ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 110-118.

УДК 517.5

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КОШИ-РИМАНА

А.Ю. ТИМОФЕЕВ

Аннотация. Изучаются весовые пространства функций, возникающие при исследовании обобщенных уравнений Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Установлена связь с другими пространствами функций, описано сопряженное пространство.

Ключевые слова: обобщенные уравнения Коши-Римана, весовые пространства функций, квазивогнутые функции, сопряженное пространство.

1. Введение

Изучению краевых задач для обобщенного уравнения Коши-Римана посвящено много работ. Основополагающей работой в этом направлении является монография И.Н. Векуа (см. [1]), в которой построена теория уравнений вида

$$\partial_{\bar{z}} w(z) + A(z) \cdot w(z) + B(z) \cdot \overline{w}(z) = 0, \quad z \in G, \tag{1}$$

где $A(z)$, $B(z)$ — заданные в ограниченной области G функции, $w(z)$ — неизвестная функция.

Теория Векуа построена в предположении, что $A(z)$, $B(z)$ принадлежат пространству $L_p(G)$, где $p > 2$. В этом случае (1) называется регулярной обобщенной системой Коши-Римана, а его решение — обобщенными аналитическими функциями. Коэффициенты таких систем могут допускать «слабые» особенности, лимитируемые требованием p-интегрируемости. В частности, если $A(z)$, $B(z)$ обращаются в бесконечность в некоторой изолированной особой точке, то порядок этой особенности должен быть строго меньше единицы. Поэтому даже уравнение (1) с такими коэффициентами, как $A(z) = \frac{1}{z}$, не вписывается в теорию Векуа. Исследованию задач для обобщенных уравнений с коэффициентами, имеющими особенности в изолированной точке, посвящены работы Л.Г. Михайлова, З.Д. Усманова, А. Тунгатарова, М. Райссига и А.Ю. Тимофеева, Р. Сакса, Г.Т. Макацария и др. (см., напр., [2], [3], [7]).

В работе [7] исследуется задача Дирихле для обобщённого уравнения Коши-Римана (1), где $G = \{z \in C : |z| < 1\}$, $A(z) \equiv 0$.

При этом новизна исследований состоит в том, что допускающие особенности в точке $z = 0$ коэффициенты $B(z)$ принадлежат весовому пространству функций $S_p(G)$, которое является объединением пространств:

$$s_p(G) = \left\{ B(z) : \sup_{\bar{G}}(|B(z)| \cdot p(|z|)) < +\infty \right\}.$$

A.Yu. Timofeev, Weighted space of functions in the theory of generalized Cauchy-Riemann equation.

Поступила 15 февраля 2010 г.

Множество функций $p(t)$, обладающих достаточно общими свойствами, обозначается через P. Пространство $S_p(G)$ состоит из тех и только тех заданных в G функций $f(z)$, для каждой из которых существует такая функция $p(t) \in P$, что $f(z) \in s_p(G)$.

Предполагается, что функции $p(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Заданы и положительны на некотором промежутке $(0, t_p]$, где $t_p < 1$.
2. Не убывают на $(0, t_p]$.
3. $\lim\limits_{t \to +0} p(t) = 0$.
4. $\int\limits_0^{t_p} \frac{dt}{p(t)} < +\infty$.

Научный интерес представляет задача описания функций $p(t)$ класса P. В данной работе продолжено исследование функций этого класса.

В § 2 приведены основные свойства функций множества P, а также различные примеры, поясняющие эти свойства. Из этих свойств следует непосредственно, что поведение функции $p(t)$ в точке $t = 0$ может быть сравнимо с $p_1(t) = t$: $p(t) > c \cdot t$. Функциями, сравнимыми с $p_1(t)$, являются и квазивогнутые функции. Установлена связь весовых функций из P с квазивогнутыми функциями, введёнными в работе [4]. В работе построены примеры, показывающие, что функции из P вообще говоря не являются квазивогнутыми и наоборот. Во множестве P вводится структура частичноупорядоченного множества.

В разделе 3 изучается поведение весовой функции в нуле. При этом за основу берется шкала роста монотонно возрастающих функций на бесконечности: порядок и тип функции (см., напр., [5], с. 21–23). В разделе 3.2 показывается, что функция $\varphi(t) := \frac{1}{p(\frac{1}{t})} (p \in P)$ имеет при порядке $\rho = 1$ минимальный тип. Как следствие получается, что $p(t) > \gamma(t) \cdot t$, где $\gamma(t) \to +\infty$ при $t \to +0$.

В разделе 4 устанавливается связь пространства $S_p(G)$ с другими пространствами функций (пространством Лоренца и др.). Кроме того, в связи с вопросом, поставленным на конференции по комплексному анализу и дифференциальным уравнениям в Якты-Куле (декабрь 2004 г.), описано сопряженное пространство к $s_p(G)$.

2. Свойства и примеры весовых функций $p(t) \in P$

2.1. Основные свойства весовых функций. Весовые функции $p(t)$, введенные в [7], удовлетворяют следующим достаточно общим условиям:

1. Заданы и положительны на некотором промежутке $(0, t_p]$, где число t_p зависит от функции $p(t)$, $t_p < 1$.
2. Не убывают на $(0, t_p]$.
3. $\lim\limits_{t \to +0} p(t) = 0$.
4. $\int\limits_0^{t_p} \frac{dt}{p(t)} < +\infty$.

В дальнейшем будем считать функции $p(t)$ заданными на всём промежутке $(0, 1]$, продолжая в случае необходимости $p(t)$ на промежутке $[t_p, 1]$ постоянной, равной $p(t_p)$. В этом случае условия 1–2 и 4 будут выполнены уже на всём промежутке $(0, 1]$.

Нетрудно показать, что для функции $p(t) \in P$ существует число $c_p > 0$ такое, что

$$\frac{t}{p(t)} \leqslant c_p, t \in (0, 1]\,. \tag{1.1}$$

Для этого рассмотрим произвольное $t_0 \in (0; 1]$:

$$\frac{t_0}{p(t_0)} = \frac{1}{p(t_0)} \int\limits_0^{t_0} dt = \int\limits_0^{t_0} \frac{dt}{p(t_0)}.$$

В силу неубывания $p(t)$ для любого $t \leqslant t_0$ последний интеграл будет не превосходить $\int\limits_0^{t_0} \frac{dt}{p(t)}$. В силу произвольности $t_0 \in (0;1]$ получаем то, что (1.1) доказано. В связи с (1.1) возникает гипотеза о том, что функции $p(t)$ в окрестности $t=0$ ведут себя как $p_1(t)=t$. В разделе 3 мы докажем, что весовые функции $p(t)$ удовлетворяют более сильному, чем (1.1) условию.

Рассмотрим некоторые примеры весовых функций.

1. $p(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$.

Очевидно, выполняются условия 1–4, и $p(t)=t^\alpha \in P$ для $0<\alpha<1$.

2. $p(t)=t\cdot \ln^\beta \frac{1}{t}$, $\beta>1$.

Так как для $t\in(0,1]$ выполняется $\frac{1}{t}\geqslant 1$, то $\ln\frac{1}{t}\geqslant 0$ и $t\cdot\ln^\beta\frac{1}{t}\geqslant 0$.

$$p'(t)=\ln^\beta\frac{1}{t}+t\cdot(\beta\ln^{\beta-1}\frac{1}{t})\cdot t\cdot(-\frac{1}{t^2})=\ln^{\beta-1}\frac{1}{t}\cdot(\ln\frac{1}{t}-\beta).$$

Значит, $p(t)$ не убывает на $\left(0,\frac{1}{e^\beta}\right]$.

$$\lim_{t\to+0} t\cdot\ln^\beta\frac{1}{t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta\cdot\ln^{\beta-1}x}{x}.$$

Если $\beta-1>0$, то применяем правило Лопиталя еще раз и таким образом окончательно получим, что последний предел равен нулю.

$\int\limits_0^1 \frac{dt}{t\cdot\ln^\beta\frac{1}{t}}=-\int\limits_0^1\frac{d(-\ln t)}{(-\ln t)^\beta}=\frac{(-\ln t)^{1-\beta}}{\beta-1}\Big|_0^1<\infty$ при $1-\beta<0$, т.е. $\beta>1$.

Таким образом, если $\beta>1$, то функция принадлежит P.

3. Аналогично можно показать, что функция

$$p(t)=t\cdot\ln\frac{1}{t}\cdot\ln\ln\frac{1}{t}\cdot\ldots\cdot(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{(k-1)}\frac{1}{t})\cdot(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{(k)}\frac{1}{t})^\beta\in P \text{ при } \beta>1.$$

Во множестве весовых функций P можно ввести частичный порядок. Пусть $p_1(t),\ p_2(t)\in P$. Будем писать $p_1\prec p_2$, если $p_1(t)\leqslant p_2(t),\ t\in(0,1]$, причем $p_1(t)/p_2(t)\to 0$ при $t\to+0$.

Можно показать (см. [7]), что для каждой функции $p\in P$ существует $p_1\in P$ со свойством, что $p_1\prec p$.

С другой стороны, отношение $\prec$ во множестве весовых функций P не является порядком: не для любых $p_1(t),p_2(t)\in P$ можно сказать, что $p_1\prec p_2$ или $p_2\prec p_1$. В качестве функции $p_1(t)$ можно взять функцию примера 1: $p_1(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$, $0<t\leqslant 1$. Построим теперь функцию $p_2(t)$: $p_2(1)=1$, $p_2(t)=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$, $\frac{1}{n+1}\leqslant t<\frac{1}{n}$. Очевидно, что $p_1(t),p_2(t)\in P$, но нельзя утверждать, что $p_1\prec p_2$ или $p_2\prec p_1$.

Известно, что теория И.Н. Векуа (см. [1]) для уравнения (1) построена для случая, когда $B(z)\in L_q(G)$, $q>2$. Функция $p_1(t)=t^\alpha(0<\alpha<1)$ удовлетворяет условиям 1–4, причём если $f\in s_{p_1}(G)$, то $f\in L_q(G)$ $(2<q<\frac{2}{\alpha})$. С другой стороны, $f(z)=\frac{1}{|z|\cdot\ln^2\frac{1}{|z|}}\in s_{p_2}(G)$, $p_2(t)=t\cdot\ln^2\frac{1}{t}$, но $f(z)\notin L_q(G)(q>2)$, поэтому исследования в [7] можно рассматривать как продолжение и расширение теории Векуа.

2.2. Связь между весовыми и квазивогнутыми функциями. Из неравенства (1.1) предыдущего параграфа следует, что для функции $p(t)\in P$ существует число $c_p>0$ со свойством:

$$p(t)\geqslant c_p\cdot t.$$

Возникает гипотеза о сравнении функций $p(t)$ класса P с функциями вида $p_1(t)=t$ и с другими функциями такого вида.

В соответствии с определением, данным в [4], функция $p(t)$, удовлетворяющая условиям 1–3 и дополнительному условию:

$$\frac{p(t)}{t} \text{ убывает на некотором промежутке } (0, t_p], \tag{2.1}$$

называется *квазивогнутой*. Приведённые выше функции (см. примеры 1–3 раздела 1) являются квазивогнутыми.

Как следует из леммы 1.1 (см. [4]), квазивогнутые функции являются непрерывными и даже абсолютно непрерывными функциями.

В связи с этим возникает вопрос: не следует ли из условий 1–4 квазивогнутость функций $p(t)$? Отрицательный ответ на этот вопрос даёт следующий пример.

Положим $p(1) = 1$. Для $k \in N$ считаем, что

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \text{ если } t \in \left[\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right).$$

Тогда условия 1–4 выполнены для этой функции:

1. $p(t) > 0$ для любых $t \in (0, 1]$.

2. Докажем монотонность этой функции. Возьмём произвольные $t_1 \leqslant t_2$. Возможны две ситуации:

а) $t_1, t_2 \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$.

В этом случае $p(t_1) = p(t_2) = \frac{1}{\sqrt{k}}$, т.е. $p(t_1) \leqslant p(t_2)$.

б) $t_1 \in \left[\frac{1}{k+n+1}, \frac{1}{k+n}\right)$, $t_2 \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, $n \in N$.

Тогда $p(t_1) = \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \frac{1}{\sqrt{k}} = p(t_2)$.

3. $\lim\limits_{t\to+0} p(t) = \lim\limits_{k\to\infty} p(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$.

4. $\int\limits_0^1 \frac{dt}{p(t)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{p(t)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\cdot(k+1)}$.

Последний ряд сходится.

Покажем, тем не менее, что функция $\frac{p(t)}{t}$ не является убывающей.

Для этого рассмотрим $t_1 = \frac{1}{k+1}, t_2 = \frac{1}{k+1} - \varepsilon$, ε — положительное маленькое число; очевидно, $t_1 > t_2$.

$$p(t_1) = \frac{1}{\sqrt{k}}, p(t_2) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Поэтому

$$\frac{p(t_1)}{t_1} - \frac{p(t_2)}{t_2} = \frac{\sqrt{k+1}\cdot t_2 - \sqrt{k}\cdot t_1}{\sqrt{k\cdot(k+1)}\cdot t_1\cdot t_2} = \frac{\sqrt{k+1}\cdot\left(\frac{1}{k+1} - \varepsilon\right) - \sqrt{k}\cdot\frac{1}{k+1}}{\sqrt{k\cdot(k+1)}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{1}{k+1} - \varepsilon\right)} =$$

$$= \frac{k+1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{k+1}{1-(k+1)\cdot\varepsilon} = \frac{k+1}{\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{k+1}}{1-(k+1)\cdot\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Подберём ε столь малым, чтобы выражение (2.2) было положительным, т.е:

$$\frac{k+1}{\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{k+1}}{1-(k+1)\cdot\varepsilon} > 0.$$

В итоге получаем следующее неравенство:

$$\varepsilon < \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\cdot(k+1)^{3/2}}. \tag{2.3}$$

Так как

$$\frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\cdot(k+1)^{3/2}} > \frac{1}{2(k+1)^2},$$

то достаточно взять следующее значение ε:

$$\varepsilon = \frac{1}{2(k+1)^2}.$$

В этом случае (2.3) будет выполнено, а значит, будет положительным и выражение (2.2).

Таким образом, функции класса P, вообще говоря, не удовлетворяют условию квазивогнутости.

Возникает обратный вопрос: не следует ли из квазивогнутости $p(t)$ то, что $p(t) \in P$?

Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий пример: $p_1(t) = t \cdot \ln \frac{1}{t}$. Эта функция является квазивогнутой, хотя и не принадлежит классу P.

3. Поведение весовой функции в нуле

3.1. Шкала роста монотонных функций. Приведем некоторые факты, связанные со шкалой роста монотонно возрастающих функций (см., напр., [5], с. 21–23; [6], с. 1–2).

Пусть $f(t)$ — неотрицательная функция на полуоси $(0, +\infty)$. Чтобы охарактеризовать скорость ее роста, будем сравнивать ее с функциями $\mu \cdot t^\lambda$.

Точную нижнюю грань тех чисел $\lambda \geqslant 0$, для которых при $t \to +\infty$ выполняется неравенство

$$f(t) < t^\lambda, \tag{3.1.1}$$

назовем *порядком* ρ функции $f(t)$.

Если чисел λ со свойством (3.1.1) не существует, то говорят, что $f(t)$ имеет бесконечный порядок, и полагают $\rho = +\infty$.

Лемма 1. *(см. [5], с. 21–23; [6], с. 1–2). Порядок функции вычисляется по формуле*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln f(t)}{\ln t}. \tag{3.1.2}$$

Типом функции $f(t)$ при порядке ρ $(0 < \rho < +\infty)$ называют точную нижнюю грань $\sigma(f, \rho)$ тех чисел $\mu \leqslant \infty$, для которых при $t \to +\infty$ выполняется неравенство $f(t) < \mu \cdot t^\rho$. Легко видеть, что $\sigma(f, \rho) = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{f(t)}{t^\rho}$.

Функции $f(t)$, для которых $\sigma(f) = 0$, $0 < \sigma(f) < \infty$, $\sigma(f) = \infty$, называются соответственно функциями *минимального*, *нормального* и *максимального* типа при порядке ρ.

Примеры.

1. $f_1(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Тогда

$\rho(f_1) = \alpha, 0 < \alpha < 1.$

$\sigma(f_1) = 1.$

2. $f_2(t) = \frac{t}{\ln t}, t \in [e, +\infty)$.

$\rho(f_2) = 1$

$\sigma(f_2) = 0.$

Наряду с указанием порядка и типа функции $f(t)$ ее рост может быть охарактеризован поведением (сходимостью или расходимостью) интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{\rho+1}} dt. \tag{3.1.3}$$

Заметим, что при замене в этом интеграле порядка ρ произвольным числом $\alpha > \rho(f)$ получится, очевидно, сходящийся интеграл. В то же время интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt \tag{3.1.4}$$

в случае монотонно неубывающей функции $f(t)$ расходится, если $\alpha < \rho(f)$ или $\alpha = \rho(f)$, $\sigma(f) > 0$. Действительно, в этом случае существует такая последовательность чисел t_j, что при любом j выполняется $t_{j+1} > 2t_j$ и при некотором $a > 0$

$$f(t_j) \geqslant a t_j^{\rho}, \quad j = 1, 2, ...$$

Ввиду монотонности функции $f(t)$ имеем

$$\int\limits_{t_1}^{\infty} \frac{f(t)}{t^{\rho+1}} dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{f(t)}{t^{\rho+1}} dt \geqslant \frac{a}{\rho} \sum_{j=1}^{\infty} t_j^{\rho} \left(\frac{1}{t_j^{\rho}} - \frac{1}{t_{j+1}^{\rho}} \right) \geqslant \frac{a}{\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\rho} \right) = \infty.$$

Эти результаты можно сформулировать следующим утверждением:

Лемма 2. *Если монотонно неубывающая неотрицательная функция* $f(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt < \infty,$$

то

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha}} = 0.$$

Обратное утверждение неверно. В качестве примера можно привести функцию $f_2(t) = \frac{t}{\ln t}$, $t \in [e, +\infty)$. Тогда $\sigma(f_2) = 0$, но $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{t}{\ln t \cdot t^{\rho+1}} dt = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\ln t \cdot t} dt = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{d(\ln t)}{\ln t} = = \ln \ln t \Big|_1^{+\infty} = +\infty$.

Таким образом, характеристика роста функций посредством интеграла (3.1.4) представляет интерес лишь для функций минимального типа.

Условимся неотрицательные функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ называть принадлежащими к одному *классу сходимости*, если интегралы

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}} dt, \quad \int\limits_{1}^{\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

сходятся (а значит, и расходятся) при одних и тех же значениях α.

3.2. Асимптотика весовой функции в нуле. Пусть $p(t) \in P$ — весовая функция. Рассмотрим следующую функцию: $\varphi(t) = \frac{1}{p(\frac{1}{t})}$. Эта функция является монотонно возрастающей на промежутке $[1; +\infty)$; причем при $t \to +\infty$ $\varphi(t) \to +\infty$.

В силу условия 4 (см. раздел 2)

$$J := \int\limits_{0}^{d} \frac{dt}{p(t)} < +\infty. \tag{3.2.1}$$

Сделаем замену $t = \frac{1}{x}$ под знаком интеграла в (3.2.1).

Тогда

$$J = -\int\limits_{+\infty}^{1/d} \frac{dx}{x^2 p(\frac{1}{x})} = \int\limits_{1/d}^{+\infty} \frac{1}{p(\frac{1}{x})} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int\limits_{1/d}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx.$$

Этот интеграл в силу (3.2.1) сходится, т.е. функция $\varphi(x)$ принадлежит классу сходимости (см. раздел 3.1) с порядком $\rho = 1$. Согласно лемме 2 из раздела 3.1 функция $\varphi(x)$ имеет минимальный тип при порядке $\rho = 1$, т.е.

$$\varphi(x) < \varepsilon \cdot x, x > x_0(\varepsilon). \tag{3.2.2}$$

Рассмотрим $\varepsilon_1 = 1$. Тогда существует такое x_1, что для любого $x > x_1$ выполняется $\varphi(x) < \varepsilon_1 x$. Аналогично для $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ существует x_2 такое, что для любого $x > x_2 \geqslant x_1$ выполняется $\varphi(x) < \varepsilon_2 x$ и т.д. Таким образом, получена функция $\varepsilon(x)$:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, x_1 < x \leqslant x_2 \\ \frac{1}{2}, x_2 < x \leqslant x_3 \\ \dots \\ \frac{1}{n}, x_n < x \leqslant x_{n+1} \\ \dots \end{cases}$$

Ясно, что $\varepsilon(x) \downarrow 0$ при $x \to \infty$.
Значит,

$$\varphi(x) < \varepsilon(x) \cdot x, \ x > x_0.$$

Возвращаясь к весовой функции $p(t)$, получаем неравенство

$$p(\frac{1}{x}) > \frac{1}{\varepsilon(x) \cdot x}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для любой функции* $p(t) \in P$ *существует функция* $\gamma(t) \to +\infty$ *при* $t \to +0$ *такая, что*

$$\frac{p(t)}{t} > \gamma(t).$$

4. Пространства Лоренца. Связь с другими пространствами. Сопряженное пространство

Пространством Лоренца $LlnL(G)$ называется множество измеримых в G функций следующего вида:

$$L\ln L(G) = \left\{ f(z) : \iint\limits_G |f(z)| \ln^+ |f(z)| \, d\xi d\zeta < +\infty \right\},$$

где $G = \{z \in C : |z| < 1\}$, $z = \xi + i\zeta$, $z \in C$,
$\ln^+ |f(z)| = \max \{\ln |f(z)|, 0\}$.

Лемма 3. *Справедливо следующее включение:*

$$S_p(G) \subset L_2(G) \subset L\ln L(G).$$

Доказательство.
Включение $S_p(G) \subset L_2(G)$ доказано в [7].
Покажем, что $L_2(G) \subset L\ln L(G)$. Для этого рассмотрим $f(z) \in L_2(G)$. Тогда

$$\iint\limits_G |f(z)| \ln^+ |f(z)| \, d\xi d\zeta \leqslant \iint\limits_G |f(z)| \cdot |f(z)| \, d\xi d\zeta = \iint\limits_G |f(z)|^2 \, d\xi d\zeta < +\infty.$$

Значит, $f(z) \in L\ln L(G)$.

Покажем, что обратные включения не выполняются.

$L_2(G) \not\subset S_p(G)$, $L\ln L(G) \not\subset S_p(G)$ в силу примера 2 (см. ниже).

Чтобы показать, что $L\ln L(G) \not\subset L_2(G)$, достаточно в примере 1 (см. ниже) взять $\alpha = 1$.

Рассмотрим некоторые примеры, поясняющие связь пространства Лоренца с другими пространствами.

1. Рассмотрим функцию $p_1(t) = t^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда $p_1(t) \in P$. В этом случае функция комплексной переменной $f_1(z) = \frac{1}{|z|^\alpha}$ принадлежит $s_{p_1}(G)$, т.е. $f_1(z) \in S_p(G)$.

Очевидно, что $f_1(z)$ принадлежит $L\ln L(G)$.

Проверим принадлежность функции $f_1(z)$ пространствам $L_p(G)$:

$$\iint\limits_G |f(|z|)|^p \, d\xi d\zeta = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{1}{r^{\alpha\cdot p-1}} dr = \frac{r^{-\alpha\cdot p+2}}{2-\alpha\cdot p}.$$

Последнее выражение принимает конечное значение при $-\alpha\cdot p + 2 > 0$, т.е. $p < \frac{2}{\alpha}$.

Таким образом, $f_1(z) \in L_p(G)$ при $2 < p < \frac{2}{\alpha}$.

2. Рассмотрим функцию $f_2(z) = \frac{1}{|z|\ln\frac{1}{|z|}}$. Вычисляя интеграл, как в примере 1, покажем, что функция принадлежит пространству Лоренца: $f_2(z) = \frac{1}{|z|\ln\frac{1}{|z|}} \in L\ln L(G)$.

С другой стороны, $f_2(z)$ не принадлежит $S_p(G)$. Действительно, если предположить обратное, то существует функция $p_2(|z|) \in S_p(G)$ такая, что $p_2(|z|)\cdot f_2(z) \leqslant c$. Если обозначить левую часть неравенства через $\varphi(z)$, то можно сделать вывод о том, что $\varphi(z)$ является ограниченной функцией. Но тогда для функции $p_2(|z|)$ не выполнено условие 4.

Таким образом, мы показали, что $f_2(z)$ не принадлежит $S_p(G)$. Проверим, что $f_2(z)$ принадлежит пространству $L^2(G)$:

$\iint\limits_G \frac{d\xi d\zeta}{|z|^2\ln^2\frac{1}{|z|}} = 2\pi\int\limits_0^d r\frac{dr}{r^2\ln^2\frac{1}{r}} = 2\pi\int\limits_0^d \frac{d(\ln r)}{\ln^2 r} = -2\pi\frac{1}{\ln r}\Big|_0^d = -\frac{2\pi}{\ln d} < +\infty$, где $d < 1$.

Таким образом, $f_2(z) \in L^2(G)$.

3. Рассмотрим функцию $p(t) = t\cdot\ln^2\frac{1}{t}$. Тогда $f_3(z) = \frac{1}{|z|\cdot\ln^2\frac{1}{|z|}} \in S_p(G)$.

Легко показать, что $f_3(z)$ не принадлежит $L^p(G)$, $p > 2$.

С помощью понятия интеграла Радона и схемы описания линейных функционалов из [8] (с. 212–223) нетрудно доказывается

Теорема 2. *Любой линейный непрерывный функционал l в пространстве $s_p(G)$ задается в виде следующего интеграла Радона*

$$l(f) = \int_G f(z)\cdot p(|z|) d\Phi,$$

где Φ — аддитивная ограниченной вариации функция множества.

Заключение. Полученные результаты могут быть использованы как в теории обобщенных уравнений Коши-Римана, так и при исследовании других функциональных пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. *Обобщённые аналитические функции.* М.: Наука. 1988.
2. Михайлов Л.Г. *Новый класс интегрируемых уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.* Душанбе. 1963. 183 с.
3. Усманов З.Д. *Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой.* Душанбе. 1993. 245 с.
4. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семёнов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* М.: Наука. 1978. 400 с.

5. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* М.: Наука. 1971. 432 с.
6. Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения.* Новосибирск: Наука. 1991.
7. M. Reissig, A. Timofeev *Dirichlet problems for generalized Cauchy-Riemann systems with singular coefficients* // Complex variables. Vol. 50. № 7–11. 2005. P. 653–672.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* М.: Наука. 1959.

Алексей Юрьевич Тимофеев,
Сыктывкарский государственный университет,
Октябрьский проспект, д. 55,
167001, г. Сыктывкар, Россия
E-mail: tim@syktsu.ru