ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 2 (2010). С. 27-40.

УДК 517.5

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ЛАКУНАРНЫЕ В СМЫСЛЕ ФЕЙЕРА

А.М. ГАЙСИН, Ж.Г. РАХМАТУЛЛИНА

Аннотация. Изучаются наиболее часто используемые в теории целых функций и рядов экспонент характеристики распределения положительных неограниченно возрастающих последовательностей.
Доказаны эквивалентные утверждения, интерпретирующие заданную характеристику.

Ключевые слова: целые функции, ряды экспонент, индекс конденсации, считающая функция.

1. Введение

Пусть $\{p_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty\,.$$

В этом случае говорят, что последовательность $\{p_n\}$ имеет лакуны Фейера. Аналогично, целая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

имеет лакуны Фейера, если последовательность $S(f) = \{n \geqslant 1\colon c_n \neq 0\}$ имеет лакуны Фейера.

Хорошо известно, что целая функция с лакунами Фейера принимает каждое комплексное значение бесконечно много раз [1]. При некоторых дополнительных условиях на концентрацию последовательности $\{p_n\}$ у соответствующей целой функции появляется ряд других интересных свойств, например, хорошее асимптотическое поведение на вещественной оси (см., например, в [2]).

Здесь будут рассматриваться более общие последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, удовлетворяющие условию

$$S_\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty\,. \tag{1}$$

В этом случае будем также говорить, что данная последовательность имеет лакуны Фейера.

Отметим ряд фактов, непосредственно связанных с условием (1).

Пусть I — любой отрезок, не параллельный мнимой оси. Для того, чтобы система экспонент $E_\Lambda = \{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Lambda}$ была не полна в $C(I)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

A.M. Gaisin, Zh.G. Rakhmatullina, Real Sequences with Fejér Gaps.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00779-а), НШ-3081-2008.1.

Поступила 31 марта 2010 г.

условие (1) (если I — отрезок мнимой оси, неполнота системы E_Λ в $C(I)$ может иметь место и при $S_\Lambda = \infty$ [3]) [4].

Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it) \tag{2}$$

— ряд Дирихле, сходящийся во всей комплексной плоскости. Если $F \not\equiv 0$, то из (1) следует, что $\sup\limits_{\sigma \in \mathbb{R}_+} |F(\sigma)| = \infty$ [5].

Предположим дополнительно, что

$$\int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2}\, dt < \infty\,, \tag{3}$$

где $c(t) = \max\limits_{\lambda_n \leqslant t} q_n,\ q_n = -\ln |g'(\lambda_n)|$,

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{4}$$

Справедливы утверждения:

1. Для того, чтобы для любой функции F вида (2) при $\sigma \to \infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой плотности имело место асимптотическое равенство
$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(\sigma)|\,,$$
необходимо [2] и достаточно [6], чтобы выполнялись условия (1) и (3).
2. Пусть выполняется условие (3). Если
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \ln \frac{\lambda_n}{n} < \infty\,, \tag{5}$$
то при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества нулевой плотности [6]
$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \min_{|t| \leqslant h} |F(\sigma + it)|\,.$$
Здесь $M_F(\sigma) = \sup\limits_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$.

Цель статьи — в более простых терминах дать интерпретацию наиболее часто встречающимся в подобных утверждениях характеристикам распределения последовательности Λ.

2. Предварительные сведения

Приведем все основные определения и обозначения, необходимые в дальнейшем.

Пусть L — класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $l = l(x)$ таких, что $0 < l(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$ (здесь и далее символы $\uparrow$ и $\downarrow$ означают соответственно возрастание и убывание),

$$W = \left\{ w \in L\colon \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}\, dx < \infty \right\}, \quad \Omega = \left\{ w \in W\colon \frac{w(x)}{x} \downarrow \text{ при } x \to \infty \right\}.$$

Введем в рассмотрение также множество

$$W_l = \left\{ w \in W\colon \int_1^{\infty} \frac{w_l(x)}{x^2}\, dx < \infty\,,\ \text{где } w_l(x) = w(x) \ln^+ \frac{x}{w(x)} \right\},\ a^+ = \max\{0,\, a\}.$$

В статье наряду с W и W_l будут использованы символы W_m и W_{lm} для обозначения классов неубывающих (не обязательно непрерывных) на $\mathbb{R}_+$ функций, для которых конечны соответствующие интегралы (они те же, что и для классов W и W_l).

Пусть $n(t)$ — считающая функция последовательности Λ (число точек λ_n, не превосходящих t). Так что $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Заметим, что данная функция неубывающая и непрерывна справа. Наряду с $n(t)$ обычно рассматривается и функция

$$N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}\, dx\,.$$

Через $G = \{\omega\}$ будем обозначать семейства полуинтервалов ω вида $[\,a,\, b)$. Считаем, что длина $|\omega|$ каждого полуинтервала ω из G положительна и конечна. Всякая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ порождает целочисленную считающую меру

$$\mu_\Lambda(\omega) = \sum_{\lambda_j \in \omega} 1\,, \quad \omega \in G\,.$$

Пусть μ_M — аналогичная мера, порожденная последовательностью $M = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$. Тогда включение $\Lambda \subset M$ означает, что $\mu_\Lambda(\omega) \leqslant \mu_M(\omega)$ для любого $\omega \in G$.

Пусть $J = \{\omega_j\}_{j=-1}^{\infty}$ система полуинтервалов ω_j, где $\omega_{-1} = [\,0,\, 1)$, $\omega_j = [\,2^j,\, 2^{j+1})$ $(j \geqslant 0)$, $\omega_j = \varnothing$ при $j < -1$. Через Λ' обозначим какую-нибудь подпоследовательность Λ. Для любого $\lambda \in \Lambda'$ найдется полуинтервал $\omega_k \in J$, содержащий λ. Обозначим $\omega'_k = \omega_{k-1} \cup \omega_k \cup \omega_{k+1}$ $(\lambda \in \omega_k)$. Пусть $J' = \{\omega'_k\}_{\lambda \in \Lambda'}$. Ясно, что в системе J' каждый полуинтервал ω'_k может пересекаться не более, чем с четырьмя полуинтервалами из J'.

Будем говорить, что Λ' является l-регулярной подпоследовательностью последовательности Λ, если существует функция $w \in W_l$ такая, что для любого полуинтервала $\omega \in J'$

$$\mu_\Lambda(\omega) \leqslant w\Big(\frac{|\omega|}{2}\Big)\,,$$

$|\omega|$ — длина ω, $\mu_\Lambda(\omega)$ — число точек Λ, попавших в ω.

Пусть g — целая функция экспоненциального типа, определенная формулой (4), которая, очевидно, имеет минимальный тип при порядке единица. Так как $g(0) = 1$, то согласно известной теореме Йенсена

$$N(r) \equiv \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln|g(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant \ln M_g(r)\,,$$

где $M_g(r) = \max\limits_{|z|=r} |g(z)|$. Отсюда следует, что $n(r) \leqslant N(er) = \ln M_g(er)$, и (см. также в [7], гл. I, §1.10)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln M_g(r)}{r} = 0\,.$$

Далее, условие (1) равносильно сходимости интеграла [8] (гл. I, §1, следствие из теоремы 1.1.6)

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln M_g(r)}{r^2}\, dr\,.$$

Так как

$$\sum_{\lambda_n\leqslant R}\frac{1}{\lambda_n}=\int\limits_0^R\frac{dn(t)}{t}=\frac{n(R)}{R}+\int\limits_0^R\frac{n(t)}{t^2}\,dt=$$

$$\frac{n(R)}{R}+\int\limits_0^R\frac{dN(t)}{t}=\frac{n(R)}{R}+\frac{N(R)}{R}+\int\limits_0^R\frac{N(r)}{r^2}\,dr\,,$$

то в предположении (1)

$$\int\limits_0^\infty\frac{n(r)}{r^2}\,dr=\int\limits_0^\infty\frac{N(r)}{r^2}\,dr=S_\Lambda<\infty\,. \qquad (6)$$

Таким образом, при условии (1) функции $n(r)$, $N(r)$ и $\ln M_q(r)$ принадлежат одному классу сходимости [7] (гл. I, §1.7).

В дальнейшем нам понадобится следующая элементарная

Лемма 1. *Справедливы утверждения:*

1) *если* $|a|\geqslant 1$, *то* $\ln(1+u^2)\leqslant a^2\ln\Bigl(1+\dfrac{u^2}{a^2}\Bigr)$ *для всех* $u\in\mathbb{R}$;
2) *если* $|a|\leqslant 1$, *то* $a^2\ln\Bigl(1+\dfrac{u^2}{a^2}\Bigr)\leqslant\ln(1+u^2)$ *для всех* $u\in\mathbb{R}$;
3) *функция* $\varphi(u)=u\ln\dfrac{a}{u}$ $(a>0)$ *возрастает при* $0<u<\dfrac{a}{e}$.

Утверждения 1, 2 есть простая переформулировка известного неравенства Бернулли [9]:
а) если $x\geqslant -1$ и $0<\alpha\leqslant 1$, то $(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x$;
б) если же $\alpha<0$ или $\alpha\geqslant 1$, то $(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$.

Третье утверждение проверяется непосредственно.

3. Основные свойства характеристик распределения

Пусть Λ — последовательность, удовлетворяющая условию Фейера (1). Справедлива

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

а) $S_{\Lambda,\,l}=\sum\limits_{n=1}^\infty\lambda_n^{-1}\ln\dfrac{\lambda_n}{n}<\infty$;
б) $I_\Lambda(n)=\int\limits_0^\infty\dfrac{n(t)}{t^2}\ln\dfrac{t}{n(t)}\,dt<\infty$;
в) $I_\Lambda(N)=\int\limits_0^\infty\dfrac{N(t)}{t^2}\ln\dfrac{t}{N(t)}\,dt<\infty$;
г) $I_\Lambda(w)=\int\limits_1^\infty\dfrac{w(t)}{t^2}\ln\dfrac{t}{w(t)}\,dt<\infty$, *где* $w(t)=\ln M_g(t)$.

Данное утверждение не новое (см., например, в [6], [10]). Здесь приведем лишь краткое обоснование импликаций с уточнением некоторых оценок.

1°. Равносильность а и б. Проверяется, что для любого $n\geqslant 1$

$$I_n=\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\frac{n(t)}{t^2}\ln\frac{t}{n(t)}\,dt=n\left(\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}-\frac{\ln\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}}\right)-(n-n\ln n)\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\,,$$

отсюда

$$I_\Lambda(n) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} - \frac{c_n}{\lambda_n} \right) ,$$

где $c_1 = 1$, $c_n = 1 - \ln \dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$. Следовательно, $I_\Lambda(n) = S_{\Lambda,l} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n + \ln n}{\lambda_n}$. Но по формуле Стирлинга при больших значениях n

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta(n)} , \quad |\theta(n)| < \frac{1}{12n} .$$

Отсюда следует, что $c_n + \ln n = o(1)$ при $n \to \infty$. Значит,

$$|I_\Lambda(n) - S_{\Lambda,l}| \leqslant \mathrm{const}\, S_\Lambda < \infty ,$$

что означает эквивалентность а и б.

2°. Из г следует в, из в следует б. Действительно, согласно неравенству Йенсена

$$n\Big(\frac{t}{e}\Big) \leqslant N(t) \leqslant w(t) , \quad w(t) = \ln M_g(t) . \tag{7}$$

Значит, учитывая утверждение 3 леммы 1, при $t \geqslant t_0$ получаем, что

$$n\Big(\frac{t}{e}\Big) \ln \frac{t}{n(\frac{t}{e})} \leqslant N(t) \ln \frac{t}{N(t)} \leqslant w(t) \ln \frac{t}{w(t)} .$$

Отсюда все и следует.

3°. Из б следует в. Так как согласно (7) $n(\frac{t}{e}) \leqslant N(t)$, достаточно доказать сходимость интеграла

$$J_1 = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{N(t)}{t^2} \ln \frac{t}{n(t)}\, dt = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{n(x)}{x} \bigg(\int_{x}^{\infty} \frac{1}{t^2} \ln \frac{t}{n(t)}\, dt \bigg)\, dx .$$

Пользуясь определением функции $n(t)$, в [10] показано, что

$$J_2 = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{t^2} \ln \frac{t}{n(t)}\, dt \leqslant \frac{1}{x} + \frac{\ln \frac{x}{n(x)}}{x} \quad (x \geqslant \lambda_1) .$$

Следовательно, учитывая (6), получаем, что

$$J_1 \leqslant S_\Lambda + I_\Lambda(n) < \infty .$$

4°. Из в следует г. Для $t \geqslant 0$ имеем

$$w(t) = \int_0^{\infty} \ln\Big(1 + \frac{t^2}{x^2}\Big)\, dn(x) .$$

Отсюда, интегрируя по частям и оценивая сверху интеграл, который берется по отрезку $[\,0,\, 2t]$, получаем, что

$$w(t) \leqslant 2N(2t) + 2 \int_{2t}^{\infty} K(x,\, t)\, dx = 2N(2t) + 2A ,$$

где $K(x,\, t) = \dfrac{n(x)}{x} \dfrac{t^2}{x^2 + t^2}$. Но

$$A = \sum_{j=2}^{\infty} \bigg(\int_{2^{j-1}t}^{2^j t} K(x,\, t)\, dx \bigg) \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{4^{j-1}} \int_{2^{j-1}}^{2^j} \frac{n(x)}{x}\, dx ,$$

значит,

$$w(t) \leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^{j-1}} \int_0^{2^j t} \frac{n(x)}{x}\,dx = 8\sum_{j=1}^{\infty} \frac{N(2^j t)}{4^j}\,,$$

следовательно,

$$I_\Lambda(w) \leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j}\left(\int_1^{\infty} \frac{N(2^j t)}{t^2} \ln\frac{t}{w(t)}\,dt\right).$$

Отсюда после замены переменной $\tau = 2^j t$ получим оценку, которую запишем в виде

$$I_\Lambda(w) \leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\left(\int_{2^j}^{\infty} \frac{N(\tau)}{\tau^2} \ln\frac{2^j\tau}{4^j w\left(\frac{\tau}{2^j}\right)}\,d\tau\right). \tag{8}$$

Воспользуемся теперь леммой 1, полагая $a = 2^j$. Тогда

$$4^j \ln\left(1+\frac{u^2}{4^j}\right) \geqslant \ln(1+u^2) \quad (u \geqslant 0)\,.$$

Следовательно,

$$4^j w\left(\frac{\tau}{2^j}\right) \geqslant w(\tau) \geqslant N(\tau)\,.$$

Учитывая (6) и последнюю оценку, из (8) имеем

$$I_\Lambda(w) \leqslant 8I_\Lambda(N) + 8\ln 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} S_\Lambda < \infty\,.$$

Значит, из б следует в, и все доказано.

Полезным доплнением к теореме 1 является

Теорема 2. *Верны утверждения:*

1. *Функция w принадлежит W (или W_m) тогда и только тогда, когда функция $Aw(Bt)+C$ принадлежит W (или W_m). Здесь A, B, C — положительные и конечные постоянные. Аналогичное утверждение справедливо и для класса W_l (или W_{lm});*
2. *Функция $w \in L$ принадлежит классу W (или W_m) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{w(2^j)}{2^j} < \infty\,.$$

Аналогичное утверждение верно и для класса W_l (или W_{lm});

3. *Для любой функции $w \in L$ интегралы*

$$J(w) = \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}\,dx\,, \qquad J(N_w) = \int_1^{\infty} \frac{N_w(x)}{x^2}\,dx\,,$$

а также интегралы $I_l(w)$ и $I_l(N_w)$ сходятся или расходятся попарно одновременно. Здесь $I_l(\psi) = J(\psi_l)$, $\psi_l(x) = \psi(x)\ln^+\dfrac{x}{\psi(x)}$ $(\psi \in L)$,

$$N_w(x) = \int_{\mu_1}^{x} \frac{w(t)}{t}\,dt\,, \quad \mu_1 = \min\{t\colon w(t) \geqslant 1\}\,.$$

4. *Каждое из условий а–г теоремы 1 эквивалентно утверждению: существует функция $w \in W_l$ такая, что*
$$\mu_\Lambda(\omega_j) \leqslant w(|\omega_j|) \quad (j \geqslant -1)\,,$$
где $\mu_\Lambda(\omega_j)$ — число точек $\lambda \in \Lambda$ из полуинтервала ω_j, где $\omega_{-1} = [0,\, 1)$, $\omega_j = [2^j,\, 2^{j+1})$ при $j \geqslant 0$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 очевидны. В 2 следует только учесть оценки
$$\frac{w(2^j)}{2^j} = 2w(2^j)\int\limits_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{dt}{t^2} \leqslant 2\int\limits_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{w(t)}{t^2}\,dt \leqslant 2\frac{w(2^{j+1})}{2^{j+1}}\,.$$

Предложение 3 есть следствие теоремы 1. Действительно, для любой функции $w \in L$ положим $\mu(t) = [w(t)]$ ($[a]$ — целая часть числа a). Тогда $\mu(t)$ — считающая функция последовательности $\{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$, где μ_n — корень уравнения $w(t) = n$. Так как $|w(t) - \mu(t)| \leqslant 1$, $|N_w(t) - N_\mu(t)| \leqslant \ln\frac{t}{\mu_1}$, то все следует из теоремы 1 и свойства 1 данной теоремы.

Наконец, докажем 4. Пусть, например, выполняется условие б теоремы 1, то есть $I_\Lambda(n) < \infty$. Тогда найдется функция $w_1 \in L$ такая, что $n(t) \leqslant w_1(t) \leqslant n(t) + 1$. Так что $I_l(w_1) < \infty$. Положим $w(t) = w_1(2t)$, тогда $I_l(w) < \infty$, и $\mu(\omega_j) \leqslant n(2^{j+1}) \leqslant w(2^j) = w(|\omega_j|)$ $(|\omega_j| = 2^j)$. Ясно, что данная оценка верна для всех $j \geqslant -1$. В силу свойства 3 леммы 1 и утверждения 1 данной теоремы заключаем, что $I_l(w) < \infty$, то есть $w \in W_l$.

Обратно, пусть $\mu_\Lambda(\omega_j) \leqslant w(|\omega_j|)$ $(j \geqslant -1)$, $w \in W_l$, тогда
$$n(2^m) = \sum_{j=1}^{m} \mu_\Lambda(\omega_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} w(2^j) \leqslant \int\limits_{1}^{m+1} w(2^t)\,dt = \frac{1}{\ln 2}\int\limits_{2}^{2^{m+1}} \frac{w(x)}{x}\,dx\,.$$
Следовательно, $n(2^m) \leqslant c\,N_w(2^{m+1})$, $c = \frac{1}{\ln 2}$. Значит (это следует из леммы 1),
$$n(2^m)\ln\frac{2^m}{n(2^m)} \leqslant c\,N_w(2^{m+1})\ln\frac{2^{m+1}}{2c\,N_w(2^{m+1})}\,.$$
Так как $I_l(w) < \infty$, то согласно предыдущему свойству $I_\Lambda(n) < \infty$.

Теорема 2 доказана полностью. □

Замечание 1. Введенное выше понятие l-регулярности подпоследовательности $\Lambda' \subset \Lambda$ в случае $\Lambda' = \Lambda$ равносильно условиям а–г теоремы 1 и условию 4 теоремы 2. В общем случае l-регулярность Λ' есть более слабое требование, чем каждое из условий а–г и 4.

Пусть $M = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$ — подпоследовательность всех точек Λ, принадлежащих множеству $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda'} \omega'_k$, где $\omega'_k = \omega_{k-1} \cup \omega_k \cup \omega_{k+1}$, а ω_k — тот полуинтервал, который содержит λ. Тогда последовательность Λ' l-регулярна тогда и только тогда, когда последовательность M удовлетворяет условиям а–г теоремы 1 (или условию 4 теоремы 2).

Замечание 2. Условие
$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^+ \ln \lambda_n}{\lambda_n} < \infty$$
сильнее, чем условие а теоремы 1. Действительно, если $J < \infty$, то $S_{\Lambda,\,l} < \infty$ (условие а). Убедимся в этом.

Имеем $S_{\Lambda,\,l} = S_1 + S_2$, где
$$S_1 = \sum_{n \in I_1} a_n,\;\; S_2 = \sum_{n \in I_2} a_n,\;\; a_n = \lambda_n^{-1}\ln\frac{\lambda_n}{n},\;\; I_1 = \Bigl\{n\colon \frac{\lambda_n}{\ln^2\lambda_n} \leqslant n\Bigr\},\;\; I_2 = \mathbb{N} \setminus I_1.$$

Поскольку $\ln \frac{\lambda_n}{n} \leqslant 2 \ln\ln \lambda_n$ при $n \in I_1$, то $S_1 \leqslant 2J < \infty$. То, что $S_2 < \infty$, очевидно. Значит, $S_{\Lambda, l} < \infty$.

Приведем пример последовательности $\{\lambda_n\}$, для которой $S_{\Lambda, l} < \infty$, но $J = \infty$. Для этого рассмотрим систему отрезков $\{\Delta_j\}$ $(j \geqslant 1)$, где

$$\Delta_j = [2^j,\, 2^j + \beta_j]\,, \quad \beta_j = \left[\frac{2^j}{\alpha_j}\right], \quad \alpha_j = \begin{cases} \ln j, & \text{если } j = 2^{n^2}\,, \\ j^2, & \text{если } j \neq 2^{n^2} \ (n \geqslant 1)\,, \end{cases}$$

$[a]$ — целая часть a. Через $\{\lambda_n\}$ обозначим последовательность всех натуральных чисел из $\bigcup\limits_j \Delta_j$, пронумерованных в порядке возрастания. Тогда

$$\sum_{\lambda_k \in \Delta_j} \lambda_k^{-1} \ln \frac{\lambda_k}{k} \leqslant [1 + o(1)] \frac{\ln \alpha_j}{\alpha_j} = [1 + o(1)] \begin{cases} 2n^{-2} \ln n, & \text{если } j = 2^{n^2}\,, \\ 2j^{-2} \ln j, & \text{если } j \neq 2^{n^2} \ (n \geqslant 1)\,. \end{cases}$$

Значит, $S_{\Lambda, l} < \infty$. Но поскольку для $j = 2^{n^2}$ $(n \geqslant 1)$

$$\sum_{\lambda_k \in \Delta_j} \lambda_k^{-1} \ln\ln \lambda_k \geqslant [1 + o(1)] \frac{\ln j}{\alpha_j} = 1 + o(1)\,, \quad j \to \infty\,,$$

то $J = \infty$.

Во многих вопросах теории функций, в том числе задачах аппроксимации линейными комбинациями экспонент $e^{\lambda z}$ $(\lambda \in \Lambda)$ на различных множествах комплексной плоскости, в теории рядов Дирихле особую роль играет бесконечное произведение (произведение Вейерштрасса (4))

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\Big)\,,$$

определяющее целую функцию экспоненциального типа. Поэтому изучение поведения данной функции представляет собой актуальную задачу.

Функция g может вести себя очень нерегулярно на вещественной оси, даже если выполняется условие (1) (по этому поводу см. в [11]). Поведение g зависит не только от функций $n(r)$ и $N(r)$, но и от других величин распределения Λ, учитывающих как концентрацию, так и взаимное расположение (сближаемость) точек последовательности Λ. Одной из таких величин является так называемый индекс конденсации

$$\delta = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \Big| \frac{1}{g'(\lambda_n)} \Big|\,.$$

Заметим, что

$$\delta = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{c(\lambda_n)}{\lambda_n}\,,$$

где $c = c(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{q_n\}$, где $q_n = -\ln |g'(\lambda_n)|$, то есть $c(t) = \max\limits_{\lambda_n \leqslant t} q_n$. Ясно, что функция $c(t)$ непрерывна справа. В зависимости от того, к какому классу монотонных на $\mathbb{R}_+$ функций принадлежит данная функция, можно судить о степени сгущаемости, а также о скорости взаимной сближаемости точек $\lambda \in \Lambda$.

Предположим, что $c \in W_m$, то есть

$$\int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2}\, dt < \infty\,.$$

Выясним, в каких более простых терминах можно интерпретировать данное условие.

Так как $g'(\lambda_n) = -\dfrac{2}{\lambda_n}\prod\limits_{k\neq n}\Big(1-\dfrac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\Big)$, то

$$\ln|g'(\lambda_n)| = \sum_{\substack{|\lambda_n-\lambda_i|\leqslant\lambda_n\\ i\neq n}} \ln\Big|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\Big| + \sum_{\substack{|\lambda_n-\lambda_i|\leqslant\lambda_n\\ i\neq n}} \ln\Big(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\Big)+$$
$$+\sum_{|\lambda_n-\lambda_i|>\lambda_n} \ln\Big|1-\frac{\lambda_n^2}{\lambda_i^2}\Big| + \ln\frac{2}{\lambda_n} = I_1+I_2+I_3+\ln\frac{2}{\lambda_n}\,. \quad (9)$$

Имеем

$$I_2 = \int\limits_0^{2\lambda_n} \ln\Big(1+\frac{\lambda_n}{t}\Big)\,dn(t) = n(2\lambda_n)\ln\frac{3}{2} + \lambda_n\int\limits_0^{2\lambda_n}\frac{n(t)}{t(t+\lambda_n)}\,dt\,,$$
$$I_3 = \int\limits_{2\lambda_n}^{\infty} \ln\Big(1-\frac{\lambda_n^2}{t^2}\Big)\,dn(t) = n(2\lambda_n)\ln\frac{4}{3} - 2\lambda_n^2\int\limits_{2\lambda_n}^{\infty}\frac{n(t)}{t(t^2-\lambda_n^2)}\,dt\,.$$

Далее, как показано в [12] (см. также [13]),

$$I_1 = -\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt + n(2\lambda_n)\ln\frac{1}{2} + N(2\lambda_n)\,,$$

где $\mu(\lambda_n;\,t)$ — число точек $\lambda_i\neq\lambda_n$ из отрезка $\{h\colon |h-\lambda_n|\leqslant t\}$. Следовательно,

$$-U(\lambda_n) - \int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt \leqslant I_1+I_2+I_3 \leqslant 2N(2\lambda_n) - \int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt\,, \quad (10)$$

где

$$U(x) = 2x^2\int\limits_{2x}^{\infty}\frac{m(t)}{t(t^2-x^2)}\,dt \quad (x>0)\,,$$

а $m(t)$ — непрерывная и возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, линейная на отрезках $[0,\lambda_1]$, $[\lambda_n,\lambda_{n+1}]$ $(n\geqslant 1)$, причем $m(0)=0$, $m(\lambda_n)=n$ $(n\geqslant 1)$, $|m(t)-n(t)|\leqslant 1$.

Из условия (1) следует, что (это проверяется непосредственно)

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{U(x)}{x^2}\,dx<\infty\,.$$

Таким образом, из (9), (10) получаем, что

$$\left|\ln\Big|\frac{1}{g'(\lambda_n)}\Big| - \int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt\right| \leqslant \ln 2 + \ln\lambda_n + 2N(2\lambda_n) + U(\lambda_n)\,.$$

Функция U на $\mathbb{R}_+$ возрастает. Действительно, после замены $t=\tau x$ получим

$$U(x) = 2\int\limits_2^{\infty}\frac{m(\tau x)}{\tau(\tau^2-1)}\,d\tau\,.$$

Осталось учесть возрастание функции $\varphi(x)=m(\tau x)$.

Таким образом, видим, что если выполняется условие (1), то найдется функция $w \in W$ такая, что

$$\left|\ln\left|\frac{1}{g'(\lambda_n)}\right| - \int_0^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t}\, dt\right| \leqslant w(\lambda_n) \quad (n \geqslant 1)\,.$$

Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть последовательность Λ удовлетворяет условию* (1).
Для того, чтобы выполнялось условие (3)*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$I(\lambda_n) = \int_0^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t}\, dt \leqslant \psi(\lambda_n) \quad (n \geqslant 1)\,, \tag{11}$$

где ψ — некоторая функция из W.

Следствие 1. *Если выполняется условие* (11)*, то справедливы оценки:*

1°. $h_n \geqslant \lambda_n e^{-\psi(\lambda_n)}$ *$(n \geqslant 1)$, где $h_n = \min\limits_{j \neq n} |\lambda_n - \lambda_j|$;*

2°. $\mu(\lambda_n;\, \psi(\lambda_n)) \leqslant \dfrac{\psi(\lambda_n)}{\ln \frac{\lambda_n}{\psi(\lambda_n)}} \quad (n \geqslant 1)$*.*

Для того, чтобы убедиться в справедливости оценок 1°, 2°, заметим, что

$$I(\lambda_n) = \int_{h_n}^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t}\, dt\,.$$

Так как $\mu(\lambda_n;\, t) \geqslant 1$ при $t \geqslant h_n$, то отсюда имеем оценку $\ln \dfrac{\lambda_n}{h_n} \leqslant \psi(\lambda_n)$, то есть $h_n \geqslant \lambda_n e^{-\psi(\lambda_n)}$ $(n \geqslant 1)$. Далее, при $\psi(\lambda_n) \geqslant h_n$

$$I(\lambda_n) \geqslant \int_{\psi(\lambda_n)}^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n;\, t)}{t}\, dt \geqslant \mu(\lambda_n;\, \psi(\lambda_n)) \ln \frac{\lambda_n}{\psi(\lambda_n)} \quad (n \geqslant 1)\,.$$

Поскольку $\mu(\lambda_n;\, \psi(\lambda_n)) = 0$ при $\psi(\lambda_n) < h_n$, то все доказано.

Приведем примеры последовательностей Λ, для которых реализуются условия (1) и (3). Предварительно введем следующее

Определение 1. *Последовательность $\{p_n\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$ называется интерполяционной, если найдется функция $w \in \Omega$, зависящая только от последовательности $\{p_n\}$, такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \leqslant 1$, существует целая функция экспоненциального типа $\varphi(z)$, обладающая свойствами* [14]*:*

$$\varphi(p_n) = b_n \ (n \geqslant 1)\,, \quad M_\varphi(r) = \max_{|z| \leqslant r} |\varphi(z)| \leqslant e^{w(r)}\,.$$

Примерами интерполяционных последовательностей являются следующие последовательности $\{p_n\}$ [14]:

1. Павлова А. И.: $\dfrac{n}{p_n} \downarrow\,, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_n} < \infty\,;$
2. Ковари Т.: $p_n \geqslant c\, n \ln n\, (\ln\ln n)^{2+\eta}\,, \quad c > 0\,, \eta > 0\,, n \geqslant e^e\,.$

В статье [15] доказан следующий критерий: для того, чтобы последовательность $\{p_n\}$ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in \Omega$ такая, что:

$$\text{а)}\ n(t) \leqslant w(t)\,; \quad \text{б)}\ \ -\ln \prod_{\substack{\frac{p_n}{2} \leqslant p_k \leqslant 2p_n \\ p_k \neq p_n}} \Big|1 - \frac{p_n}{p_k}\Big| \leqslant w(p_n) \quad (n \geqslant 1)\,.$$

Здесь $n(t)$ — считающая функция последовательности $\{p_n\}$, то есть $n(t) = \sum\limits_{p_n \leqslant t} 1$.

Естественное обобщение этого понятия на произвольные последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ дано в статье [16]. Ряд эквивалентных к а условий доказан в [17].

Лемма 2. *Интерполяционные в смысле Коревара – Диксона последовательности* $\{p_n\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$ *удовлетворяют условиям* (1), (3).

Докажем лемму 2. Так как $w \in \Omega$, то (1) следует из условия а критерия интерполяционности.

Проверим условие (3). Имеем

$$|g'(p_n)| = \frac{2}{p_n} \prod_{k \neq n} \Big|1 - \frac{p_n^2}{p_k^2}\Big| \geqslant \prod_{\substack{p_k \in \Delta_n \\ p_k \neq p_n}} \Big|1 - \frac{p_n}{p_k}\Big| \cdot \prod_{p_k \notin \Delta_n} \Big|1 - \frac{p_n^2}{p_k^2}\Big|\,,$$

где $\Delta_n = [\frac{p_n}{2}, 2p_n]$. Учитывая условие б, получаем

$$\Big|\frac{1}{g'(p_n)}\Big| \leqslant \frac{p_n}{2} e^{w(p_n)} \prod_{p_k \notin \Delta_n} \Big|1 - \frac{p_n^2}{p_k^2}\Big|^{-1}. \tag{12}$$

Если обозначить $\Delta(r) = [\frac{r}{2}, 2r]$, то

$$\prod_{p_k \notin \Delta(r)} \Big|1 - \frac{r^2}{p_k^2}\Big| \geqslant \prod_{p_k > 2r} \Big|1 - \frac{r^2}{p_k^2}\Big| = B\,,$$

причем

$$\ln B = \int\limits_{2r}^{\infty} \ln\Big|1 - \frac{r^2}{t^2}\Big|\, dn(t) =$$

$$= n(t)\,\ln\Big(1 - \frac{r^2}{t^2}\Big)\Big|_{2r}^{\infty} - 2r^2 \int\limits_{2r}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 - r^2)}\, dt > -2r^2 \int\limits_{2r}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 - r^2)}\, dt$$

(подстановка положительна). В последнем интеграле сделаем замену $t = rx$. Тогда получаем

$$\ln B > -2 \int\limits_{2}^{\infty} \frac{n(rx)\, dx}{x(x^2 - 1)} \geqslant -\frac{8}{3} \int\limits_{2}^{\infty} \frac{n(rx)}{x^3}\, dx\,.$$

Из условия а имеем: $n(rx) \leqslant w(rx)$. Значит,

$$\ln B \geqslant -\frac{8}{3} \int\limits_{2}^{\infty} \frac{w(rx)}{x^3}\, dx\,,$$

но $w \in \Omega$, следовательно, для всех $r \geqslant R > 1$

$$\frac{w(rx)}{rx} \leqslant \frac{w(r)}{r} \quad (x \geqslant 2)\,.$$

Значит, $w(rx) \leqslant xw(r)$, и для $r \geqslant R$

$$\ln B \geqslant -\frac{8}{3}w(r)\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{4}{3}w(r)\,. \tag{13}$$

Таким образом, из (12), (13) для всех $p_n \geqslant R$ получаем

$$\left|\frac{1}{g'(p_n)}\right| \leqslant e^{\ln\frac{p_n}{2}+w(p_n)+\frac{4}{3}w(p_n)} < e^{\ln p_n+3w(p_n)}\,.$$

Следовательно, $c(t) \leqslant \ln t + 3w(t)$, и интеграл (3) сходится.

Приведем еще два примера.

Пример 1. Пусть $\Delta_j = \left[2^j - \left[\frac{2^j}{j\ln^2 j}\right],\, 2^j\right]$ — отрезок ($[a]$ — целая часть a), $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность всех натуральных чисел, попавших в $\bigcup\limits_{j\geqslant 2}\Delta_j$. Так как

$$\sum_{\lambda_n\in\Delta_j}\lambda_n^{-1} = (1+o(1))\frac{1}{j\ln^2 j}\,, \quad j\to\infty\,,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1} = \sum_{j\geqslant 2}(1+o(1))\frac{1}{j\ln^2 j} < \infty\,.$$

Покажем, что условие (3) не выполняется. Действительно, полагая $m_j = \left[\frac{2^j}{j\ln^2 j}\right]$, для $\lambda_n = 2^j$ имеем

$$I(\lambda_n) = \int_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt \geqslant \int_{m_j}^{2^j}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt \geqslant m_j\ln\frac{2^j}{m_j}\,.$$

Следовательно, при $j \geqslant j_0$

$$I(2^j) \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{2^j}{j\ln j}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_j \frac{\alpha(2^j)}{2^j} = \infty\,,$$

где $\alpha = \alpha(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $I(2^j)$. Значит, из теоремы 2 получаем, что

$$\int_1^{\infty}\frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt = \infty\,.$$

Это означает, что условие (11) не выполнено. Тогда расходимость интеграла (3) вытекает из теоремы 3.

Пример 2. Пусть $\Delta_j = \left[2^{j^2} - \left[\frac{2^{j^2}}{j^2}\right],\, 2^{j^2}\right]$ — отрезок ($[a]$ — целая часть a), а $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — соответствующая последовательность натуральных чисел (см. пример 1). Поскольку для $b_j = 2^{j^2}$

$$n(b_j) \geqslant \left[\frac{2^{j^2}}{j^2}\right] > \frac{b_j}{\ln b_j} - 1\,, \tag{14}$$

то условие а критерия интерполяционности не выполнено. Действительно, для любой функции $w \in \Omega$

$$\frac{w(r)}{r}\ln r = 2\frac{w(r)}{r}\int\limits_{\sqrt{r}}^{r}\frac{dt}{t} \leqslant 2\int\limits_{\sqrt{r}}^{r}\frac{w(t)}{t^2}\,dt = o(1)\,, \quad r \to \infty\,.$$

Значит, в силу (14), оценка $n(t) \leqslant w(t)$ ни при какой функции $w \in \Omega$ невозможна.

Убедимся, что тем не менее условие (3) выполнено. Для этого сначала заметим, что ряд (1) сходится. Более того,

$$\sum_n \lambda_n^{-1}\ln\frac{\lambda_n}{n} < \infty\,.$$

Поэтому достаточно проверить условие (11) (теорема 3). Имеем

$$I(\lambda_n) = \int\limits_1^{n(\lambda_n)}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt + \int\limits_{n(\lambda_n)}^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt = A + B\,.$$

Учитывая оценки $\mu(\lambda_n;\,t) \leqslant t$ $(\lambda_n \in \mathbb{N})$, $\mu(\lambda_n;\,t) \leqslant n(2\lambda_n)$ в первом и втором интегралах соответственно, получаем, что

$$A \leqslant n(\lambda_n)\,, \quad B \leqslant n(2\lambda_n)\ln\frac{\lambda_n}{n(\lambda_n)}\,.$$

Следовательно,

$$I(\lambda_n) \leqslant 2\,n(2\lambda_n)\ln\frac{\lambda_n}{n(\lambda_n)} \quad (n \geqslant n_0)\,.$$

Но из сходимости ряда (5) следует, что (теорема 1)

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{n(t)}{t^2}\ln\frac{t}{n(t)}\,dt < \infty\,.$$

Значит, найдется функция $w \in W$ такая, что $I(\lambda_n) \leqslant w(\lambda_n)$ $(n \geqslant 1)$.

Таким образом, приведен пример неинтерполяционной последовательности, удовлетворяющей условиям (3), (5) (тем более условию (1)).

Примеры, на наш взгляд, иллюстрируют, насколько эффективна характеристика плотности распределения точек Λ

$$I(\lambda_n) = \int\limits_0^{\lambda_n}\frac{\mu(\lambda_n;\,t)}{t}\,dt$$

для проверки неочевидного условия

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{c(t)}{t^2}\,dt < \infty\,.$$

Преимуществом характеристики $I(\lambda_n)$ является то, что она сформулирована в терминах считающей меры последовательности Λ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Fejér *Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Cleichung* // Math. Ann. 1924. P. 413–423.
2. Гайсин А.М. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Матем. сб. 2003. Т. 194, № 8. С. 55–82.
3. Гайсин А.М. *Оценка ряда Дирихле, показатели которого — нули целой функции с нерегулярным поведением* // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 2. С. 33–56.
4. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука, 1980. 384 с.
5. Евграфов М.А. *Об одной теореме единственности для рядов Дирихле* // УМН. 1962. Т. 17, № 3(105). С. 169–175.
6. Гайсин А.М. *Об одной теореме Хеймана* // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 501–516.
7. Хейман У.К. *Мероморфные функции.* М.: Мир, 1966. 286 с.
8. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976. 536 с.
9. Коровкин П.П. *Неравенства.* М.: Наука, 1983. 72 с.
10. I. Cioranescu, L. Zsidó *A minimum modulus theorem and applications to ultra differential operators* // Arkiv for matematik. 1979. V. 17, № 1. P. 153–166.
11. Кацнельсон В.Э. *Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением* // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, № 4. С. 35–44.
12. Красичков И.Ф. *Оценки снизу для целых функций конечного порядка* // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6, № 4. С. 840–861.
13. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
14. J. Korevaar, M. Dixon *Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents* // Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 1978. V. 40, № 2. P. 243–258.
15. B. Berndtsson *A note on Pavlov — Korevaar — Dixon interpolation* // Nederl. Akad. Wet. Indag. Math. 1978. V. 40, № 4. P. 409–414.
16. Гайсин А.М. *Асимптотическое поведение суммы целого ряда Дирихле на кривых* // Исследования по теории приближений. Уфа, БНЦ УрО АН СССР. 1989. С. 3–15.
17. Гайсин А.М. *Условие Левинсона в теории целых функций. Эквивалентные утверждения* // Матем. заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 350–360.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinam@mail.ru

Жанна Геннадьевна Рахматуллина,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: rakhzha@gmail.com