}(1 - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda = A_1 + A_2,$$

где λ_0 – частота Найквиста.

Функцию $f(\lambda)$ представим в виде $f(\lambda) = \begin{cases} f_1(\lambda) & |x| \leqslant \lambda_0 \\ f_2(\lambda) & |x| \geq \lambda_0 \end{cases}$, где f_1 — спектральная плотность на множестве $\{\lambda \in R^2 : |\lambda| \leqslant \lambda_0\}$, оцениваемая с помощью соответствующей периодограммы (2), $f_2(\lambda)$ — предлагаемая модель тяжелых хвостов. Далее вычисляем интеграл A_1. Ясно, что

$$A_1 = \int\limits_{|\lambda|\le\lambda_0}(1 - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{|\lambda|\le\lambda_0}(1 + i(h,\lambda) - e^{i(h,\lambda)})f(\lambda)\,d\lambda,$$

ввиду центральной симметричности $f(\lambda)$. С другой стороны,

$$|1 + i(h,\lambda) - e^{i(h,\lambda)}| \leqslant \frac{|h|^2|\lambda^2|}{2}, \qquad \forall\, h, \lambda,$$

и, стало быть,

$$|A_1| \leqslant C_0|h|^2, \qquad C_0 = \int\limits_{|\lambda|\le\lambda_0}|\lambda|^2\,d\lambda.$$

На множестве $\{\lambda \in R^2 : |\lambda| \leqslant \lambda_0\}$ для учета необходимого поведения функции $\gamma(h)$ вблизи нуля (учет фрактальных и топологических свойств реализации случайного поля) определим

$$f_2(\lambda) = \frac{C_1}{|\lambda|^{2+\alpha}}, \qquad \alpha > 0,$$

то есть спектральная плотность имеет тяжелый степенной хвост.

Покажем, что такое определение $f_2(\lambda)$ обеспечит нам необходимую асимптотику A_2 в нуле, то есть при $|h| \to 0$. Обозначим через S_r окружность радиуса r с центром в начале координат. Переходя в полярную систему коортдинат, получим

$$A_2 = C_1 \int\limits_{\lambda:|\lambda|>\lambda_0} \frac{1 - e^{i(h,\lambda)}}{|\lambda|^{2+\alpha}} \, d\lambda = C_1 \int\limits_{\lambda_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{2+\alpha}} \int\limits_{S_r} (1 - e^{i(h,\lambda)}) \, ds. \tag{3}$$

Функцией Бесселя первого рода нулевого порядка называется функция $J_0(x)$ вида [14]

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ix\sin\phi} \, d\phi. \tag{4}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{S_r} (1 - e^{i(h,\lambda)}) \, ds = r \int\limits_0^{2\pi} 1 - e^{i[h_1|r|\sin\phi + h_2|r|\cos\phi]} \, d\phi.$$

Переходя в полярные координаты $h_1 = |h|\sin\psi$, $h_2 = |h|\cos\psi$, $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, имеем

$$\int\limits_{S_r} (1 - e^{i(h,\lambda)}) \, ds = r \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - e^{i|r||h|(\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi)}\right) \, d\phi =$$

$$= r \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - e^{i|r||h|\cos(\psi-\phi)}\right) \, d\phi = \left|\psi - \phi = \frac{\pi}{2} - \acute{\phi}\right| = r \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - e^{i|r||h|\sin\acute{\phi}}\right) \, d\phi = \tag{5}$$

$$= r\left(2\pi - 2\pi J_0(|r||h|)\right).$$

Хорошо известно, что $J_0(x)$ представима в виде [15]

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k (k!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4), \qquad x \to 0. \tag{6}$$

Итак, учитывая (3)–(6), получаем для $0 < \alpha < 2$

$$A_2 = 2\pi C_1 \int\limits_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1 - J_0(r|h|)}{r^{1+\alpha}} \, dr.$$

Применяя замену переменных $r|h| = y$, получаем

$$A_2 = |h|^\alpha 2\pi C_1 \int\limits_{\lambda_0|h|}^{\infty} \frac{1 - J_0(y)}{y^{1+\alpha}} \, dy = C_2|h|^\alpha(1 + o(1)), \qquad h \to 0,$$

$$C_2 = 2\pi C_1 \int\limits_0^{\infty} \frac{1 - J_0(y)}{y^{1+\alpha}} \, dy.$$

Здесь мы учли сходимость интеграла в определении константы C_2, справедливую ввиду (6) и ограниченности функции Бесселя: $|J_0(y)| \leqslant 1$, $\forall y$.

Из последней формулы следует, что

$$\alpha = 2H.$$

Следовательно, учет тяжелых хвостов спектральной плотности $f(\lambda)$ при построении стационарного случайного гауссова поля сведется к учету дополнительного стохастического интеграла

$$C_1 \int_{|\lambda|>\lambda_0} e^{i(h,\lambda)} d\Phi(\lambda) = C_1 \int_{\lambda_1>|\lambda|>\lambda_0} e^{i(h,\lambda)} d\Phi(\lambda) +$$
$$+ C_1 \int_{|\lambda|>\lambda_1} e^{i(h,\lambda)} d\Phi(\lambda) = B_1 + B_2,$$

где величину λ_1 выбираем из условия малости отношения дисперсий

$$\frac{DB_2}{D(B_1+B_2)} = \frac{\int_{|\lambda|>\lambda_1} f(\lambda)d\lambda}{\int_{|\lambda|>\lambda_0} f(\lambda)d\lambda} =$$
$$= \frac{\int_{|\lambda|>\lambda_1} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2+\alpha}}}{\int_{|\lambda|>\lambda_0} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2+\alpha}}} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{\alpha} = \varepsilon, \quad \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_0 \varepsilon^{-1/\alpha}.$$

Например, при $\alpha = 1, \varepsilon = 1/20$ получаем $\lambda_1 = 20\lambda_0$. При этом для подсчета соответствующих стохастических интегралов мы можем использовать следующее представление

$$\int_{\lambda_1>|\lambda|>\lambda_0} e^{i(t,\lambda)} d\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(t),$$

$$\xi_k(t) = \int_{z_{k+1}>|\lambda|>z_k} e^{i(t,\lambda)} d\Phi(\lambda), \qquad \lambda_0 = z_0 < z_1 < ... < z_N = \lambda_1,$$

где случайные процессы $\xi_k(t), k = 0, 1, ..., N-1$ независимы и имеют гауссовское распределение ввиду того, что случайная мера $d\Phi(\lambda)$ в соответствии с общей теорией гауссовская и имеет независимые приращения. Ясно, что $E\xi_k(t) = 0$ и

$$Cov(\xi_k(t), \xi_k(s)) = \int_{z_{k+1}>|\lambda|>z_k} e^{i(t-s,\lambda)} f(\lambda) d\lambda =$$
$$= 2\pi C_1 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{J_0(r|t-s|)}{r^{1+\alpha}} dr \approx 2\pi C_1 (z_{k+1} - z_k) \frac{J_0(r_k|t-s|)}{r_k^{1+\alpha}}, \qquad r_k = \frac{z_k + z_{k+1}}{2}.$$

Выберем в качестве z_k равномерное разбиение отрезка $[\lambda_0, \lambda_1]$:

$$z_{k+1} - z_k = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{N}, \qquad r_k = \lambda_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{N}.$$

Итак, если $\eta(t)$ гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $J_0(|t-s|)$, то тогда случайный процесс $\xi_k(t)$ распределен также, как и случайный процесс

$$\eta(r_k t) \sqrt{\frac{2\pi C_1 (z_{k+1} - z_k)}{r_k^{1+\alpha}}}.$$

Таким образом, сначала мы моделируем N независимых, одинаково распределенных гауссовских процессов $\eta_k(t)$ с нулевыми средними и общей ковариационной функцией $J_0(|t-s|)$, и затем используем приближенную формулу

$$\int_{\lambda_1>|\lambda|>\lambda_0} e^{i(t,\lambda)} d\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \eta(r_k t) \sqrt{\frac{2\pi C_1 (z_{k+1} - z_k)}{r_k^{1+\alpha}}}.$$

Реализации процессов $\eta_k(t)$ моделируем следующим образом

$$\eta_k(t) = \int_{S_1} e^{i(t,\lambda)} d\Phi_1(\lambda) \approx \sum_{k=0}^{2M-1} e^{i(t,\lambda_k)} \psi_k, \qquad t \in R^2,$$

$$\lambda_k = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2M}(k+\frac{1}{2})\right), \sin\left(\frac{\pi}{2M}(k+\frac{1}{2})\right)\right], \qquad \forall k,$$

где комплекснозначные случайные величины $\psi_k, k = 0, 1, ..., M-1$ независимы с нулевыми средними и дисперсиями $D\psi_k = E|\psi_k|^2 = 1/(2M)$, при этом $\psi_k = -\psi_{k+M}, k = 0, 1, ..., M-1$, тем самым

$$\eta_k(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2M}} 2Re \sum_{k=0}^{M-1} e^{i(t,\lambda_k)} \frac{u_k + iv_k}{\sqrt{2}} = \frac{Re}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} e^{i(t,\lambda_k)}(u_k + iv_k),$$

где $u_k, v_k, k \geq 0$ — совокупность независимых стандартных гауссовских величин $N(0, 1)$.

Величины M, N выбираем достаточно большими.

3. Приложение в нефтяной промышленности

Тремя главными компонентами неидеальности пласта являются анизотропность, нестационарность (неоднородность), неравномерность. Эти термины могут применятся к любому свойству пласта, будь то геофизическое поле или фильтрационно-емкостные свойства. Анизотропность означает изменение свойства согласованно с углом измерения, тензорная характеристика. Стационарность предполагает, в вероятностном смысле (например, средние характеристики), инвариантность свойства к трансляциям. Неравномерность определяет постоянную изменчивость и далее будет связана со случайностью.

Учитывая сложный характер залегания коллекторов, процессов, происходящих во время и после, не вызывает никаких сомнений тот факт, что ни один из рассматриваемых пластов не является однородным. Конечно, это не означает, что всегда неравномерность является ключевым фактором, однако, ввиду введения в разработку низкопроницаемых-сильнорасчлененых коллекторов, тех, у которых дебет жидкости на скважине падает в короткий срок в пять и более раз, данный факт является одним из основных. Ясно также, что в чистом виде не встречается изотропность, и, как правило, особенно на больших масштабах, нет и стационарности.

Применяя новый подход моделирования (см. [16]) к геологическому конструированию месторождения, основанный на спектральной теории случайных полей, который позволяет строить нестационарные, анизотропные, в строгом смысле, не гауссовы случайные поля, и модель степенных хвостов, позволило в случаях низкопроницаемых коллекторов без дополнительных гипотез перейти к гидродинамическому моделированию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D.G. Krige *A statistical approach to some mine valuations and allied problems at the Witwatersrand.* Master's thesis. University of Witwatersrand. 1951.
2. G. Matheron *The theory of regionalized variables and its applications.* Fontainebelau: Center of Geostistics. 1971. 212 p.
3. G. Matheron *The intrisic random functions and their applications* // Adv. Appl. Probability. 1973. №.5. P. 439–468.
4. G. Matheron *Estimer et choisir.* Fontainebelau: Centre de Geostistique. 1978. 175 p.
5. C.V. Deutsch, A.G. Journe *GSLIB, Geostatistical software library and User's guide.* New York: Oxford university press. 1992. 340 p.
6. Дюбрюль О. *Использование геостатистики для включения в геологическую модель данных.* EAGE: Изд-во SEG. 2002. 295 с.
7. R.J. Adler, J.E. Taylor. *Random fields and their geometry.* New York: Springer Science. 2003. 288 p.
8. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. *Экстремумы случайных последовательностей и процессов.* М.: Мир. 1989. 392 с.
9. W. Robert, Jr. Ritzi *Behavior of indicator variograms and transitions probabilities in relation to the variance in lengths of hydrofacies* // Water resources research. 2000. Vol. 36, №. 11. P. 3375–3381.

10. P.A. Burrough *Fractal dimentions of landscapes and other environmental data* // Nature. 294 (1981). P. 240–242.
11. М. Шредер *Фракталы, хаос, степенные законы.* Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 528 с.
12. H.E. Hurst, R.P. Black, Y.M. Simaika *Long Term Storage: An Experimental Study.* L.: Constable. 1965.
13. B.B. Mandelbrot *Fractals and Multifractals, Selecta.* Vol. 1. N.Y.: Springer. 1991.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцентдентные функции.* Том 2. М.: Издательство «Наука». 1974. 296 с.
15. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. *Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции.* М.: Государственное издательство физико-математическсой литературы. 1963. 500 с.
16. Байков В.А., Бакиров Н.К.,Яковлев А.А. *Новые подходы в теории геостатистического моделирования* // Вестник УГАТУ: научн. журн. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-та. 2010. Т. 37. №2.

Виталий Анварович Байков,
РН-УфаНИПИнефть,
ул. Революционная, 96/2,
450078, г. Уфа, Россия
E-mail: baikov@ufanipi.ru

Наиль Кутлужанович Бакиров
ИМВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия

Андрей Александрович Яковлев,
РН-УфаНИПИнефть,
ул. Революционная, 96/2,
450078, г. Уфа, Россия
E-mail: YakovlevAA@ufanipi.ru, yakovlevandrey@yandex.ru