ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 20-26.

УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛАПЛАСА

Ю.Г. ВОРОНОВА

Аннотация. В работе показано, что решение обобщенной задачи Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа сводится к решению задачи Гурса для системы такого же вида. Построено точное решение задачи Коши для одной двухкомпонентной системы уравнений.

Ключевые слова: преобразования Лапласа, функция Римана, обобщенные инварианты Лапласа, задача Гурса.

1. Введение

В работах [1], [2] изучены задачи Коши и Гурса для систем уравнений вида

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)u_j(x) + A_i(x), \ \ i = 1, 2, \dots, n,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, и приведена редукция данных задач к интегральным уравнениям. В частных случаях в работе [2] функция Римана построена в явном виде.

В настоящей статье рассматривается обобщенная задача Коши для системы линейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(x,y)\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_{ij}(x,y)\frac{\partial u_j}{\partial y} + c_{ij}(x,y)u_j \right) = f_i(x,y), \tag{1.1}$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Введем понятие обобщенных инвариантов, предложенное в [3]–[8].

Определение 1. *Обобщенными x-инвариантами Лапласа системы (1.1) называются матрицы X_i, заданные рекуррентными формулами*

$$X_1 = H_1 = \frac{\partial}{\partial x}a + ba - c, \quad X_{i+1} = H_{i+1}X_i,$$

$$H_{i+1} = \frac{\partial}{\partial x}(a_i) - \frac{\partial}{\partial y}b + [b, a_i] + H_i, \ \ \frac{\partial}{\partial y}(X_i) + a_iX_i - X_ia = 0.$$

Аналогично, обобщенными y-инвариантами Лапласа системы (1.1) называются матрицы Y_i, заданные рекуррентными формулами

$$Y_1 = K_1 = \frac{\partial}{\partial y}a + ab - c, \quad Y_{i+1} = K_{i+1}Y_i,$$

Yu.G. Voronova, About problem of Koshi for linear hyperbolic system of the equations with zero generalized Laplace invariants.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00440-а).

Поступила 1 апреля 2010 г.

$$K_{i+1} = \frac{\partial}{\partial y}(b_i) - \frac{\partial}{\partial x}a + [a, b_i] + K_i, \quad \frac{\partial}{\partial x}(Y_i) + b_i Y_i - Y_i b = 0,$$

здесь $a_0 = a$, $b_0 = b$.

В статьях [9], [10] приведен алгоритм построения решения задачи Гурса для линейной гиперболической системы уравнений (1.1) с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа, который является обобщением "метода спуска", предложенного в работе [11].

В настоящей работе показано, что решение обобщенной задачи Коши для таких систем уравнений сводится к решению задачи Гурса для системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа. Построено точное решение задачи Коши для линеаризованной цепочки Тоды серии A_2.

2. Метод Римана для линейных гиперболических систем уравнений

В этом параграфе кратко опишем метод Римана для линейных гиперболических систем уравнений. Рассмотрим систему линейных гиперболических уравнений (1.1), записанную в виде

$$L(u) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y)\right] u = f(x,y), \tag{2.1}$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ — неизвестная вектор-функция, $a(x,y) = ||a_{ij}||$, $b(x,y) = ||b_{ij}||$, $c(x,y) = ||c_{ij}||$ — заданные матрицы порядка n, а $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ — вектор-функция. Пусть на плоскости задана кривая $\breve{AB}$, на которой определены функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$. Требуется найти решение системы уравнений (2.1), для которой выполнены условия:

$$u|_{\breve{AB}} = \varphi(x,y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\breve{AB}} = \psi(x,y), \tag{2.2}$$

здесь n — нормаль к кривой $\breve{AB}$.
Будем предполагать, что прямые, параллельные осям координат, пересекают кривую $\breve{AB}$ не более чем в одной точке. Если это условие нарушено, то решение может не существовать. Сопряженная система уравнений для однородной системы $L(u) = 0$ имеет вид:

$$L^*(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(va)}{\partial x} - \frac{\partial(vb)}{\partial y} + vc = 0, \tag{2.3}$$

где $v = (v_1, v_2 \dots, v_n)$ — вектор-функция.

Непосредственным дифференцированием можно проверить, что выполняется следующее тождество:

$$vL(u) - L^*(v)u = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[vu_y - v_y u + 2vau] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[vu_x - v_x u + 2vbu)]. \tag{2.4}$$

Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и проведем через нее характеристики $x = x_0$, $y = y_0$, пересекающие кривую $\breve{AB}$ соответственно в точках P и Q. Обозначим через Ω область, ограниченную этими прямыми и дугой PQ, и через Γ границу Ω.
Интегрируя обе части тождества (2.4) по области Ω и пользуясь формулой Грина, получим

$$\iint\limits_{\Omega}[vL(u) - L^*(v)u]dxdy =$$
$$= \tfrac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma}[vu_y - v_y u + 2vau]dy - [vu_x - v_x u + 2vbu)]dx.$$

Откуда нетрудно получить следующую формулу

$$
\begin{aligned}
&(vu)_{M_0} = \tfrac{(vu)_P+(vu)_Q}{2} + \int\limits_{QM_0} (v_x - vb)udx - \int\limits_{M_0P} (v_y - va)udy+ \\
&+\tfrac{1}{2} \int\limits_{\breve{PQ}} [vu_y - (v_y - 2va)u]dy - [vu_x - (v_x - 2vb)u]dx- \\
&- \iint\limits_{\Omega} [vL(u) - L^*(v)u]dxdy.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Далее возьмем $v = v^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, как решение сопряженного уравнения (2.3), для которого выполняются условия:

$$
\begin{aligned}
&1)\ v_x^{(i)} - v^{(i)}b = 0 \text{ на характеристике } QM_0, \\
&2)\ v_y^{(i)} - v^{(i)}a = 0 \text{ на характеристике } M_0P, \\
&3)\ v_j^{(i)}(x_0, y_0) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

здесь $v^{(i)} = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)})$.

Теперь равенство (2.5) с учетом (2.6) можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
&u_i(x_0, y_0) = \tfrac{(v^{(i)}u)_P+(v^{(i)}u)_Q}{2} + \tfrac{1}{2} \int\limits_{\breve{PQ}} [v^{(i)}u_y - (v_y^{(i)} - 2v^{(i)}a)u]dy- \\
&-[v^{(i)}u_x - (v_x^{(i)} - 2v^{(i)}b)u]dx - \iint\limits_{\Omega} v^{(i)}fdxdy,\ i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Используя условия (2.2), можно определить значение $u_x,\ u_y$ на $\breve{AB}$, а именно:

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\breve{AB}} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} cos(s, x) + \psi cos(n, x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\breve{AB}} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} cos(s, y) + \psi cos(n, y),
$$

где $\frac{\partial}{\partial s}$ — производная по направлению касательной к кривой $\breve{AB}$.

Решение $v^{(i)}(x, y)$ сопряженного уравнения (2.3), удовлетворяющего условиям (2.6), называется функцией Римана. Таким образом, решение задачи (2.1), (2.2) находится по формуле (2.7), где $v^{(i)}$ — решение краевых задач (2.3), (2.6), $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть теперь существуют $r, s > 0$ такие, что обобщенные инварианты Лапласа системы уравнений (2.1) $X_r = Y_s = 0$. Тогда решение задачи (2.1), (2.2) сводится к следующей задаче

$$
\frac{\partial^2(v^{(i)T})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(v^{(i)}a)^T}{\partial x} - \frac{\partial(v^{(i)}b)^T}{\partial y} + (v^{(i)}c)^T = 0, \tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v^{(i)T}(x, y_0)}{\partial x} = b^T(x, y_0)v^{(i)T}(x, y_0), \\
&\frac{\partial v^{(i)T}(x_0, y)}{\partial y} = a^T(x_0, y)v^{(i)T}(x_0, y), \\
&v_j^{(i)T}(x_0, y_0) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

здесь $v^{(i)T}(x, y)$ — столбец неизвестных функций. Система уравнений (2.8) является сопряженной к исходной системе уравнений (2.1), и из [4] следует, что обобщенные инварианты Лапласа системы (2.8)

$$
x_s = Y_s^T = 0, \quad y_r = X_r^T = 0.
$$

В работе [10] для систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа приведен алгоритм построения решения задачи Гурса. Таким образом, считая известным решение задачи (2.8), (2.9), мы получаем решение исходной задачи (2.1), (2.2).

3. Задача Коши для линеаризованной цепочки Тоды серии A_2

В этом параграфе мы приведем пример реализации алгоритма решения обобщенной задачи Коши для системы уравнений вида

$$(g_1)_{xy} + 2e^u g_1 - e^v g_2 = 0, \ \ (g_2)_{xy} - e^u g_1 + 2e^v g_2 = 0, \tag{3.1}$$

$$g|_{AB} = \varphi(x,y), \ \ \frac{\partial g}{\partial n}|_{AB} = \psi(x,y), \tag{3.2}$$

где $g = (g_1, g_2)^T$, u, v — заданные функции, удовлетворяющие системе

$$u_{xy} + 2e^u - e^v = 0, \ \ v_{xy} - e^u + 2e^v = 0.$$

Из выражения (2.7) следует, что решение задачи (3.1), (3.2) определяется по формуле

$$\begin{gathered} g_i(x_0,y_0) = \tfrac{(v^{(i)}g)_P + (v^{(i)}g)_Q}{2} + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\breve{PQ}} [v^{(i)}g_y - (v_y^{(i)} - 2v^{(i)}a)g]dy - \\ -[v^{(i)}g_x - (v_x^{(i)} - 2v^{(i)}b)g]dx, \ \ i = 1,2, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $v^{(i)}$, $i = 1,2$ являются решениями следующих краевых задач:

$$v_{xy}^{(1)T} + \begin{pmatrix} 2e^u & -e^u \\ -e^v & 2e^v \end{pmatrix} v^{(1)T} = 0, \ \ v^{(1)T}(x,y_0) = v^{(1)T}(x_0,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$v_{xy}^{(2)T} + \begin{pmatrix} 2e^u & -e^u \\ -e^v & 2e^v \end{pmatrix} v^{(2)T} = 0, \ \ v^{(2)T}(x,y_0) = v^{(2)T}(x_0,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим более подробно задачу (3.4). Система уравнений (3.4) является сопряженной к исходной системе (3.1), и согласно [5] обобщенные инварианты

$$x_3 = Y_3^T = 0, \ \ y_3 = X_3^T = 0.$$

Тогда одно из представлений решения системы уравнений (3.4) имеет следующий вид [9]:

$$\begin{gathered} v^{(1)T}(x,y) = X_1^{-1}\frac{\partial}{\partial x}X_1\left[e^{-u-v}\frac{\partial}{\partial x}e^{u+v}w(x)e_1 + W(x)e_2\right] + \\ +X_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y}X_1\left[e^{-u-v}\frac{\partial}{\partial y}e^{u+v}\bar{w}(y)e_1 + \bar{W}(y)e_2\right], \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $X_1 = \begin{pmatrix} -2e^u & e^u \\ e^v & -2e^v \end{pmatrix}$, векторы $e_1 = \binom{1}{-1}$, $e_2 = \binom{1}{1}$, $w(x), W(x), \bar{w}(y), \bar{W}(y)$ — произвольные функции.

Положим в решение (3.6) $y = y_0$:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1^{-1}(x,y_0)\frac{\partial}{\partial x}X_1(x,y_0)\left[e^{-u-v}\frac{\partial}{\partial x}e^{u+v}w(x)e_1 + W(x)e_2\right] + \\ + \left(\bar{w}''(y_0) + \bar{w}'(y_0)C_1(x,y_0) + \bar{w}(y_0)C_2(x,y_0)\right)e_1 + \left(\bar{W}'(y_0) + \bar{W}(y_0)C_3(x,y_0)\right)e_2, \end{gathered}$$

здесь $C_1(x,y_0)$, $C_2(x,y_0)$, $C_3(x,y_0)$ — известные функции.

Введем обозначение $r(x,y_0)$:

$$\begin{gathered} r(x,y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\bar{w}''(y_0) + \bar{w}'(y_0)C_1(x,y_0) + \bar{w}(y_0)C_2(x,y_0)\right)e_1 - \\ - \left(\bar{W}'(y_0) + \bar{W}(y_0)C_3(x,y_0)\right)e_2, \end{gathered} \tag{3.7}$$

тогда получим следующую систему уравнений

$$X_1^{-1}(x,y_0)\frac{\partial}{\partial x}X_1(x,y_0)\left[e^{-u-v}\frac{\partial}{\partial x}e^{u+v}w(x)e_1 + W(x)e_2\right] = r(x,y_0).$$

Умножим обе части последнего уравнения на $X_1(x,y_0)$ слева и далее проинтегрируем в пределах от x_0 до x:

$$X_1(x,y_0)\left[e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}\frac{\partial}{\partial x}e^{u(x,y_0)+v(x,y_0)}w(x)e_1+W(x)e_2\right]=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}X_1(t,y_0)r(t,y_0)dt+X_1(x_0,y_0)w'(x_0)e_1+$$

$$+X_1(x_0,y_0)(u_x(x_0,y_0)+v_x(x_0,y_0))w(x_0)e_1+X_1(x_0,y_0)W(x_0)e_2.$$

Положим

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=X_1^{-1}(x,y_0)\left(\int\limits_{x_0}^{x}X_1(t,y_0)r(t,y_0)dt+X_1(x_0,y_0)w'(x_0)e_1+\right.$$

$$\left.+X_1(x_0,y_0)(u_1(x_0,y_0)+v_1(x_0,y_0))w(x_0)e_1+X_1(x_0,y_0)W(x_0)e_2\right) \tag{3.8}$$

и тогда получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}\dfrac{\partial}{\partial x}e^{u(x,y_0)+v(x,y_0)}w(x)+W(x)=p(x,y_0),\\ -e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}\dfrac{\partial}{\partial x}e^{u(x,y_0)+v(x,y_0)}w(x)+W(x)=q(x,y_0).\end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнение, определим $W(x)$:

$$W(x)=\frac{1}{2}(p(x,y_0)+q(x,y_0)), \tag{3.9}$$

а вычитая из первого уравнение второе, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, из которого найдем функцию $w(x)$:

$$w(x)=\frac{1}{2}e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}\int\limits_{x_0}^{x}e^{u(t,y_0)+v(t,y_0)}(p(t,y_0)-q(t,y_0))dt+$$

$$+e^{u(x_0,y_0)+v(x_0,y_0)}w(x_0)e^{-u(x,y_0)-v(x,y_0)}. \tag{3.10}$$

Функции $w(x)$ и $W(x)$ зависят от произвольных постоянных $\bar{w}''(y_0)$, $\bar{w}'(y_0)$, $\bar{w}(y_0)$, $\bar{W}'(y_0)$, $\bar{W}(y_0)$, $w'(x_0)$, $w(x_0)$, $W(x_0)$.

Аналогично, полагая в решение (3.6) $x=x_0$, определим функции $\bar{w}(y)$ и $\bar{W}(y)$:

$$\bar{W}(y)=\frac{1}{2}(\bar{p}(x_0,y)+\bar{q}(x_0,y)), \tag{3.11}$$

$$\bar{w}(y)=\frac{1}{2}e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}\int\limits_{y_0}^{y}e^{u(x_0,t)+v(x_0,t)}(\bar{p}(x_0,t)-\bar{q}(x_0,t))dt+$$

$$+e^{u(x_0,y_0)+v(x_0,y_0)}\bar{w}(y_0)e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}, \tag{3.12}$$

где

$$\begin{pmatrix}\bar{p}\\\bar{q}\end{pmatrix}=X_1^{-1}(x_0,y)\left(\int\limits_{y_0}^{y}X_1(x_0,t)\bar{r}(x_0,t)dt+X_1(x_0,y_0)\bar{w}'(y_0)e_1+\right.$$

$$\left.+X_1(x_0,y_0)(u_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0))\bar{w}(y_0)e_1+X_1(x_0,y_0)\bar{W}(y_0)e_2\right),$$

$$r(x_0,y)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\left(w''(x_0)+w'(x_0)C_4(x_0,y)+w(x_0)C_5(x_0,y)\right)e_1-$$

$$-\left(W'(x_0)+W(x_0)C_6(x_0,y)\right)e_2.$$

Далее воспользуемся условием согласования, для этого в решение (3.6) положим $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left(w''(x_0) + w'(x_0)d_1 + w(x_0)d_2 + \bar{w}''(y_0) + \bar{w}'(y_0)d_4 + \bar{w}(y_0)d_5\right)e_1 + \\ + \big(W'(x_0) + W(x_0)d_3 + \bar{W}'(y_0) + \bar{W}(y_0)d_6\big)\, e_2,$$

где d_i, $i = 1, \ldots, 6$ — известные постоянные.
Выразим отсюда

$$\bar{w}''(y_0) = \frac{1}{2} - w''(x_0) - d_1 w'(x_0) - d_2 w(x_0) - d_4 \bar{w}'(y_0) - d_5 \bar{w}'(y_0),$$

$$\bar{W}'(y_0) = \frac{1}{2} - W'(x_0) - d_3 W(x_0) - d_6 \bar{W}'(y_0).$$

С помощью данных формул выражение для $r(x, y_0)$ (3.7) перепишется в виде

$$r(x, y_0) = (w''(x_0) + w'(x_0)d_1 + w(x_0)d_2 + \bar{w}'(y_0)(d_4 - C_1(x, y_0)) + \bar{w}(y_0)(d_5 - \\ - C_2(x, y_0)))\, e_1 + \big(W'(x_0) + W(x_0)d_3 + \bar{W}(y_0)(d_6 - C_3(x, y_0))\big)\, e_2. \qquad (3.13)$$

С учетом условия согласования, искомые функции $W(x)$ и $w(x)$ определяются из формул (3.9) и (3.10), где функции $p(x, y_0)$ и $q(x, y_0)$ находятся из выражения (3.8), а функция $r(x, y_0)$ из формулы (3.13). Функции $\bar{W}(y)$ и $\bar{w}(y)$ определяются из формул (3.11) и (3.12).

В итоге решение задачи (3.4) можно представить в виде

$$v^{(1)T}(x, y) = X_1^{-1} \frac{\partial}{\partial y} X_1 \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial y} e^{u+v} \left\{ -\frac{e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}}{18} \int\limits_{y_0}^{y} \big(2e^{v(x_0,t)}\alpha(x_0, t) + \right.\right. \\ \left.\left. + e^{u(x_0,t)}\beta(x_0, t)\big)\, dt \right\} e_1 - \frac{1}{6}\left(2e^{-u(x_0,y)}\alpha(x_0, y) - e^{-v(x_0,y)}\beta(x_0, y)\right) e_2 \right] + \\ + (G_1(x, y)w''(x_0) + G_2(x, y)w'(x_0) + G_3(x, y)w(x_0) + G_4(x, y)\bar{w}'(y_0) + G_5(x, y)\times \\ \times \bar{w}(y_0))\, e_1 + \big(G_6(x, y)W'(x_0) + G_7(x, y)W(x_0) + G_8(x, y)\bar{W}(y_0)\big)\, e_2,$$

здесь $G_i(x, y)$, $i = 1, \ldots, 8$ — известные функции, а

$$\alpha(x_0, y) = 2u_x(x_0, y) + v_x(x_0, y) - 2u_x(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0),$$

$$\beta(x_0, y) = 2v_x(x_0, y) + u_x(x_0, y) - 2v_x(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0).$$

В силу единственности решения задачи Гурса все функции $G_i(x, y) \equiv 0$,
$i = 1, \ldots, 8$ и решение задачи (3.4) примет вид

$$v^{(1)T}(x, y) = X_1^{-1} \frac{\partial}{\partial y} X_1 \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial y} e^{u+v} \left\{ -\frac{e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}}{18} \int\limits_{y_0}^{y} \big(2e^{v(x_0,t)}\alpha(x_0, t) + \right.\right. \\ \left.\left. + e^{u(x_0,t)}\beta(x_0, t)\big)\, dt \right\} e_1 - \frac{1}{6}\left(2e^{-u(x_0,y)}\alpha(x_0, y) - e^{-v(x_0,y)}\beta(x_0, y)\right) e_2 \right]. \qquad (3.14)$$

Аналогично находится решение задачи (3.5):

$$v^{(2)T}(x, y) = X_1^{-1} \frac{\partial}{\partial y} X_1 \left[e^{-u-v} \frac{\partial}{\partial y} e^{u+v} \left\{ \frac{e^{-u(x_0,y)-v(x_0,y)}}{18} \int\limits_{y_0}^{y} \big(e^{v(x_0,t)}\alpha(x_0, t) + \right.\right. \\ \left.\left. + 2e^{u(x_0,t)}\beta(x_0, t)\big)\, dt \right\} e_1 + \frac{1}{6}\left(e^{-u(x_0,y)}\alpha(x_0, y) - 2e^{-v(x_0,y)}\beta(x_0, y)\right) e_2 \right]. \qquad (3.15)$$

Тогда решение обобщенной задачи Коши (3.1), (3.2) находится из выражения (3.3), где $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ определяются из формул (3.14), (3.15).

Автор выражает благодарность Жиберу А.В. за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чекмарев Т.В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, вып 9. С. 1614–1622.
2. Жегалов В.И., Миронова Л.Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными* // Изв. вузов. Матем. 2007. Т. 3. С. 12–21.
3. Жибер А.В., Соколов В.В.*Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. 2001. Т. 56, вып 1. С. 63–106.
4. Жибер А.В., Старцев С.Я. *Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений* // Математ. заметки. 2003. Т. 74, вып 6. С. 848–857.
5. Гурьева А.М., Жибер А.В.*Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды* // ТМФ. 2004. Т. 138, вып 3. С. 401–421.
6. J.M. Anderson, N. Kamran *The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane* // Duke. Math. J. 1997. V.87, №2. P.265-319.
7. Старцев С.Я. *О построении симметрий систем уравнений лиувиллевского типа* // Труды международной конференции. Орел: ОГУ, 2006. Т. 1. С. 117–122.
8. Жибер А.В., Соколов В.В., Старцев С.Я. *Нелинейные гиперболические системы уравнений лиувиллевского типа* // Международная конференция "Тихонов и современная математика": тезисы докладов. М.: МГУ, 2006. С. 305–306.
9. Жибер А.В., Михайлова Ю.Г. *О задаче Гурса для гиперболической системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, вып 3(21). С. 136–144.
10. Жибер А.В., Михайлова Ю.Г. *Алгоритм построения общего решения n–компонентной гиперболической системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа и краевые задачи* // Уфимский математ. журнал. 2009. Т. 1, вып 3. С. 28–45.
11. Лезнов А.Н., Шабат А.Б. *Условия обрыва рядов теории возмущений* // Интегрируемые системы. БФАН СССР. 1982. С. 34–44.

Юлия Геннадьевна Воронова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: mihaylovaj@mail.ru