ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 53-66.

УДК 517.956.223

ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Р.Х. КАРИМОВ, Л.М. КОЖЕВНИКОВА

Аннотация. Для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях $\Omega\subset\mathbb{R}_n,\ n\geq 2$, рассматривается задача Дирихле. Установлены оценки сверху, характеризующие зависимость скорости убывания решений на бесконечности от геометрии области Ω.

Ключевые слова: убывание, квазилинейное эллиптическое уравнение, задача Дирихле, неограниченная область.

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\},\ n\geq 2$. Для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathbf{x},\nabla u))_{x_\alpha}-a(\mathbf{x},u)=\sum_{\alpha=1}^{n}(\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha}-\Phi(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Omega; \tag{1. 1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{1. 2}$$

Предположим, что функции, входящие в уравнение (1.1), удовлетворяют следующим требованиям. Функции $a_\alpha(\mathbf{x},\xi),\ \alpha=\overline{1,n}$, измеримы по $\mathbf{x}\in\Omega$ и для всех $\xi,\eta\in\mathbb{R}_n$ при п.в. $\mathbf{x}\in\Omega$ подчиняются условиям:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha(\mathbf{x},\xi)-a_\alpha(\mathbf{x},\eta)\right)(\xi_\alpha-\eta_\alpha)\geq\overline{a}|\xi-\eta|^{m+1},\quad m\geq 1; \tag{1. 3}$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x},\xi)-\mathbf{a}(\mathbf{x},\eta)|\leqslant\widehat{a}|\xi-\eta|(|\xi|+|\eta|)^{m-1},\quad \mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n); \tag{1. 4}$$

$$a_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{0})=0,\quad \alpha=\overline{1,n}. \tag{1. 5}$$

Функция $a(\mathbf{x},s)$ измерима по $\mathbf{x}\in\Omega$ и для всех $s,t\in\mathbb{R}$ при п.в. $\mathbf{x}\in\Omega$ подчиняется условиям:

$$(a(\mathbf{x},s)-a(\mathbf{x},t))(s-t)\geq\overline{b}|s-t|^{q+1},\quad q\geq 1; \tag{1. 6}$$

$$|a(\mathbf{x},s)-a(\mathbf{x},t)|\leqslant\widehat{b}|s-t|(|s|+|t|)^{q-1}; \tag{1. 7}$$

$$a(\mathbf{x},0)=0. \tag{1. 8}$$

Здесь $\overline{a},\ \widehat{a},\ \overline{b},\ \widehat{b}$ — положительные числа.

L.M. Kozhevnikova, R.Kh. Karimov, Behavior on infinity of decision quasilinear elliptical equations in unbounded domain.

Работа поддержана РФФИ (09-01-00440-а).

Поступила 31 марта 2010 г.

Очевидно, функции $a_\alpha(\xi) = |\xi|^{m-1}\xi_\alpha,\ \alpha = \overline{1,n},\ \ a(s) = |s|^{q-1}s$ удовлетворяют условиям (1.3)–(1.8) и уравнение (1.1) принимает вид

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(|\nabla u|^{m-1}u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} - |u|^{q-1}u = \sum_{\alpha=1}^{n}(\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha} - \Phi(\mathbf{x}).$$

Работа посвящена исследованию скорости убывания на бесконечности решения задачи (1. 1), (1. 2) с финитной правой частью в зависимости от геометрии неограниченной области Ω.

Изучением поведения на бесконечности решений линейных эллиптических уравнений занимались О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [1], [3], Е.М. Ландис, Г.П. Панасенко [2], В.А. Кондратьев, И. Копачек, Д.М. Леквеишвили и другие (подробный обзор результатов приведен в [4]).

Для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях с некомпактными границами А.Е. Шишковым в работах [5], [6] установлены энергетические априорные оценки решений задачи Дирихле. На их основе доказываются альтернативные теоремы типа Фрагмена–Линделефа о поведении решений на бесконечности. В качестве геометрической характеристики неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ используется функция нелинейной частоты сечений $\gamma(r)$:

$$\nu_m(r) = \inf\left\{ \int\limits_{\gamma(r)} |\nabla_\gamma g|^{m+1} ds \,\middle|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \int\limits_{\gamma(r)} |g|^{m+1} ds \right\}, \quad r > 0,$$

где $\nabla_\gamma g$ — проекция ∇g на плоскость, касательную к $\gamma(r)$ (например, $\gamma(r) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x}| = r\}$).

Л.М. Кожевниковой [7] для областей с некомпактными границами предложено новое понятие, называемое λ-разбиением, которое позволяет получать точные оценки решений краевых задач для линейных эллиптических и параболических уравнений. Это понятие является обобщением понятия λ-последовательности, введенного ранее в работах [4], [8] для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_1 ($\Omega \subset \mathbb{R}_n^+$ и сечение γ_r не пусто при любом $r > 0$), где показано, что использование новой геометрической характеристики дает возможность в ряде случаев устанавливать более сильные результаты, чем ранее известные. Следует отметить, что в работе [9] О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяна авторы, по существу, использовали прототип такой последовательности для системы уравнений теории упругости, однако дальнейшего развития этот подход не получил.

В настоящей работе понятие λ-разбиения обобщено на некоторый класс квазилинейных уравнений второго порядка и в терминах этой геометрической характеристики установлены оценки сверху решения задачи Дирихле (1. 1), (1. 2).

Предполагается, что неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ представлена в виде объединения $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ последовательности вложенных $\Omega^{(N)} \subset \Omega^{(N+1)}$ областей, удовлетворяющих следующим требованиям. Дополнения $\Omega^{(N)}_{(N-1)} = \Omega^{(N)} \setminus \overline{\Omega^{(N-1)}}$ распадаются на конечное число связных компонент $\omega_i^{(N)},\ i = \overline{1, p^{(N)}}:\ \Omega^{(N)}_{(N-1)} = \bigcup\limits_{i=1}^{p^{(N)}} \omega_i^{(N)},\ N = \overline{1,\infty}$. Пересечения $(\partial\Omega^{(N)}) \bigcap \Omega = S^{(N)},\ N = \overline{0,\infty}$, представляют собой конечное число липшицевых гиперповерхностей $S_i^{(N)} = \partial\omega_i^{(N)} \bigcap S^{(N)}$ ($S_i^{(N)}$ могут быть несвязными), $i = \overline{1, p^{(N)}},\ N = \overline{1,\infty}$.

Определим векторы $t^{(N)} = (t_1^{(N)}, ..., t_{p^{(N)}}^{(N)})$ и $\lambda^{(N)} = (\lambda_1^{(N)}, ..., \lambda_{p^{(N)}}^{(N)})$ формулами $t_i^{(N)} = \mathrm{dist}(S_i^{(N)}, \widetilde{S}_i^{(N-1)})$, где $\widetilde{S}_i^{(N-1)} = \partial\omega_i^{(N)} \cap S^{(N-1)}$ и

$$\lambda_i^{(N)} = \inf\left\{ \int\limits_{\omega_i^{(N)}} |\nabla g|^{m+1}\, d\mathbf{x} \,\middle|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \int\limits_{\omega_i^{(N)}} |g|^{m+1}\, d\mathbf{x} = 1 \right\}, \tag{1. 9}$$
$$i = \overline{1, p^{(N)}}, \quad N = \overline{1, \infty}.$$

Будем предполагать, что существует число $\theta > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leqslant \theta\lambda_i^{(N)}(t_i^{(N)})^{m+1}, \quad i = \overline{1, p^{(N)}}, \quad N = \overline{1, \infty}. \tag{1. 10}$$

Описанное выше представление $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ при выполнении неравенств (1. 10) будем называть λ-разбиением области, соответствующим задаче (1. 1), (1. 2) (в дальнейшем просто λ-разбиением).

Для неограниченных областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_1, множества $\Omega^{(N)} = \Omega^{z_N} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid 0 < x_1 < z_N\}$ можно определить с помощью неограниченной возрастающей последовательности положительных чисел $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$. При этом последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ называется λ-последовательностью, а условие (1.10) для разбиения $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{z_N}$ принимает вид

$$1 \leqslant \theta\lambda(z_{N-1}, z_N)\Delta_N^{m+1},\ \Delta_N = z_N - z_{N-1}, \quad N = \overline{1, \infty}, \tag{1. 11}$$

$$\lambda(r_1, r_2) = \inf\left\{ \int\limits_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |\nabla g|^{m+1} d\mathbf{x} \,\middle|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \int\limits_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |g|^{m+1} d\mathbf{x} = 1 \right\}. \tag{1. 12}$$

Здесь и ниже используется обозначение: $\Omega_{r_1}^{r_2} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid r_1 < x_1 < r_2\}$, значения параметров $r_1 = 0$ и $r_2 = \infty$ могут быть опущены.

Приведем простое условие, необходимое и достаточное для существования λ-последовательности (см. следствие к утверждению 3):

$$\text{для любого } r_1 > 0 \text{ найдется } r_2 > r_1 \text{ такое, что } \lambda(r_1, r_2) > 0. \tag{1. 13}$$

Чтобы ограничить влияние функций $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = (\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})),\ \Phi(\mathbf{x})$ на поведение решения, будем считать, что они имеют компактный носитель:

$$\mathrm{supp}\,\mathbf{\Phi} \subset \Omega^{(0)}, \quad \mathrm{supp}\,\Phi \subset \Omega^{(0)}. \tag{1. 14}$$

Теорема 1. *Пусть для области* Ω *существует* λ*-разбиение* $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ *и выполнено условие* (1. 14). *Тогда найдутся положительные числа* $\kappa(\theta, \widehat{a}, \overline{a}, m)$, $M(\theta, \widehat{a}, \overline{a}, \overline{b}, m, \Phi, \mathbf{\Phi})$ *такие, что для решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1. 1), (1. 2) *при* $N \geq 0$ *справедливы оценки*

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega^{(N)}} |u(\mathbf{x})|^{q+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega^{(N)}} |\nabla u(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \leqslant M\exp(-\kappa N). \tag{1. 15}$$

Оценка (1.15) зависит от представления $\Omega = \bigcup\limits_{N=0} \Omega^{(N)}$. Задача оптимизации λ-разбиения достаточно сложная и здесь не решалась, однако для λ-последовательностей этот вопрос рассмотрен. Для областей, расположенных вдоль оси Ox_1, назовем $\overline{\lambda}$-последовательность $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ с $\overline{\theta} > 0$ оптимальной, если для любой λ-последовательности $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ с $\theta > 0$ существует положительная постоянная $C(\theta)$ такая, что при $N \geq 1$ справедлива импликация

$$(x_L \leqslant \overline{x}_N) \Rightarrow (L \leqslant CN). \tag{1. 16}$$

Установлено, что оптимальной является $\overline{\lambda}$-последовательность с минимально возможными интервалами $(\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_{\nu})$, при которых условия (1. 11) не нарушаются (см. утверждение 4).

Рассмотрим область вращения

$$\Omega(f) = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \mid x_1 > 0,\ |\mathbf{x}'| < f(x_1)\} \tag{1. 17}$$

с положительной функцией $f(x_1)$. От функции f требуется только, чтобы множество $\Omega(f)$ было областью.

Для областей вращения вида (1.17), не содержащих полупространства $x_1 > r, \forall r > 0$, утверждение теоремы 1 переформулируем в терминах функции $f(x)$, определяющей область $\Omega(f)$, без привлечения понятия λ-разбиения. Для этого введем понятие П-последовательности.

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ назовем П-последовательностью функции f, если справедливы равенства

$$z_0 = 1, \quad z_j = \sup\left\{ r \,\middle|\, \inf_{[z_{j-1}, r)} f(x) \geq r - z_{j-1} \right\}, \quad j = \overline{1, \infty}. \tag{1. 18}$$

Отметим, что П-последовательность функции f можно построить всегда, она является λ-последовательностью для области $\Omega(f)$ (см. утверждение 5).

Следствием теоремы 1 для областей вращения вида (1.17) является следующее утверждение.

Теорема 2. *Существуют положительные постоянные κ, $\widetilde{M}$ такие, что для решения $u(\mathbf{x})$ задачи* (1. 1), (1. 2) *в области вращения $\Omega(f)$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{\Omega_r(f)} |u(\mathbf{x})|^{q+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_r(f)} |\nabla u(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \leqslant \widetilde{M} \exp\left(-\kappa \int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)} \right), \quad r \geq 1. \tag{1. 19}$$

Если существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [x - f(x),\, x + f(x)]\} \leqslant \omega f(x), \quad x \geq 1, \tag{1. 20}$$

то П-последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ является оптимальной λ-последовательностью для области $\Omega(f)$ (см. утверждение 6). Кроме того, оценка (1. 19) будет того же порядка, что и оценка (1. 15).

В области $\Omega(f_1)$ с функцией $f_1(x) = 1/e,\ 0 < x < e,\ \ f_1(x) = \ln x / x,\ x \geq e$, для решения задачи (1. 1), (1. 2) справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega_r(f_1)} |u(\mathbf{x})|^{q+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_r(f_1)} |\nabla u(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \leqslant M_1 \exp\left(-\kappa_1 r^2 / \ln r \right), \quad r \geq 1.$$

В области $\Omega(f_2)$ с функцией $f_2(x) = e,\ 0 < x < e,\ \ f_2(x) = x / \ln x,\ x \geq e$, для решения задачи (1. 1), (1. 2) установлена оценка

$$\int\limits_{\Omega_r(f_2)} |u(\mathbf{x})|^{q+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_r(f_2)} |\nabla u(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \leqslant M_2 \exp\left(-\kappa_2 \ln^2 r \right), \quad r \geq 1.$$

Для решения задачи Дирихле в случае линейного эллиптического уравнения второго порядка

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} (a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) u_{x_\alpha})_{x_\beta} = \Phi(\mathbf{x}) \tag{1. 21}$$

в классе неограниченных областей, расположенных вдоль оси Ox_1, в работе [4] в терминах λ-последовательности $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ получены оценки

$$\int\limits_{\Omega_{z_N}} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leqslant M \exp(-\kappa N), \quad N \geq 0. \tag{1. 22}$$

Кроме того, для широкого класса областей вращения вида (1.17) установлена их точность. А именно, доказано, что если Π-последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ положительной функции $f(x),\ x > 0$, подчиняется неравенствам

$$\overline{\omega}^{-1} \leqslant \frac{z_{N+2} - z_{N+1}}{z_{N+1} - z_N} \leqslant \overline{\omega}, \quad \overline{\omega} \geq 1, \quad N = \overline{0, \infty},$$

то для неотрицательного решения задачи (1.21), (1.2) в области $\Omega(f)$ существуют положительные числа K, μ такие, что справедливы неравенства

$$\int\limits_{\Omega_{z_N}(f)} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \geq \mu \exp(-KN), \quad N \geq 1.$$

2. Вспомогательные сведения

Через $\|u\|_{p,Q}$ будем обозначать норму в $L_p(Q)$. В случае, когда $p = 2,\ Q = \Omega$, индексы $p,\ Q$ опускаем. Пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^{\infty}(\Omega)$ по норме $\|\nabla v\|_{m+1} + \|v\|_{q+1}$.

Обобщенным решением задачи (1. 1), (1. 2) с $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{(q+1)/q}(\Omega),\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_{(m+1)/m}(\Omega)$ назовем функцию $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) v_{x_\alpha} + a(\mathbf{x}, u) v \right\} d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha v_{x_\alpha} + \Phi v \right\} d\mathbf{x} \tag{2. 1}$$

для любой функции $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$.

Используя условия (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) для функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$, выводим неравенства

$$\|\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u)\|_{(m+1)/m} \leqslant \widehat{a} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x} \right)^{m/(m+1)} = \widehat{a} \|\nabla u\|_{m+1}^{m}, \tag{2. 2}$$

$$\|a(\mathbf{x}, u)\|_{(q+1)/q} \leqslant \widehat{b} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{q+1} d\mathbf{x} \right)^{q/(q+1)} = \widehat{b} \|u\|_{q+1}^{q}. \tag{2. 3}$$

Определение обобщенного решения корректно, поскольку входящие в (2.1) интегралы конечны. Действительно, используя неравенство Гельдера, применяя оценки (2.2), (2.3), для функций $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m+1,q+1}(\Omega)$ выводим

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{n} |a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u)||v_{x_\alpha}| d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u)||\nabla v| d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u)\|_{(m+1)/m} \|\nabla v\|_{m+1} \leqslant \widehat{a} \|\nabla u\|_{m+1}^{m} \|\nabla v\|_{m+1},$$

$$\int\limits_{\Omega} |a(\mathbf{x}, u)||v| d\mathbf{x} \leqslant \|a(\mathbf{x}, u)\|_{(q+1)/q} \|v\|_{q+1} \leqslant \widehat{b} \|u\|_{q+1}^{q} \|v\|_{q+1}.$$

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия* (1.3)–(1.8)*, тогда существует обобщенное решение* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1.1)*,* (1.2) *с вектор-функцией* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_{(m+1)/m}(\Omega)$ *и функцией* $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{(q+1)/q}(\Omega)$.

Доказательство проводится методом галеркинских приближений аналогично доказательству соответствующего утверждения в случае ограниченной области Ω (см. [10, гл.4, §9]).

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия* (1.3)–(1.8)*, тогда обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *единственно. Для решения* $u(\mathbf{x})$ *с* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_{(m+1)/m}(\Omega)$, $\Phi(\mathbf{x}) \in L_{(q+1)/q}(\Omega)$ *справедлива оценка*

$$\|\nabla u\|_{m+1}^{m+1} + \|u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant C(m, \overline{a}, \overline{b}) \left\{ \|\mathbf{\Phi}\|_{(m+1)/m}^{(m+1)/m} + \|\Phi\|_{(q+1)/q}^{(q+1)/q} \right\}. \qquad (2.\ 4)$$

Доказательство. Пусть $u^1,\ u^2$ — обобщенные решения задачи (1.1), (1.2). Запишем тождество (2.1) дважды для $u^1,\ u^2$ и вычтем из первого второе, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u^1) - a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u^2) \right\} v_{x_\alpha} + \left\{ a(\mathbf{x}, u^1) - a(\mathbf{x}, u^2) \right\} v \right) d\mathbf{x} = 0,$$

в котором положим $v = u^1 - u^2 = \delta u$, в результате получим тождество

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u^1) - a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u^2) \right\} (\delta u)_{x_\alpha} + \left\{ a(\mathbf{x}, u^1) - a(\mathbf{x}, u^2) \right\} \delta u \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Применяя (1.3), (1.6), установим неравенство

$$\overline{a} \|\nabla \delta u\|_{m+1}^{m+1} + \overline{b} \|\delta u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant 0,$$

из которого следует $\delta u = u^1 - u^2$ в Ω.

В интегральном тождестве (2. 1) положим $v = u$, применяя (1.3), (1.5), (1.6), (1.8), установим неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \overline{a} |\nabla u|^{m+1} + \overline{b} |u|^{q+1} \right\} d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} \left\{ |\mathbf{\Phi}||\nabla u| + |\Phi||u| \right\} d\mathbf{x}.$$

Далее используя неравенство Гельдера, получим соотношение

$$\overline{a} \|\nabla u\|_{m+1}^{m+1} + \overline{b} \|u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant \|\mathbf{\Phi}\|_{(m+1)/m} \|\nabla u\|_{m+1} + \|\Phi\|_{(q+1)/q} \|u\|_{q+1}.$$

Воспользовавшись неравенством Юнга, выводим соотношение

$$\overline{a} \|\nabla u\|_{m+1}^{m+1} + \overline{b} \|u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant \frac{\overline{a}}{m+1} \|\nabla u\|_{m+1}^{m+1} + \frac{\overline{b}}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} +$$

$$+ \frac{m}{(m+1)\overline{a}^{1/m}} \|\mathbf{\Phi}\|_{(m+1)/m}^{(m+1)/m} + \frac{q}{(q+1)\overline{b}^{1/q}} \|\Phi\|_{(q+1)/q}^{(q+1)/q},$$

из которого следует оценка (2.4).

3. Оценки сверху

В этом параграфе приводятся доказательства теорем 1, 2.

Доказательство теоремы 1. Выберем κ так, чтобы $(m+1)\theta^{1/(m+1)} \kappa e^{\kappa} \widehat{a} \leqslant \overline{a}$. Зафиксируем натуральное число $N \geq 2$. Построим определенную в Ω липшицеву функцию $\xi(\mathbf{x})$, удовлетворяющую условиям

$$\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega^{(0)}}; \\ \exp(-\kappa(N-1)) \min\left(1, \dfrac{\operatorname{dist}(\widetilde{S}_i^{(0)},\ \mathbf{x})}{t_i^{(1)}}\right),\ \mathbf{x} \in \omega_i^{(1)},\ i = \overline{1, p^{(1)}}; \\ \exp(-\kappa(N+1-\nu)) \exp\left(\kappa \min\left(1, \dfrac{\operatorname{dist}(\widetilde{S}_i^{(\nu-1)},\ \mathbf{x})}{t_i^{(\nu)}}\right)\right), \\ \mathbf{x} \in \omega_i^{(\nu)},\ i = \overline{1, p^{(\nu)}},\ \nu = \overline{2, N}; \\ 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega \backslash \Omega^{(N)}. \end{cases}$$

Нетрудно установить следующие соотношения

$$|\nabla \xi| \leqslant \frac{\exp(-\kappa(N-1))}{t_i^{(1)}}, \quad \mathbf{x} \in \omega_i^{(1)}, \quad i = \overline{1, p^{(1)}}; \tag{3. 1}$$

$$|\nabla \xi| \leqslant \frac{\kappa \xi}{t_i^{(\nu)}}, \quad \mathbf{x} \in \omega_i^{(\nu)}, \quad i = \overline{1, p^{(\nu)}}, \quad \nu = \overline{2, N}; \tag{3. 2}$$

$$\max_{\omega_i^{(\nu)}} \xi(\mathbf{x}) = e^{\kappa} \min_{\omega_i^{(\nu)}} \xi(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1, p^{(\nu)}}, \quad \nu = \overline{2, N}; \tag{3. 3}$$

$$\max_{\Omega_{(0)}^{(1)}} \xi(\mathbf{x}) = \exp(-\kappa(N-1)). \tag{3. 4}$$

В интегральном тождестве (2. 1) положим $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{m+1,q+1}(\Omega)$, ввиду того, что $\Phi\xi = 0$, $\mathbf{\Phi}\xi \equiv \mathbf{0}$, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) u_{x_\alpha} + a(\mathbf{x}, u) u \right\} \xi d\mathbf{x} = -\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) u \xi_{x_\alpha} d\mathbf{x}.$$

Далее, применяя условия (1.3)–(1.6), (1.8) выводим

$$\int\limits_{\Omega} \xi \left\{ \overline{a} |\nabla u|^{m+1} + \overline{b} |u|^{q+1} \right\} d\mathbf{x} \leqslant \widehat{a} \int\limits_{\Omega} |u| |\nabla u|^m |\nabla \xi| d\mathbf{x} = I. \tag{3. 5}$$

Используя (3. 1), (3. 2), оценим правую часть последнего неравенства:

$$I = \widehat{a} \int\limits_{\Omega_{(0)}^{(1)}} |u| |\nabla u|^m |\nabla \xi| d\mathbf{x} + \widehat{a} \sum_{\nu=1}^{N-1} \int\limits_{\Omega_{(\nu)}^{(\nu+1)}} |u| |\nabla u|^m |\nabla \xi| d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{a} \sum_{i=1}^{p^{(1)}} \int\limits_{\omega_i^{(1)}} |u| |\nabla u|^m \frac{\exp(-\kappa(N-1))}{t_i^{(1)}} d\mathbf{x} + \widehat{a} \sum_{\nu=2}^{N} \sum_{i=1}^{p^{(\nu)}} \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} |u| |\nabla u|^m \frac{\kappa \xi}{t_i^{(\nu)}} d\mathbf{x}. \tag{3. 6}$$

Установим соотношения

$$\int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{|u| |\nabla u|^m}{t_i^{(\nu)}} d\mathbf{x} \leqslant \theta^{1/(m+1)} \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} |\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x}, \quad i = \overline{1, p^{(\nu)}}, \quad \nu = \overline{1, N}. \tag{3. 7}$$

Для этого достаточно воспользоваться неравенством Юнга и определением λ-разбиения (1. 9), (1. 10), тогда для $i = \overline{1, p^{(\nu)}}$, $\nu = \overline{1, \infty}$ имеем

$$\int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{|u \,||\, \nabla u|^m}{t_i^{(\nu)}} d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{m \varepsilon^{1/m} |\nabla u|^{m+1}}{m+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{|u|^{m+1}}{(m+1)(t_i^{(\nu)})^{m+1} \varepsilon} d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{m\varepsilon^{1/m}|\nabla u|^{m+1}}{m+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{\theta\lambda_i^{(\nu)}|u|^{m+1}}{(m+1)\varepsilon} d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m+1} \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \left(m\varepsilon^{1/m} + \frac{\theta}{\varepsilon} \right) |\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x}.$$

Выбрав $\varepsilon = \theta^{m/(m+1)}$, получаем (3. 7). Ввиду (3. 3), из (3. 7) выводим неравенства

$$\int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \frac{\xi|u||\nabla u|^m}{t_i^{(\nu)}} d\mathbf{x} \leqslant e^{\kappa}\theta^{1/(m+1)} \int\limits_{\omega_i^{(\nu)}} \xi|\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x}, \quad i = \overline{1, p^{(\nu)}}, \quad \nu = \overline{2, N}.$$

Пользуясь (3. 6), (3. 7) и последним соотношением, нетрудно привести (3. 5) к виду

$$\int\limits_{\Omega} \xi \left\{ \overline{a}|\nabla u|^{m+1} + \overline{b}|u|^{q+1} \right\} d\mathbf{x} \leqslant \widehat{a}\theta^{1/(m+1)} \exp(-\kappa(N-1)) \int\limits_{\Omega_{(0)}^{(1)}} |\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x} +$$

$$+ \widehat{a}\kappa\theta^{1/(m+1)} e^{\kappa} \int\limits_{\Omega_{(1)}^{(N)}} \xi|\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x}.$$

Благодаря выбору числа κ последнее неравенство можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega^{(N)}} \left\{ \frac{\overline{a}m}{m+1}|\nabla u|^{m+1} + \overline{b}|u|^{q+1} \right\} d\mathbf{x} \leqslant \widehat{a}\theta^{1/(m+1)} \exp(-\kappa(N-1)) \int\limits_{\Omega_{(0)}^{(1)}} |\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x}.$$

Применив к оценке правой части соотношение (2. 4), устанавливаем неравенство (1. 15). При $N = 0, 1$, оценка (1. 15) также справедлива ввиду ограниченности соответственно сверху левой и снизу правой частей.

Доказательство теоремы 2. Для П-последовательности $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$, ввиду (1. 18), справедливы неравенства

$$\int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{dx}{f(x)} \leqslant \frac{\Delta_j}{\inf\limits_{[z_{j-1}, z_j)} f(x)} \leqslant 1, \quad j = \overline{1, \infty},$$

суммируя которые по $j = \overline{1, N+1}$ выводим

$$\int\limits_{1}^{z_{N+1}} \frac{dx}{f(x)} \leqslant N + 1, \quad N \geq 0. \tag{3. 8}$$

Пусть λ-разбиение определяется П-последовательностью $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$. Соединяя (3. 8), (1. 15), получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega_{z_N}(f)} |u|^{q+1} d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_{z_N}(f)} |\nabla u|^{m+1} d\mathbf{x} \leqslant M e^{\kappa} \exp\left(-\kappa \int\limits_{1}^{z_{N+1}} \frac{dx}{f(x)} \right), \quad N \geq 0. \tag{3. 9}$$

Выберем произвольное $r \geq 1$, зафиксируем $N \geq 0$ такое, что $r \in [z_N, z_{N+1})$, из (3. 9) выводим соотношение (1. 19).

4. λ-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В этом параграфе для областей, расположенных вдоль оси Ox_1, доказывается необходимое и достаточное условие существования λ-последовательности, приводится способ построения λ-последовательности, являющейся оптимальной.

Лемма 1. *Пусть z, a, b, c такие действительные числа, что $0 < z \leqslant a < b \leqslant c$, $\triangle = (z,a) \cup (b,c)$, $|\triangle| = a - z + c - b$, тогда для любой функции $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ при $k \geq 1$ справедливо неравенство*

$$\|g\|_{k,\triangle} \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a}\right)^{1/k} \|g\|_{k,(a,b)} + (c-z)\|g'\|_{k,(z,c)}. \tag{4. 1}$$

Доказательство. Из формулы Ньютона–Лейбница следует неравенство

$$|g(x)| \leqslant |g(y)| + \int\limits_y^x |g'(t)|dt, \quad a \leqslant y < x \leqslant c. \tag{4. 2}$$

Используя неравенство Гельдера, оценим интеграл

$$\int\limits_y^x 1 \cdot |g'(t)|dt \leqslant (x-y)^{(k-1)/k}\|g'\|_{k,(y,x)},$$

тогда неравенство (4. 2) можем записать в виде

$$\begin{gathered} |g(x)| \leqslant |g(y)| + (x-y)^{(k-1)/k}\|g'\|_{k,(y,x)} \leqslant \\ \leqslant |g(y)| + (c-a)^{(k-1)/k}\|g'\|_{k,(a,c)}, \quad a \leqslant y < x \leqslant c. \end{gathered} \tag{4. 3}$$

Применив интегральное неравенство Минковского по $x \in (b,c)$ и $y \in (a,b)$, будем иметь

$$(b-a)^{1/k}\|g\|_{k,(b,c)} \leqslant (c-b)^{1/k}\left\{\|g\|_{k,(a,b)} + (c-a)^{(k-1)/k}(b-a)^{1/k}\|g'\|_{k,(a,c)}\right\}. \tag{4. 4}$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$(b-a)^{1/k}\|g\|_{k,(z,a)} \leqslant (a-z)^{1/k}\left\{\|g\|_{k,(a,b)} + (b-z)^{(k-1)/k}(b-a)^{1/k}\|g'\|_{k,(z,b)}\right\}. \tag{4. 5}$$

Объединив (4. 4) и (4. 5), можем записать

$$(b-a)^{1/k}\|g\|_{k,\Delta} \leqslant |\Delta|^{1/k}\left\{\|g\|_{k,(a,b)} + (c-z)^{(k-1)/k}(b-a)^{1/k}\|g'\|_{k,(z,c)}\right\}.$$

Учитывая то, что $|\triangle| < c - z$, из последнего выводим (4. 1).

Утверждение 3. *Пусть $0 < z \leqslant a < b \leqslant c$, $k = m+1$, $m \geq 1$, тогда*

$$\lambda^{-1/k}(z,c) \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a} + 1\right)^{1/k} \lambda^{-1/k}(a,b) + (c-z). \tag{4. 6}$$

Если дополнительно выполнено условие

$$2 \leqslant \lambda(a,b)(b-a)(c-z)^m, \tag{4. 7}$$

то

$$1 \leqslant 2^k(c-z)^k\lambda(z,c). \tag{4. 8}$$

Доказательство. Применим неравенство (4.1) к интервалам $(a,b) \subset (z,c)$ и функции $g(x_1, \mathbf{x}') \in C_0^\infty(\Omega)$, продолженной нулем вне Ω, по переменной x_1 в следующем виде

$$\|g(\mathbf{x}')\|_{k,\Delta} \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a}\right)^{1/k} \|g(\mathbf{x}')\|_{k,(a,b)} + (c-z)\|D_{x_1}g(\mathbf{x}')\|_{k,(z,c)}, \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}_{n-1}.$$

Применяя интегральное неравенство Минковского по $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}_{n-1}$, находим, что

$$\|g\|_{k,\Omega_z^a \cup \Omega_b^c} \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a}\right)^{1/k} \|g\|_{k,\Omega_a^b} + (c-z)\|\nabla g\|_{k,\Omega_z^c}.$$

Используя неравенство Минковского для сумм, выводим

$$\|g\|_{k,\Omega_z^c} \leqslant \left(\frac{c-z}{b-a}+1\right)^{1/k} \|g\|_{k,\Omega_a^b} + (c-z)\|\nabla g\|_{k,\Omega_z^c}.$$

Применив определение (1.12), получим неравенство (4.6).

Учитывая что $c-z > b-a$, из (4.6) имеем

$$\lambda^{-1/k}(z,c) \leqslant \left[\left(\frac{2}{\lambda(a,b)(b-a)(c-z)^{k-1}}\right)^{1/k} + 1\right](c-z).$$

Из последнего неравенства и условия (4.7) следует (4.8).

Следствие. *Если область удовлетворяет условию* (1. 13), *то λ-последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ существует при произвольном $z_0 > 0$ с числом $\theta \geq 2^{m+1}$.*

Доказательство. Пусть z_{N-1} — элемент λ-последовательности с числом $\theta \geq 2^{m+1}$, и по предположению (1.13) $\lambda(z_{N-1}, z_*) > 0$. В качестве следующего элемента λ-последовательности можно взять произвольное $z_N \geq z_*$, удовлетворяющее неравенству $2 \leqslant \lambda(z_{N-1}, z_*)(z_* - z_{N-1})(z_N - z_{N-1})^m$. Тогда соотношение (1.11) следует из утверждения 3 при $a = z = z_{N-1},\ b = z_*,\ c = z_N$.

Построим специальную $\overline{\lambda}$-последовательность $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ с числом $\overline{\theta} \geq 2^{m+1}$ и покажем, что она является оптимальной. Для этого сначала докажем справедливость неравенства

$$\overline{\lim_{r\to r_2}} \lambda(r_1, r) \leqslant \lambda(r_1, r_2). \tag{4. 9}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем ненулевую функцию $g(\mathbf{x}) \in C_0^{\infty}(\Omega)$ такую, что

$$(\lambda(r_1,r_2)+\varepsilon)\|g(\mathbf{x})\|^{m+1}_{m+1,\Omega_{r_1}^{r_2}} \geq \|\nabla g(\mathbf{x})\|^{m+1}_{m+1,\Omega_{r_1}^{r_2}}.$$

Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, нетрудно установить существование такого числа $\delta > 0$, что

$$(\lambda(r_1,r_2)+2\varepsilon)\|g(\mathbf{x})\|^{m+1}_{m+1,\Omega_{r_1}^{r}} \geq \|\nabla g(\mathbf{x})\|^{m+1}_{m+1,\Omega_{r_1}^{r}}$$

при всех r таких, что $|r - r_2| < \delta$. Отсюда следует, что

$$\lambda(r_1, r) \leqslant \lambda(r_1, r_2) + 2\varepsilon, \quad r : \ |r - r_2| < \delta.$$

Таким образом, неравенство (4.9) установлено.

Пусть построен элемент $\overline{z}_{\nu-1}$, положим

$$\overline{z}_\nu = \inf\{x > \overline{z}_{\nu-1} \mid 1 \leqslant \overline{\theta}\lambda(\overline{z}_{\nu-1}, x)(x - \overline{z}_{\nu-1})^{m+1}\}.$$

Непустота множества под знаком inf при $\overline{\theta} \geq 2^{m+1}$ вытекает из следствия. Благодаря (4.9) имеем неравенство

$$1 \leqslant \overline{\theta}\lambda(\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu)(\overline{z}_\nu - \overline{z}_{\nu-1})^{m+1}. \tag{4. 10}$$

Кроме того, при любом $c \in (\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu)$ выполнено противоположное неравенство

$$1 > \overline{\theta}\lambda(\overline{z}_{\nu-1}, c)(c - \overline{z}_{\nu-1})^{m+1}. \tag{4. 11}$$

Утверждение 4. *Пусть $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольная λ-последовательность с $\theta > 0$, $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ — специальная $\overline{\lambda}$-последовательность с $\overline{\theta} \geq 2^{m+1}$. Тогда найдется число $C(\theta) > 0$ такое, что справедлива импликация* (1.16).

Доказательство. Достаточно установить неравенство

$$\overline{z}_\nu - \overline{z}_{\nu-1} \leqslant D(z_j - z_{j-1}) \tag{4. 12}$$

для вложенных отрезков $[z_{j-1}, z_j] \subset [\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu)$. Действительно, на промежутке $[\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu)$ расположится не более $[D]$ целых отрезков $[z_{j-1}, z_j]$ и, возможно, два нецелых отрезка на концах. Всего отрезок $[\overline{z}_0, \overline{z}_N]$ будет содержать не более $(D+1)N$ отрезков $[z_{j-1}, z_j]$, поэтому справедливо (1.16). Для доказательства неравенства (4.12) установим оценку

$$c - \overline{z}_{\nu-1} \leqslant D(z_j - z_{j-1}) \tag{4. 13}$$

при некотором $c \geq \overline{z}_\nu$.

Положим $D = (2\theta)^{\frac{1}{m}}$, выберем число c_1 из равенства

$$\frac{c_1 - \overline{z}_{\nu-1}}{z_j - z_{j-1}} = D, \tag{4. 14}$$

обеспечивающего (4.13). Тогда, пользуясь определением λ-последовательности (1. 11), выводим

$$\frac{(c_1 - \overline{z}_{\nu-1})^m}{\theta(z_j - z_{j-1})^m} = 2 \geq \frac{2}{\theta\lambda(z_{j-1}, z_j)(z_j - z_{j-1})^{m+1}},$$

и условие (4.7) выполнено при $z = \overline{z}_{\nu-1},\ a = z_{j-1},\ b = z_j,\ c = \max(c_1, z_j)$. Применим утверждение 3, из (4.8) следует, что точка $\overline{z}_\nu$ специальной $\overline{\lambda}$-последовательности должна удовлетворять неравенству $\overline{z}_\nu \leqslant c$. Поскольку $z_j < \overline{z}_\nu$, то $c = c_1$ и (4.13) справедливо. Утверждение доказано.

5. П-последовательности

В этом параграфе доказывается, что П-последовательность является λ-последовательностью, а при дополнительном требовании на функцию f — оптимальной λ-последовательностью.

Лемма 2. *Рассмотрим область* $\Pi_a^{b+} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \mid a < x < b,\ y > 0\}$ *и функцию* $g(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_2)$, *равную нулю в окрестности луча* $\{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \mid x = a,\ y > h\}$. *При* $k \geq 1$ *справедливо обобщенное неравенство Фридрихса–Стеклова*

$$\|g\|_{k,\Pi_a^{b+}} \leqslant 3^{1/k}(b-a)\|D_x g\|_{k,\Pi_a^{b+}} + 2h\|D_y g\|_{k,\Pi_a^{b+}}. \tag{5. 1}$$

Доказательство. Ввиду того, что $g(a,y) = 0$ при $y > h$, неравенство (4.3) запишем в виде

$$|g(x,y)| \leqslant (b-a)^{(k-1)/k}\|D_x g(y)\|_{k,(a,b)}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Из последнего неравенства выводим:

$$\|g\|_{k,(a,b)\times(h,\infty)} \leqslant (b-a)\|D_x g\|_{k,(a,b)\times(h,\infty)}. \tag{5. 2}$$

Далее, при каждом $x,\ x \in (a,b)$, из неравенства (4. 1) при $z = 0,\ a = h,\ b = c = 2h$ получаем

$$\|g(x)\|_{k,(0,h)} \leqslant 2^{1/k}\|g(x)\|_{k,(h,2h)} + 2h\|D_y g(x)\|_{k,(0,2h)}.$$

Пользуясь интегральным неравенством Минковского по $x \in (a,b)$, выводим

$$\|g\|_{k,(a,b)\times(0,h)} \leqslant 2^{1/k}\|g\|_{k,(a,b)\times(h,2h)} + 2h\|D_y g\|_{k,(a,b)\times(0,2h)}. \tag{5. 3}$$

Объединяя неравенства (5. 2) и (5. 3), пользуясь неравенством Минковского для сумм, установим неравенство (5. 1).

Утверждение 5. П-*последовательность* $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ *функции* $f(x)$ *является* λ-*последовательностью для области вращения* $\Omega(f)$.

Доказательство. Для каждого $s = \overline{2,n}$ рассмотрим область типа слоя

$$\Omega[f,s] = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \mid x_1 > 0,\ |x_s| < f(x_1)\},$$

с положительной функцией $f(x_1)$.

Зафиксируем номер $j \in \mathbb{N}$. Функцию $g(x_1, \mathbf{x}') \in C_0^\infty(\Omega[f,s])$ продолжим на все $\mathbb{R}_n$ нулем за пределы $\Omega[f,s]$. Пусть точка $\widehat{z}_j \in [z_{j-1}, z_j]$ такая, что $\inf\limits_{[z_{j-1},z_j]} f(x) = f(\widehat{z}_j)$, тогда из (1. 18) следует

$$f(\widehat{z}_j) \leqslant \Delta_j. \tag{5. 4}$$

Введем обозначения:

$$\Pi_a^b = \{(x_1, x_s) \in \mathbb{R}_2 \mid a < x_1 < b\},$$

$$\Pi_a^{b\pm} = \{(x_1, x_s) \in \mathbb{R}_2 \mid a < x_1 < b, \ \pm x_s > 0\}.$$

Воспользовавшись неравенством (5. 1) при $k = m+1$, $m \geq 1$, для полуполосы $\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}$, получим

$$\|g(\mathbf{x}'')\|_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}} \leqslant 2\Delta_j \|D_{x_1} g(\mathbf{x}'')\|_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}} + 2f(\widehat{z}_j)\|D_{x_s} g(\mathbf{x}'')\|_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}},$$

$x'' = (x_2, ..., x_{s-1}, x_{s+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}_{n-2}$. Применив (5. 4), выводим

$$\|g(\mathbf{x}'')\|^k_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}} \leqslant 4^k \Delta_j^k \|\nabla g(\mathbf{x}'')\|_{k,\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j+}}.$$

Установив аналогичные неравенства для областей $\Pi_{z_{j-1}}^{\widehat{z}_j-}$, $\Pi_{\widehat{z}_j}^{z_j+}$, $\Pi_{\widehat{z}_j}^{z_j-}$, сложив эти четыре неравенства и проинтегрировав по x'', получим соотношение

$$\|g\|^k_{k,\Omega_{z_{j-1}}^{z_j}[f,s]} \leqslant 4^k \Delta_j^k \|\nabla g\|^k_{k,\Omega_{z_{j-1}}^{z_j}[f,s]}.$$

Из него следует оценка

$$1 \leqslant 4^{m+1} \Delta_j^{m+1} \lambda(z_{j-1}, z_j; \Omega[f,s]).$$

Поскольку $\Omega(f) \subset \Omega[f,s]$, то $\lambda(a,b;\Omega[f,s]) \leqslant \lambda(a,b;\Omega(f))$. Это следует из того, что для $\Omega(f)$ сужается множество, по которому берется инфимум в (1. 12). Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Если выполнено условие* (1. 20)*, то* П*-последовательность* $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ *функции* $f(x)$ *является оптимальной* λ*-последовательностью для* $\Omega(f)$*. При этом для области* $\Omega(f)$ *вида* (1. 17) *оценка* (1.19) *решения задачи* (1. 1), (1. 2) *будет того же порядка, что и оценка* (1. 15).

Доказательство. При доказательстве утверждения П-последовательность $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ и связанные с ней атрибуты будем помечать чертой сверху. Сначала установим для П-последовательности импликацию (1. 16). Зафиксируем натуральное ν. Обозначим через $\widehat{\overline{z}}_\nu$ любую точку отрезка $[\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu]$ такую, что $\inf\limits_{[\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu]} f(x) = f(\widehat{\overline{z}}_\nu)$. Применяя условие (1.20), находим вблизи $\widehat{\overline{z}}_\nu$ точку $\overline{z}_\nu^* \in [\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu)$ такую, что

$$f(\overline{z}_\nu^*) \leqslant \omega f(\widehat{\overline{z}}_\nu). \tag{5. 5}$$

Из определения П-последовательности следуют неравенства

$$\overline{\Delta}_\nu \leqslant \inf_{[\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu)} f(x) \leqslant f(\overline{z}_\nu^*), \tag{5. 6}$$

$$f(\widehat{\overline{z}}_\nu) \leqslant \overline{\Delta}_\nu. \tag{5. 7}$$

Соединяя (5. 6) и (5. 5), выводим

$$\overline{\Delta}_\nu \leqslant \omega f(\widehat{\overline{z}}_\nu). \tag{5. 8}$$

Пользуясь (5. 6), из неравенства (1. 20) при $x = \overline{z}_\nu^*$ находим, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [\overline{z}_\nu^* - \overline{\Delta}_\nu, \overline{z}_\nu^* + \overline{\Delta}_\nu]\} \leqslant \omega f(\overline{z}_\nu^*).$$

Ввиду включений $[\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu] \subset [\overline{z}_\nu^* - \overline{\Delta}_\nu, \overline{z}_\nu^* + \overline{\Delta}_\nu]$, применяя (5. 5), устанавливаем справедливость неравенств

$$f(\widehat{\overline{z}}_\nu) \leqslant f(x) \leqslant \omega f(\overline{z}_\nu^*) \leqslant \omega^2 f(\widehat{\overline{z}}_\nu), \quad x \in [\overline{z}_{\nu-1}, \overline{z}_\nu]. \tag{5. 9}$$

Далее, для любого отрезка $[a,b]\subset[\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu]$ докажем неравенства

$$\frac{\delta_1}{f^{m+1}(\widehat{\overline{z}}_\nu)}\leqslant\lambda(a,b;\Omega(f))\leqslant\frac{\delta_2}{f^{m+1}(\widehat{\overline{z}}_\nu)},\tag{5. 10}$$

с положительными числами δ_1,δ_2, не зависящими от ν.

Положим $h=\omega^2 f(\widehat{\overline{z}}_\nu)$, тогда из (5. 9) следуют неравенства $\lambda(a,b;\Omega(f))\geq\lambda(a,b;\Omega[f,s])\geq$ $\geq\lambda(a,b;\Omega[h,s])$, $s=\overline{2,n}$. Совершая замену переменных $x_s=hy_s$, полагая $v(x_1,...,y_s,...,x_n)=g(x_1,...,x_s,...,x_n)$, получим

$$\lambda(a,b;\Omega[h,s])\geq\inf_{v(x_1,...,y_s,...,x_n)\in C_0^\infty(\Omega[1,s])}\frac{\int\limits_{\Omega_a^b[1,s]}|D_{y_s}v|^{m+1}dx_1...dy_s...dx_n}{h^{m+1}\int\limits_{\Omega_a^b[1,s]}|v|^{m+1}dx_1...dy_s...dx_n}=\frac{\delta_1}{f^{m+1}(\widehat{\overline{z}}_\nu)}.$$

Чтобы доказать правое неравенство (5.10), положим $h=f(\widehat{\overline{z}}_\nu)$, тогда справедливы неравенства

$$\lambda(a,b;\Omega(f))\leqslant\lambda(a,b;\Omega(h)).$$

Далее, нетрудно показать, что

$$\lambda(a,b;\Omega(h))=\inf_{g(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega(h))}\frac{\int\limits_{\Omega_a^b(h)}|\nabla g|^{m+1}d\mathbf{x}}{\int\limits_{\Omega_a^b(h)}|g|^{m+1}d\mathbf{x}}=\inf_{g(\mathbf{x}')\in C_0^\infty(B(h,\mathbf{0}'))}\frac{\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}|\nabla' g|^{m+1}d\mathbf{x}'}{\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}|g|^{m+1}d\mathbf{x}'}.$$

Совершая замену переменных $\mathbf{x}'=h\mathbf{y}'$, полагая $v(\mathbf{y}')=g(\mathbf{x}')$, оценим величину

$$\lambda(a,b;\Omega(h))=\frac{1}{h^{m+1}}\inf_{v(\mathbf{y}')\in C_0^\infty(B(1,\mathbf{0}'))}\frac{\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}|\nabla' v|^{m+1}d\mathbf{y}'}{\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}|v|^{m+1}d\mathbf{y}'}=\frac{\delta_2}{h^{m+1}},$$

где $\nabla' v=(D_{y_2}v,...,D_{y_n}v)$. Неравенства (5. 10) доказаны.

Пусть $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ — произвольная λ-последовательность с $\theta>0$. Для вложенных отрезков $[z_{j-1},z_j]\subset[\overline{z}_{\nu-1},\overline{z}_\nu]$ из определения λ-последовательности (1. 11) и неравенств (5. 10), (5. 8) вытекают оценки

$$\Delta_j^{m+1}\geq\frac{1}{\theta\lambda(z_{j-1},z_j)}\geq\frac{f^{m+1}(\widehat{\overline{z}}_\nu)}{\theta\delta_2}\geq\frac{\overline{\Delta}_\nu^{m+1}}{\theta\delta_2\omega^{m+1}},$$

из которых следуют неравенства $\overline{\Delta}_\nu\leqslant D\Delta_j$. Таким образом, для рассматриваемой П-последовательности $\{\overline{z}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ и произвольной λ-последовательности $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ справедливо неравенство (4. 12). Повторяя рассуждения утверждения 4, устанавливаем импликацию (1. 16).

Для доказательства второй части утверждения достаточно установить неравенства

$$\alpha_1\int\limits_1^r\frac{dx}{f(x)}\leqslant N\leqslant\alpha_2\int\limits_1^r\frac{dx}{f(x)},\tag{5. 11}$$

при $r\in[\overline{z}_N,\overline{z}_{N+1})$, $N\geq1$. Левая часть неравенства (5.11) следует из (3.8). Применяя (5. 9), (5. 7), выводим

$$\int\limits_{\overline{z}_{\nu-1}}^{\overline{z}_\nu}\frac{dx}{f(x)}\geq\frac{\overline{\Delta}_\nu}{\omega^2 f(\widehat{\overline{z}}_\nu)}\geq\frac{1}{\omega^2},\quad\nu=\overline{1,\infty}.\tag{5. 12}$$

Просуммировав по $\nu=\overline{1,N}$ последние неравенства, устанавливаем правую часть (5. 11).

Авторы выражают искреннюю благодарность Ф.Х. Мукминову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей* // Матем. сб. 1980. Т. 112, № 4. С. 588–610.
2. Ландис Е.М., Панасенко Г.П. *Об одном варианте типа Фрагмена-Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной* // Труды сем. им. И.Г. Петровского. 1979. Вып. 5. С. 105–136.
3. Кондратьев В.А., Копачек И., Лекевеишвили Д.М., Олейник О.А. *Неулучшаемые оценки в пространствах Гельдера и точный принцип Сен-Венана для решений бигармонического уравнения* // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 166. С. 91–106.
4. Кожевникова Л.М. *Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Матем. сб. 2008. Т. 199, №8. С. 61–94.
5. Тедеев А.Ф., Шишков А.Е. *О качественных свойствах решений и субрешений квазилинейных эллиптических уравнений* // Изв. вузов. 1984. Матем. №1. С. 62–68.
6. Шишков А.Е. *Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях* // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28, №6. С. 134–146.
7. Кожевникова Л.М. *О существовании и единственности решений задачи Дирихле для псевдодифференциальных эллиптических уравнений в областях с некомпактными границами* // Уфимск. матем. журн. 2009. Т.1, №1. С. 38–68.
8. Кожевникова Л.М. *Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений* // Изв. РАН. 2006. Т. 70, №6. С. 93–128.
9. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О единственности решения смешанной задачи для уравнений теории упругости в неограниченной области* // УМН. 1976. Т. 31, №5. С. 247–248.
10. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973.

Лариса Михайловна Кожевникова,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: kosul@mail.ru

Руслан Халикович Каримов,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: ruslan7k7@mail.ru