ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 52-58.

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ФОКА

А.М. ДИЛЬМУХАМЕТОВА, А.У. МУЛЛАБАЕВА, В.В. НАПАЛКОВ

Аннотация. В данной статье введены обобщённые пространства Фока и рассмотрены основные свойства этих пространств. Найдена операция, сопряженная к операции умножения на переменную z в обобщенном пространстве Фока. Также определены собственные функции сопряженного оператора. Изучены обобщенное преобразование Лапласа и задача построения базиса для введенных пространств.

Ключевые слова: Пространство Фока, сопряженный оператор, преобразование Лапласа, базис пространства, порядок и тип целых функций, оператор обобщенного дифференцирования.

1. Введение

В математической физике важную роль играет пространство Фока, введенное в 1932 году (см. [1]). Обозначим через $H(\mathbb{C})$ пространство целых функций с топологией компактной сходимости. По определению пространство Фока в одномерном случае имеет вид:

$$F = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\mu < \infty \right\},$$

где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости.

Известно, что пространство F обладает следующими свойствами (см., например, [2], [3]):

1. Преобразование Лапласа переводит элементы из F в F :

$$f \to \hat{f}(\lambda) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} e^{\lambda z} e^{-|z|^2} d\mu = \overline{f(\overline{\lambda})} \in F;$$

2. Оператор дифференцирования является сопряженным к оператору умножения на переменную z.

Эти свойства лежат в основе приложений пространства Фока к задачам физики.

В данной статье введены обобщённые пространства Фока F в одномерном случае и рассмотрены основные свойства этих пространств. В пространстве F найден оператор, сопряженный к оператору умножения на переменную z. Определены собственные функции сопряженного оператора. Также изучено обобщенное преобразование Лапласа и построен базис для введенных пространств.

2. Оператор обобщенного дифференцирования

В дальнейшем нам понадобится оператор обобщенного дифференцирования. Возьмем последовательность комплексных чисел $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ таких, что $m_0 = 0$, $m_n \neq 0$ при $n \geq 1$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|m_n|} < \infty$. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{C}).$$

A.M. Dilmukhametova, A.U. Mullabaeva, V.V. Napalkov, Generalized Fock space.

Поступила 18 февраля 2010 г.

Оператором обобщенного дифференцирования, порожденным последовательностью $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, назовем оператор D, который действует по правилу

$$Df = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n m_n z^n.$$

Этот оператор связан с оператором Гельфонда-Леонтьева [4] и произведением Адамара [5]. В силу условий на $\{m_n\}$ оператор D будет действовать из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$ линейно и непрерывно.

Собственные функции оператора обобщенного дифференцирования, соответствующие собственным числам λ, имеют вид

$$y(z) = c\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_n}\right),$$

где c — произвольное комплексное число.

При дополнительном условии $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|m_1| ... |m_n|} = \infty$ собственные функции оператора D являются целыми.

Теорема 1. *Если выполнено условие* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|m_n|}{Bn^p} = 1$, *где B=const>0, то собственные функции оператора обобщенного дифференцирования D целые и имеют порядок* $\rho = \frac{1}{p}$, *тип* $\sigma = \frac{p}{B^{\frac{1}{p}}}$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|m_n|}{Bn^p} = 1$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, начиная с которого будут выполняться оценки:

$$n^p(B-\varepsilon) \leqslant |m_n| \leqslant n^p(B+\varepsilon) \text{ для всех } n \geq N.$$

Рассмотрим функцию

$$y_{1,\varepsilon}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_N (B+\varepsilon)^{n-N} \frac{(n!)^p}{(N!)^p}}.$$

Поскольку

$$\left|\frac{\lambda^n}{m_1 ... m_N (B+\varepsilon)^{n-N} \frac{(n!)^p}{(N!)^p}}\right| < \left|\frac{\lambda^n}{m_1 ... m_N m_{N+1} ... m_n}\right| \forall n : n > N,$$

то порядки соответствующих функций удовлетворяют неравенству:
$\rho_1 \leqslant \rho$, где ρ — порядок собственной функции, а ρ_1 — порядок рассматриваемой.

Посчитаем порядок $y_{1,\varepsilon}(z)$ по формуле (см. [6]):

$$\rho_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln\left|m_1 ... m_N (B+\varepsilon)^{n-N} \frac{(n!)^p}{(N!)^p}\right|} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln \frac{m_1 ... m_N}{(N!)^p} + (n-N)\ln(B+\varepsilon) + pn\ln\left(\frac{n}{e}\sqrt[2n]{2\pi n}\right)} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\frac{L}{n} + \ln(B+\varepsilon) - p + p\ln n + p\ln\sqrt[2n]{2\pi n}} = \frac{1}{p},$$

где $L = \ln \frac{m_1 ... m_N}{(N!)^p} - N\ln(B+\varepsilon)$.

Аналогично можно подсчитать порядок функции

$$y_{2,\varepsilon}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{m_1 ... m_N (B-\varepsilon)^{n-N} \frac{(n!)^p}{(N!)^p}}.$$

Так как $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, а $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{p}$, то $\rho = \frac{1}{p}$.

Посчитаем тип функции $y_{1,\varepsilon}(z)$:

$$\left(\sigma_{1,\varepsilon} e \frac{1}{p}\right)^p = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^p}{\sqrt[n]{m_1 ... m_N (B+\varepsilon)^{n-N} \frac{(n!)^p}{(N!)^p}}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^p}{(B+\varepsilon)\sqrt[n]{\tilde{B}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^p}},$$

$$\text{где } \tilde{B} = \frac{m_1 ... m_N}{(B+\varepsilon)^N (N!)^p}.$$

$$\sigma_{1,\varepsilon}{}^p = \left(\frac{p}{e}\right)^p \frac{1}{(B+\varepsilon)} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^p e^p}{n^p \sqrt[n]{\tilde{B}} \sqrt[2n]{2\pi n}^p}.$$

Тогда для любого ε

$$\sigma_{1,\varepsilon} \leqslant \frac{p}{\sqrt[p]{B+\varepsilon}}.$$

Точно так же можно оценить σ сверху, тогда

$$\frac{p}{\sqrt[p]{B+\varepsilon}} \leqslant \sigma \leqslant \frac{p}{\sqrt[p]{B-\varepsilon}} \text{ для любого } \varepsilon.$$

Следовательно, $\sigma = \frac{p}{\sqrt[p]{B}}$.

3. Обобщенное пространство Фока

Возьмем $\beta > 0$ и введём пространство

$$F_\beta = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{\pi \frac{2}{\beta} \Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu < \infty \right\},$$

где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости.

Теорема 2. *Порядок функций, входящих в пространство F_β, не превосходит β, а при порядке β тип не выше $\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Возьмем функцию $f(z)$ из F_β, её модуль — субгармоническая функция. Применим теорему о среднем для субгармонических функций (см. [7]):

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)|\, d\mu, \text{ где } z_0 \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

Подынтегральное выражение умножим и разделим на $e^{-\frac{|z|^\beta}{2}}$. Тогда

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)|\, e^{-\frac{|z|^\beta}{2}} e^{\frac{|z|^\beta}{2}} d\mu.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{\pi R^2} \left(\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z|^\beta} d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

В правой части последнего неравенства первое подкоренное выражение оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu = \|f\|^2 \pi \frac{2}{\beta} \Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right).$$

Оценим второе подкоренное выражение в правой части (1):

$$\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z|^\beta} d\mu \leqslant \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{(|z-z_0|+|z_0|)^\beta} d\mu =$$

$$= \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z_0|^\beta (1+\frac{|z-z_0|}{|z_0|})^\beta} \leqslant \int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z_0|^\beta (1+\frac{R}{|z_0|})^\beta}.$$

$(1+\frac{R}{|z_0|})^\beta < 2^\beta$, если $R \leqslant |z_0|$. Тогда

$$|f(z_0)| \leqslant \sqrt{\pi \frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \frac{\|f\|}{\pi R^2} \left(\int\limits_{|z-z_0|\leqslant R} e^{|z_0|^\beta 2^\beta} d\mu \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|}{\pi R^2} e^{\frac{|z_0|^\beta}{2} 2^\beta} \sqrt{\pi R^2} \sqrt{\pi \frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} = M e^{\frac{|z_0|^\beta}{2} 2^\beta},$$

где $M = \frac{\|f\|}{R}\sqrt{\frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})}$. Отсюда видно, что порядок функций из обобщенного пространства Фока $\rho \leqslant \beta$.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $|z_0|$, что верна следующая оценка $(1+\frac{R}{|z_0|})^\beta < 1+\varepsilon$. Тогда

$$|f(z_0)| \leqslant M e^{\frac{|z_0|^\beta}{2}},$$

т.е. при порядке $\rho = \beta$ тип не превосходит $\frac{1}{2}$.

4. Сопряженный оператор к оператору умножения на переменную z

Перейдем к описанию сопряженного оператора к оператору умножения на переменную z в обобщенном пространстве Фока. Пусть A — оператор, действующий по правилу:

$$Af : f \to z \cdot f, f \in F_\beta.$$

Теорема 3. *Оператор, сопряженный к оператору умножения на переменную z, имеет вид:*

$$A^* g = A^* \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} b_n m_n z^n, \tag{2}$$

где $m_n = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2n}{\beta})}, n \geq 1, m_0 = 0.$

Доказательство. Согласно определению сопряженного оператора

$$(Af, g) = (f, A^* g),$$

где $(f,g) = \frac{1}{\pi \frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} e^{-|z|^\beta} d\mu$. В пространстве Фока F сопряженным к оператору умножения на переменную z является оператор дифференцирования.

Определим в пространстве F_β оператор, сопряженный к оператору умножения на переменную z.

Возьмем две функции $f(z) = z^n$ и $g(z) = z^{n+1}, n \geq 0$. Поскольку $(z^n, z^k) = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}$ при $n = k$, то

$$(Af, g) = (zf, g) = (zz^n, z^{n+1}) = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+2))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}.$$

С другой стороны, $(Af, g) = (f, A^* g) = (z^n, A^* z^{n+1})$. Так как это не ноль, A^* должна понижать степень z на единицу

$$A^* z^{n+1} = m_{n+1} z^n.$$

Тогда, продолжая равенство, имеем

$$\frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+2))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})} = (z^n, m_{n+1} z^n) = m_{n+1}(z^n, z^n) = m_{n+1} \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}.$$

Откуда находятся числа $m_{n+1} = \frac{\Gamma(2/\beta\cdot(n+2))}{\Gamma(2/\beta\cdot(n+1))}$, при $n \geq 0$. Положим $m_0 = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Найдем A^*, при этом будем считать, что $A^*1 = 0$, тогда:

$$A^*g = A^* \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^* z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} b_n m_n z^n. \tag{3}$$

А это и есть оператор D, порожденный последовательностью m_n. В случае $\beta = 2$ он совпадает с оператором дифференцирования.

5. Собственные функции в обобщенных пространствах Фока

Собственные функции оператора обобщенного дифференцирования(2) имеют вид (см. п. 2)

$$y(z) = c\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{m_1 m_2 ... m_k}\right). \tag{4}$$

Используя асимптотическое представление Г-функции [8]

$$\Gamma(\alpha) \approx \sqrt{2\pi}\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\alpha},$$

покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|m_n|}{(\frac{2}{\beta})^{\frac{2}{\beta}} n^{\frac{2}{\beta}}} = 1$:

$$|m_n| = \frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2n}{\beta})} \approx \frac{\sqrt{2\pi}(\frac{2}{\beta}(n+1))^{\frac{2}{\beta}(n+1)-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{\beta}(n+1)}}{\sqrt{2\pi}(\frac{2n}{\beta})^{\frac{2n}{\beta}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2n}{\beta}}} \approx$$

$$\approx \left(\frac{\frac{2}{\beta}(n+1)}{\frac{2n}{\beta}}\right)^{\frac{2n}{\beta}-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\beta}(n+1)\right)^{\frac{2}{\beta}} e^{-\frac{2}{\beta}} \approx$$

$$\approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{\beta}-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\beta}(n+1)\right)^{\frac{2}{\beta}} e^{-\frac{2}{\beta}} \approx$$

$$\approx e^{2/\beta} e^{-2/\beta} (\frac{2n}{\beta} + \frac{2}{\beta})^{\frac{2}{\beta}} \approx (\frac{2}{\beta})^{\frac{2}{\beta}} n^{2/\beta}, n \to \infty.$$

Согласно теореме 1, собственные функции оператора обобщенного дифференцирования (2) являются функциями порядка $\rho = \frac{\beta}{2}$ и типа $\sigma = 1$.

Заметим, что при $\beta = \frac{2}{s}$, где s — целое положительное число:

$$m_n = \frac{\Gamma(s(n+1))}{\Gamma(sn)} = (sn + s - 1)(sn + s - 2)...sn = p(n),$$

здесь $p(z)$ — многочлен степени s.

Операторы обобщенного дифференцирования, порожденные последовательностью $p(n)$:

$$Df = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} b_n p(n) z^n,$$

были рассмотрены в статье [9], [10]. Как оказалось, такие операторы связаны с операторами типа Эйлера конечного порядка.

6. Обобщенное преобразование Лапласа

В обобщенных пространствах Фока справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Обобщенное преобразование Лапласа переводит обобщенное пространство Фока в себя.*

Собственными функциями оператора дифференцирования являются экспоненты, а собственными функциями оператора обобщенного дифференцирования D, как уже было показано, функции

$$y(z) = c\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{m_1 m_2 ... m_k}\right).$$

Введем обобщенное преобразование Лапласа функции обобщенного пространства Фока $(f, y(\lambda z))$.

$$(f, y(\lambda z)) = \frac{1}{\frac{2\pi}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} y(\lambda z) e^{-|z|^{\beta}} d\mu =$$

$$= \frac{1}{\frac{2\pi}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k z^k} \cdot c\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{m_1 m_2 ... m_k}\right) e^{-|z|^{\beta}} d\mu =$$

$$= \frac{c\overline{a_0}}{\frac{2\pi}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} e^{-|z|^{\beta}} d\mu + c\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{a_k}\lambda^k}{m_1 m_2 ... m_k} \frac{1}{\frac{2\pi}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} |z|^{2k} e^{-|z|^{\beta}} d\mu =$$

$$= c\left(\overline{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{a_k}\lambda^k}{m_1 m_2 ... m_k} m_k ... m_2 m_1\right) = c\sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k}\lambda^k = c\overline{f(\overline{\lambda})}.$$

7. Базис в обобщенных пространствах Фока

В работе [11] доказан следующий результат:

Теорема 5. *Пусть $\varphi(|z|)$ — выпуклая функция в $\mathbb{C}$. Если $\varphi^*(t) = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant\infty} (tx - \varphi(x))$ — сопряженная по Юнгу — ограничена в окрестности начала координат, тогда система многочленов плотна в пространстве*

$$F_{\varphi} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\varphi(|z|)} d\mu < \infty \right\}.$$

Пространства, рассмотренные выше, являются частным случаем весовых пространств F_{φ}.

Вернемся к нашему обобщенному пространству Фока. В этом случае в роли $\varphi(|z|) = |z|^{\beta}$, которая при $\beta \geq 1$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Рассмотрим систему: $R = \left\{ \frac{z^n}{\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{2}{\beta}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{\beta})}}}, n = 0, 1, 2, ... \right\}$. Она ортонормирована в обобщенном пространстве Фока. Следовательно, согласно теореме 4 из [12], образует базис в обобщенном пространстве Фока при $\beta \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V.A. Fock *Configuration space and second guantization* // Zs.f.Phys. Bd. 75. № 9-10. 1932. P. 622–647.
2. V. Bargmann *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform* // Commun.Pure and Applied Math. 14. 1961. P. 187–214.
3. D.J. Newman, H.S. Shapiro *Certain Hilbert spaces of entire functions* // Communicated by L.Cesari. March 31. 1961. P. 971–977.
4. Леонтьев А.Ф. *Обобщения рядов экспонент.* М.: Наука. 1981. 320 с.
5. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* М.: Наука. 1967. 240 с.
6. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1983. 175 с.
7. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* Т. 1. М.: Наука. 1985. 336 с.
8. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* Т. 2. М.: Наука. 1968. 624 с.

9. Напалков В.В., Дильмухаметова А.М. *Операторы обобщенного дифференцирования с переменными коэффициентами* // ДАН. Т. 424. № 5. 2009. С. 591–593.
10. Кутателадзе С.С. *Основы функционального анализа.* Новосибирск. 2000. 221 с.
11. B.A. Taylor *On weighted polynomial approximation of entire functions* // Pacific journal of mathematics. Vol.36. № 2. 1971. P. 523–539.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука. 1981. 544 с.

Алия Мидхатовна Дильмухаметова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `aliya-0887@mail.ru`

Айгуль Ураловна Муллабаева,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `mullabaeva.87@mail.ru`

Валентин Васильевич Напалков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `napalkov@matem.anrb.ru`