ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 35-51.

УДК 517.956

КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИККЬЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО И ШЕСТОГО ПОРЯДКОВ

И.М. БИККУЛОВ, Ф.Х. МУКМИНОВ

Аннотация. Рассматривается задача Риккье-1,3 с краевыми условиями Дирихле и третьего типа для эллиптических уравнений четвертого и шестого порядков в неограниченной области. Установлены широкие классы единственности решения этих задач, зависящие от геометрии области. Для задачи Риккье-1 с краевыми условиями Дирихле построены примеры неединственности, подтверждающие точность предложенных классов единственности.

Ключевые слова: классы единственности, задача Риккье, эллиптическое уравнение.

1. Введение

В неограниченной области Ω n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка $\mathbb{R}^n$, рассматривается эллиптический оператор

$$Lu = L_0 u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} - du, \tag{1}$$

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}.$$

Все коэффициенты оператора дифференцируемы и ограничены в Ω, постоянная $d \geq 0$. Коэффициенты a_{ij} симметричны, $a_{ij} = a_{ji}$ и удовлетворяют при почти всех $x \in \Omega$ условию равномерной эллиптичности

$$0 < |y|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j \leq \Gamma |y|^2, \quad y \in R^n \setminus \{0\}. \tag{2}$$

На границе области $\partial\Omega$ класса C^1 заданы краевые условия первого и третьего типа

$$u\big|_{x\in\Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x) u\right)\Big|_{x\in\Gamma_2} = 0, \tag{3}$$

здесь $\Gamma_1 \neq \varnothing$ — произвольное замкнутое множество, $\Gamma_2 = \partial\Omega \backslash \Gamma_1$, $\mathbf{n}(n_1, n_2, \dots, n_n)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} n_j$; $\sigma(x) \geq 0$ — измеримая ограниченная функция на $\partial\Omega$.

I.M. Bikkulov, F.Kh. Mukminov, Classes of uniqueness for solutions of the Rickyies problem to fourth and sixth order elliptic equations.

Работа поддержана РФФИ (грант 07-01-00037).

Поступила 16 февраля 2010 г.

Целью работы является установление принципа Сен-Венана и классов единственности для решений уравнений

$$L^m u = 0 \tag{4}$$

при значениях $m = 2, 3$. Случай $m = 1$ рассматривался в работах О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [10], [11] и других авторов [19], [16].

Имеется много работ, посвященных доказательству теорем типа Фрагмена-Линделефа, принципа Сен-Венана или выделению классов единственности решений для эллиптических уравнений. Перечисленные утверждения, как известно, характеризуют близкие качественные свойства решений эллиптических уравнений.

Первоначально теорема Фрагмена-Линделефа [3] возникла как обобщение принципа максимума модуля для аналитических функций, а именно: если регулярная в области D аналитическая функция $f(z)$ в каждой точке $\xi \in \partial D$ границы удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to 0} \sup\limits_{D\cap B(r,\xi)} |f(z)| \leqslant M$, то $|f(z)| \leqslant M$ всюду в области D. Здесь и далее $B(r,\xi)$ — шар радиуса r с центром в точке ξ.

В последующем теоремами Фрагмена-Линделефа для эллиптических уравнений стали называть утверждения следующего вида. Пусть, например, Ω — угол раствора φ на плоскости $\mathbb{R}_2 = \{\overline{y} = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ и M — произвольное неотрицательное число. Если гармоническая в Ω функция на границе не превосходит M, то она либо и в Ω не превосходит M, либо растет не медленнее, чем $\varepsilon|\overline{y}|^{\pi/\varphi}$, где $\varepsilon > 0$. Отсюда сразу следует, что множество функций, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{|\overline{y}|\to\infty} |\overline{y}|^{-\pi/\varphi} u(\overline{y}) = 0$, является классом единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в угле Ω.

Интересный вариант теоремы Фрагмена-Линделефа доказан в работе [4]: решение эллиптического уравнения второго порядка в бесконечном полуцилиндре либо экспоненцально выходит на константу, либо растет линейным образом, либо растет экспоненциально при $x \to \infty$.

Принцип Сен-Венана был впервые обоснован в работе [5] (см. также [6]) в следующей форме. Если деформировать один торец упругого цилиндрического стержня, то величина деформаций будет экспоненциально убывать при удалении от торца. После работ [5], [6] появилось много результатов, в которых принцип Сен-Венана распространялся на уравнения эллиптического и параболического типов. В частности, в работе [7] доказан точный принцип Сен-Венана для решений бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta u = \Phi + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \tag{5}$$

в области Ω на плоскости $\mathbb{R}_2$ с граничными условиями

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{6}$$

где ν — направление внешней нормали к $\partial\Omega$. Сформулируем его.

Пусть $\delta(\omega)$, $\pi < \omega \leqslant 2\pi$, — единственное решение уравнения $\sin^2(\omega\delta) = \delta^2 \sin^2 \omega$, удовлетворяющее условию $0 < \omega\delta(\omega) \leqslant \pi$. Пусть $\gamma(\rho) = \{x \in \Omega \mid |x| = \rho\}$ не является целой окружностью ни при каком $\rho > 0$ и $l(\rho)$ — длина наибольшей из дуг, составляющих $\gamma(\rho)$. Пусть $l(\rho) \leqslant \rho\omega$, где $\omega \in [1.24\pi, 2\pi]$ и $\Phi(x) = \Phi_1(x) = \Phi_2(x) = 0$ в $\Omega(R) = \{x \in \Omega \mid g(x) < R\}$ (здесь $g(x) = |x|$, но ниже рассматриваются и другие функции). Тогда решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения при $\rho < R/2$ удовлетворяет оценке

$$\int\limits_{\Omega(\rho)} \mathcal{E}(u)dx \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\delta(\omega)} \int\limits_{\Omega(R)} \mathcal{E}(u)dx \tag{7}$$

с постоянной C, зависящей только от ω. Здесь $\mathcal{E}(u) = u^2_{x_1x_1} + 2u^2_{x_1x_2} + u^2_{x_2x_2}$. Утверждается, что оценка (7) неулучшаема в том смысле, что показатель степени $2\delta(\omega)$ не может быть увеличен, например, для областей типа угла. Очевидно, что оценка (7) позволяет выделить следующий класс единственности решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в неограниченной области. Если $u(x)$ — решение задачи (5), (6) с $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = 0$ в Ω и существует последовательность $R_N \to \infty$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega(R_N)} \mathcal{E}(u)dx \leqslant \varepsilon(R_N)R_N^{2\delta(\omega)},$$

где $\varepsilon(R_N) \to 0$ при $R_N \to \infty$, то $u \equiv 0$ в Ω.

В работах О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [8], [9] доказана следующая теорема Фрагмена-Линделефа для решения $u(x,y)$ бигармонического уравнения с краевыми условиями (6) на границе области Ω, лежащей в полуплоскости $\mathbb{R}^+_2 = \{\overline{y} = (x,y) \in \mathbb{R}_2 \mid x > 0\}$. Пусть $\mu(r)$ — непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(r) \leqslant \mu'(r) = \inf\left\{\int\limits_{\gamma_r} \mathcal{E}(g)dy \;\middle|\; g(x,y) \in C_0^\infty(\Omega), \int\limits_{\gamma_r} [g_x^2 - gg_{xx} + g_y^2]dy = 1\right\}, \quad r > 0,$$

$\gamma_r = \{\overline{y} = (x,y) \in \Omega \mid x = r\}$ — конечное число ограниченных непересекающихся интервалов. Функция $\Phi(r,s)$ удовлетворяет при $t \le r \leqslant s$ уравнению $\Phi_{rr} - \mu(r)\Phi = 0$ с начальными условиями $\Phi(s,s) = 1,\ \Phi_r(s,s) = 0$. Тогда, если для некоторой последовательности $t_N \to \infty$ и некоторого числа $d > 0$ выполнены неравенства

$$\int\limits_{\Omega^{t_N}} \mathcal{E}(u)d\overline{y} \leqslant \varepsilon(t_N)\Phi(d,t_N),$$

где $\varepsilon(t_N) \to 0$ при $t_N \to \infty$, то $u \equiv 0$ в Ω. Здесь $\Omega^r = \{\overline{y} = (x,y) \in \Omega \mid x < r\}$. Рассмотрены также области, имеющие несколько ветвей, уходящих в бесконечность по различным направлениям.

В.А. Кондратьев и О.А. Олейник в работе [12] доказали следующий принцип Сен-Венана для решений внешних краевых задач. Пусть G — внешность ограниченной области $\widehat{G}$ в $\mathbb{R}_{n,\mathbf{x}}$ и $T_{k,\mathbf{y}}$ — k-мерный тор. В области $Q = G \times T_{k,\mathbf{y}}$, $n \ge 2$, $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in Q$ рассматриваются решения уравнения

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+k} (a_{\alpha\beta}(\mathbf{z})u_{z_\alpha})_{z_\beta} = 0$$

с постоянными эллиптичности δ_1, δ_2 и краевыми условиями первого или второго типа на ∂Q. В случае первого краевого условия предполагается, что для функции $u(\mathbf{z})$ найдется $\rho^* > \rho_0$ такое, что при любом достаточно малом ε

$$I(u,|x|,\rho^* + \varepsilon) = I(u,|x|,\rho^*),$$

где $I(u,v,\rho) = \int\limits_{Q(\rho)} \mathcal{F}(u,v)d\mathbf{z}$, $\mathcal{F}(u,v) = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n+k} a_{\alpha\beta}u_{z_\alpha}u_{z_\beta}$, $Q(\rho) = \{\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in Q \mid |\mathbf{x}| < \rho\}$. Тогда для решения справедлив принцип Сен-Венана: при любых ρ_1, ρ_2, таких, что $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho$, выполняется неравенство

$$I(u,u,\rho_1) \le \rho_1^\kappa \rho_2^{-\kappa} I(u,u,\rho_2), \quad \kappa = \delta_1^{1/2}\delta_2^{-1/2}(n-1)^{1/2}.$$

Из него выводится соответствующая теорема о единственности решений.

В работе [13] доказано, в частности, что неравенство $|u(\overline{\mathbf{y}})| \le C|\ln|\overline{\mathbf{y}}||^{1-\varepsilon}$, $|\overline{\mathbf{y}}| > C$, выделяет класс единственности решений эллиптического уравнения $Lu = f(x), d = 0$, пригодный для любой неограниченной области на плоскости и краевых условий первого, второго и третьего типов.

В недавних работах [19], [15] устанавливаются классы единственности для квазиэллиптических и псевдодифференциальных уравнений в неограниченных областях. В работе [20] доказана теорема Фрагмена-Линделефа для квазилинейного эллиптического уравнения высокого порядка. Отметим, что точность результатов в последних трех работах не обсуждалась.

Будем предполагать, что $\partial\Omega \in C^2$ и коэффициенты оператора L удовлетворяют условию

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} (b_i)_{x_i} = 0 \tag{8}$$

и неравенствам

$$|\mathbf{b}|^2 \leq d/2^m, \ x \in \Omega, \tag{9}$$

где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

При $\Gamma_2 \neq \varnothing$ ограничимся рассмотрением областей вращения Ω_f

$$\Omega_f = \{x \in \mathbb{R}^n, \ x = (x_1, x') \big| \ |x'| < f(x_1), \ x_1 > 0\}, \tag{10}$$

определяемых функцией $f \in C^2[0, \infty)$. Положим $g(x) = g(x_1, |x'|)$, где $g(t, y)$ — решение задачи Коши $yf'(t)g_t = f(t)g_y, \ g(t, 0) = t$. Легко показать (см. § 2), что функция $g(x)$ дифференцируема и ее поверхности уровня ортогональны к $\partial\Omega_f$. При $\Gamma_2 = \varnothing$ будем полагать $g(x) = |x|$.

Определим невозрастающую функцию $\lambda(r), \ r > 0$ равенством $\lambda(r) = \lambda(-\infty, r)$,

$$\lambda(a, r) = \inf \left\{ \int\limits_{\Omega(a,r)} |\nabla v|^2 dx \Big| \ v \in C_0^\infty(R^n \setminus (\Gamma_1 \cup \Omega_r^\infty)), \int\limits_{\Omega(a,r)} v^2 dx = 1 \right\}, \tag{11}$$

где $\Omega(a, r) = \{x \in \Omega \mid a < g(x) < r\}, \ \Omega(r) = \Omega(-\infty, r)$.

При $d = 0$ предполагается, что

$$\lim_{r \to \infty} r^2 \lambda(r) = \infty. \tag{12}$$

В параграфе 2 доказывается, что в случае областей вращения при определенных условиях на Γ_2 достаточным для этого является условие

$$\lim_{r \to \infty} r/f(r) = \infty. \tag{13}$$

Будем требовать "регулярность" поведения функции f

$$\max_{[0,r]} f \leq F \min_{[r/2,r]} f, \quad r \geq D, \tag{14}$$

и выполнение неравенств

$$|f'(r)| \leq F, \quad r \geq D, \tag{15}$$

$$|(f(r)/f'(r))'| \leq F, \quad r \in \{r \geq D | f'(r) \neq 0\}. \tag{16}$$

Здесь и далее одной и той же буквой F обозначаются, вообще говоря, различные постоянные, определяемые функцией f. Достаточным условием для справедливости (16) является неравенство

$$\left| \frac{f(r) f''(r)}{(f'(r))^2} \right| \leq F, \ \ r \in \{r \geq D | f'(r) \neq 0\}. \tag{17}$$

На коэффициенты $a_{ij}, \ i, j = \overline{1, n}$ будем накладывать требования $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ и

$$\sum_{i,j=1}^{n} |(a_{ij})_{x_j}|^2 \leq M(d + \lambda(r)), \quad x \in \Omega_{r/2}^r, \ \ r \geq D. \tag{18}$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют неравенствам* (9), (8), (18). *Если $\Gamma_2 \neq \varnothing$, то будем требовать дополнительно $L_0 = \triangle$ и рассматривать область вида* (10) *с функцией f, удовлетворяющей условиям* (14), (15), (17). *Тогда найдется положительное число μ такое, что для всех $r > D$, $\nu \in (7/8, 1)$ равенство $L^2 u = 0$ в $\Omega(r)$ (в обобщенном смысле) влечет оценку*

$$\int\limits_{\Omega(r/2)} [|L_0 u|^2 + |du|^2] dx \leq C(\nu) \exp(-\mu r (d + \lambda(r))^{1/2}) \|u\|^2_{W_2^2(\Omega^r_{\nu r})}. \tag{19}$$

В случае $m = 3$ дополнительно требуем выполнение неравенства

$$\left| \frac{f^2(r) f'''(r)}{(f'(r))^3} \right| \leq F, \quad r \geq D, \ f \in C^3[0, \infty). \tag{20}$$

Коэффициенты $b_i(x)$ равны нулю на $\partial\Omega$. Будем предполагать также, что

$$\|\nabla b\| \leq d/8. \tag{21}$$

Теорема 2. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют соотношениям $L_0 = \triangle$,* (9), (8), (21). *Пусть $\Gamma_2 = \varnothing$, область Ω имеет вид* (10) *с функцией f, удовлетворяющей условиям* (14), (15), (17), (20). *Тогда найдется положительное число μ такое, что для всех $r > D$, $\nu \in (7/8, 1)$ равенство $L^3 u = 0$ в $\Omega(r)$ (в обобщенном смысле) влечет оценку*

$$\|u\|_{W_2^3(\Omega(r/2))} \leq C(\nu) \exp(-\mu r (d + \lambda(r))^{1/2}) \|u\|_{W_2^3(\Omega^r_{\nu r})}.$$

Пусть Ω_f — область вращения, $d = 0$, и это наиболее интересный случай. Пусть множество Γ_1 распределено достаточно регулярно, а именно: предполагается существование положительных чисел D и δ_1 таких, что при всех $b > a \geq D$, $b - a \geq \min\{f(a), f(b)\}/2$ выполнены неравенства

$$\operatorname{mes}_{n-1} \Gamma_1 \cap \{x | a < x_1 < b\} \geq \delta_1 \operatorname{mes}_{n-1} \partial\Omega \cap \{x | a < x_1 < b\}. \tag{22}$$

При этих условиях в параграфе 2 получена оценка функции $\lambda(r)$

$$\varepsilon f^{-2}(r) \leq \lambda(r) \leq \varepsilon^{-1} f^{-2}(r). \tag{23}$$

Она позволяет класс единственности, определяемый теоремой 1, записать в виде

$$\lim_{r \to \infty} \exp(-\varepsilon r / f(r)) \|u\|^2_{W_2^2(\Omega^r_{\nu r})} = 0. \tag{24}$$

Для подтверждения точности класса единственности (24) в случае, когда $\Gamma_2 = \emptyset$, воспользуемся теоремой из работы [19].

Теорема К. Пусть область Ω_f определена функцией f, удовлетворяющей условию (14). Тогда найдется неотрицательная гармоническая в области вращения Ω_f, равная нулю на границе и подчиняющаяся оценке

$$\int\limits_{\Omega(r)} |\nabla u|^2 dx \leqslant m \exp(Kr/f(r)) \tag{25}$$

с положительными числами K, m.

Поскольку из $Lu = 0$ очевидным образом следует, что $L^2 u = 0$, то построенный в теореме К пример неединственности подтверждает точность класса единственности (24).

2. Определения пространств и вспомогательные неравенства

Гильбертово пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega;\Gamma_1)$ (иногда просто $\overset{\circ}{H}{}^1$) определим как замыкание множества функций $C_0^\infty(R^n\setminus\Gamma_1)$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Пространство $H^2_\sigma(\Omega;\Gamma_1)$ определим как замыкание множества функций из $W_2^2(\Omega)$ с нулевым следом на Γ_1 таких, что след $\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u=0$ при почти всех $x\in\Gamma_2$. Здесь коэффициенты a_{ij} и функция $\sigma(x)$ предполагаются класса $C^1(\partial\Omega)$, $\partial\Omega\ \in\ C^2$, хотя для рассматриваемых нами вопросов эти требования можно ослабить.

Пространство $H^3_\Delta(\Omega)$ определим как замыкание множества функций из $W_2^3(\Omega)$ с нулевым следом на $\partial\Omega$ таких, что след $\Delta u=0$ на $\partial\Omega$.

Пространства $L_{2,lc}(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1_{lc}(\Omega;\Gamma_1)$, $H^2_{\sigma,lc}(\Omega;\Gamma_1)$, $H^3_{\Delta,lc}(\Omega)$ составим из функций u, для которых при каждом $r>0$ найдутся функции v из пространств $L_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega,\Gamma_1)$, $H^2_\sigma(\Omega;\Gamma_1)$, $H^3_\Delta(\Omega)$, соответственно, совпадающие с u на множестве $\{x\in\Omega\big|\ |x|<r\}$.

Установим два вспомогательных неравенства.

Пусть $E\subset[a,b]$ — измеримое подмножество и $v\in C^1[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b v^2(t)dt\le\frac{2(b-a)}{\operatorname{mes}E}\int\limits_E v^2(t)dt+4(b-a)^2\int\limits_a^b v'^2(t)dt. \tag{26}$$

Действительно, из формулы Ньютона-Лейбница легко следует, что

$$v^2(t)-v^2(s)\le\int\limits_a^b 2|vv'|d\tau.$$

Проинтегрируем это сначала по $s\in E$, затем по $t\in[a,b]$. Получим

$$\operatorname{mes}E\int\limits_a^b v^2(t)dt\le(b-a)\int\limits_E v^2(s)ds+(b-a)\operatorname{mes}E\int\limits_a^b 2|vv'|ds.$$

Применив неравенство $2|vv'|\le\frac{v^2}{2(b-a)}+2v'^2(b-a)$, выводим (26).

Следующее неравенство для шара B_ρ и его измеримого подмножества E является многомерным аналогом (26) для функции $v\in C^1(\overline{B_\rho})$.

$$\int\limits_{B_\rho} v^2(x)dx\le\frac{\operatorname{mes}B_\rho}{\operatorname{mes}E}\int\limits_E v^2(x)dx+C(n)\rho^2\frac{\operatorname{mes}^2B_\rho}{\operatorname{mes}^2E}\int\limits_{B_\rho}|\nabla v|^2dx. \tag{27}$$

Частный случай этого неравенства, когда $v|_E=0$, установлен в [14]. Для доказательства при произвольных $x,y\in B_\rho$ запишем соотношение

$$u(y)-u(x)=\int\limits_0^{|x-y|}\frac{\partial u(x+r\omega)}{\partial r}dr,\ \omega=\frac{y-x}{|y-x|},$$

где (r,ω) — сферические координаты с центром в точке x. Обозначив через $\chi(r,\omega)$ характеристическую функцию шара B_ρ, запишем неравенство

$$|u(x)|\le|u(y)|+\int\limits_0^{2\rho}\chi|\nabla u(x+r\omega)|dr.$$

Проинтегрируем его по $y \in E$

$$|u(x)| \mathrm{mes}\, E \leq \int\limits_E |u(y)| dy + \int\limits_E dy \int\limits_0^{2\rho} \chi |\nabla u(x + r\omega)| dr$$

и оценим сверху правую часть следующим образом

$$\int\limits_E dy \int\limits_0^{2\rho} \chi |\nabla u(x + r\omega)| dr \leq \int\limits_0^{2\rho} \tau^{n-1} d\tau \int\limits_{S_1} d\omega \int\limits_0^{2\rho} \chi |\nabla u(x + r\omega)| dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\rho} \tau^{n-1} d\tau \int\limits_{B_\rho} \frac{|\nabla u(\xi)| d\xi}{r^{n-1}} = \frac{(2\rho)^n}{n} \int\limits_{B_\rho} \frac{|\nabla u(\xi)| d\xi}{|x - \xi|^{n-1}}.$$

Получившееся неравенство

$$|u(x)| \mathrm{mes}\, E \leq \int\limits_E |u(y)| dy + \frac{(2\rho)^n}{n} \int\limits_{B_\rho} \frac{|\nabla u(\xi)| d\xi}{|x - \xi|^{n-1}}$$

проинтегрируем по $x \in B_\rho$:

$$\mathrm{mes}\, E \int\limits_{B_\rho} |u(x)| dx \leq \mathrm{mes}\, B_\rho \int\limits_E |u(y)| dy + \frac{(2\rho)^n}{n} \int\limits_{B_\rho} |\nabla u(\xi)| d\xi \int\limits_{B_\rho} \frac{dx}{|x - \xi|^{n-1}}.$$

Очевидно, что

$$(\frac{(2\rho)^n}{n} \int\limits_{B_\rho} \frac{dx}{|x - \xi|^{n-1}} \leq 2\rho \mathrm{mes}\, B_{2\rho}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{B_\rho} |u(x)| dx \leq \frac{\mathrm{mes}\, B_\rho}{\mathrm{mes}\, E} \left(\int\limits_E |u(y)| dy + 2^{n+1} \rho \int\limits_{B_\rho} |\nabla u(\xi)| d\xi \right).$$

Положив теперь $u = v^2$ и применив неравенство $|\nabla u| = 2|v \nabla v| \leq \varepsilon v^2 + \varepsilon^{-1} |\nabla v|^2$, получим (27).

Определим последовательность $\{z_N\}$ индуктивным равенством, начиная с произвольного $z_0 > 0$:

$$z_N = \sup\{t | \min_{[z_{N-1}, t]} f \geq t - z_{N-1}\}, \; N = \overline{1, \infty}. \tag{28}$$

Оценим колебание функции f на отрезке $[z_N, z_{N+1}]$. Пусть t_N — точка минимума функции $f(t)$ на отрезке $[z_N, z_{N+1}]$. Очевидно из определения (28) последовательности $\{z_N\}$, что

$$f(t_N) = z_{N+1} - z_N. \tag{29}$$

Из (28) и (14) легко следуют также соотношения

$$z_{N+1} - z_N \leq f(t) \leq w f(t_N), \; t \in [z_N, z_{N+1}). \tag{30}$$

Перейдем к оценке величины λ^N снизу

$$\lambda^N = \inf \left\{ \int\limits_{\Omega(z_N, z_{N+1})} |\nabla v|^2 \, dx \middle| v \in C_0^\infty(R^n \backslash \Gamma_1), \int\limits_{\Omega(z_N, z_{N+1})} v^2 \, dx = 1 \right\} > 0.$$

Покажем сначала, что при $\delta = \varepsilon = \delta_1/(2w^{n-2})$ для множеств $Pr(N) = \{t \in [z_N, z_{N+1}] | \mathrm{mes}_{\,n-2}\Gamma_1 \cap \{x_1 = t\} \geq \varepsilon f^{n-2}(t)\}$ справедливы неравенства

$$\mathrm{mes}\, Pr(N) \geq \delta(z_{N+1} - z_N)/2, \;\; N = \overline{0, \infty}. \tag{31}$$

Пусть, для определенности, $t_N < (z_{N+1}+z_N)/2$. Тогда $z_{N+1} - t_N \geq (z_{N+1} - z_N)/2 \geq f(t_N)/2$. Поэтому для пары чисел t_N, z_{N+1} справедливо неравенство (22). Если же (31) не выполнено, то

$$\mathrm{mes}_{\,n-1}\Gamma_1 \cap \{x | t_N < x_1 < z_{N+1}\} \leq \sigma_{n-2}(\delta(\max_{[t_N, z_{N+1}]} f)^{n-2}(z_{N+1} - z_N)/2+$$

$$+\varepsilon(\max_{[t_N, z_{N+1}]} f)^{n-2}(z_{N+1}-t_N)) < \delta_1\sigma_{n-2} f(t_N)^{n-2}(z_{N+1}-t_N) \leq \delta_1 \mathrm{mes}_{\,n-1}\partial\Omega \cap \{x | t_N < x_1 < z_{N+1}\},$$

что противоречит (22). Здесь σ_{n-2} — площадь единичной сферы размерности $n-2$. При $t_N \geq (z_{N+1} + z_N)/2$ справедливость соотношения (31) устанавливается аналогично.

Возьмем произвольное $t \in Pr(N)$. Запишем следующее неравенство в цилиндрических координатах для функции $v \in C_0^\infty(R^n \backslash \Gamma_1)$

$$\int_0^{f(t)} r^{n-2} v^2(t, r, \omega) dr \leq \lambda^{-1} f^2(t) \int_0^{f(t)} r^{n-2} v_r^2(t, r, \omega) dr. \tag{32}$$

Здесь ω такая "угловая" координата, что $(t, f(t), \omega) \in \Gamma_1$. Множество таких ω обозначим через E_t^0. Очевидно, что в качестве λ можно взять первое собственное значение оператора Лапласа в единичном шаре размерности $n-1$ с условием Дирихле на границе. Через E_t обозначим следующее множество

$$E_t = \{(t, r, \omega) | 0 < r < f(t), \; \omega \in E_t^0\}.$$

Положим также $S_t = \{(t, x') | \; |x'| < f(t)\}$. Интегрируя (32) по $\omega \in E_t^0$, устанавливаем неравенство

$$\int_{E_t} v^2(t, x') dx' \leq \lambda^{-1} f^2(t) \int_{E_t} v_r^2(t, x') dx'. \tag{33}$$

Пользуясь принадлежностью $t \in Pr(N)$, находим, что $\frac{\mathrm{mes}\, S_t}{\mathrm{mes}\, E_t} \leq \frac{\sigma_{n-2}}{\varepsilon}$. Неравенство (27) для S_t и E_t запишется в виде

$$\int_{S_t} v^2(t, x') dx' \leq 2\frac{\sigma_{n-2}}{\varepsilon} \int_{E_t} v^2(t, x') dx' + C(n) f^2(t) \frac{\sigma_{n-2}^2}{\varepsilon^2} \int_{S_t} |\nabla v(t, x')|^2 dx'.$$

Соединяя это с (33), устанавливаем, что

$$\int_{S_t} v^2(t, x') dx' \leq C(n) f^2(t) \frac{\sigma_{n-2}^2}{\varepsilon^2} \int_{S_t} |\nabla v(t, x')|^2 dx'. \tag{34}$$

Запишем теперь неравенство (26) в виде

$$\int_{z_N}^{z_{N+1}} v^2(t, x') dt \leq \frac{2(z_{N+1} - z_N)}{Pr(N)} \int_{Pr(N)} v^2(t, x') dt + 4(z_{N+1} - z_N)^2 \int_{z_N}^{z_{N+1}} v_t^2(t, x') dt.$$

Интегрируя последнее по $x' \in B(N) = \{|x'| < f(t_N)\}$, учитывая (31) и применяя (30), (34), нетрудно установить, что

$$\int_{[z_N, z_{N+1}] \times B(N)} v^2(x) dx \leq \frac{C(n) w^4 f^2(t_N)}{\delta \varepsilon^2} \int_{\omega_1^N} |\nabla v|^2 dx + 4(z_{N+1} - z_N)^2 \int_{\omega_1^N} v_t^2 dx, \tag{35}$$

где $\omega_1^N = \Omega(z_N, z_{N+1})$.

Применим неравенство (27) на этот раз для S_t и $\widetilde{E_t} = \{(t,x') \in S_t | x' \in B(N)\}$ и учтем (30):

$$\int\limits_{S_t} v^2(t,x')dx' \le 2F \int\limits_{\widetilde{E_t}} v^2(t,x')dx' + C(n)F^2 w^2 f^2(t_N) \int\limits_{S_t} |\nabla v(t,x')|^2 dx'.$$

После интегрирования по t и применения неравенства (35) будем иметь

$$\int\limits_{\omega_1^N} v^2 dx \le \left(\frac{C(n) f^2(t_N)}{\delta \varepsilon^4} + (z_{N+1} - z_N)^2 \right) F \int\limits_{\omega_1^N} |\nabla v|^2 dx.$$

Ввиду неравенства (29) отсюда следует оценка

$$\theta \le (z_{N+1} - z_N)^2 \lambda^N$$

с некоторым числом $\theta > 0$.

Замечание. Ввиду (29), отсюда следует оценка

$$\widetilde{\theta} \le (z_{N+1} - z_N)^2 \lambda(z_N, z), \;\; z \in [z_{N+1}, z_{N+2}]. \tag{36}$$

Установим еще оценку для функции $\lambda(z)$. Нетрудно проверить справедливость неравенства

$$\lambda(z) \ge \min\{\lambda(z_0), \lambda^0, ..., \lambda^{N-1}, \lambda(z_N, z)\}.$$

Пользуясь (36), учитывая неравенства (29),(30), находим, что

$$\lambda(z) \ge \min\{\lambda(z_0), \theta f^{-2}(t) | t \in [z_0, z]\}.$$

Отсюда, пользуясь (14), выводим при достаточно малом $c > 0$ также оценку

$$\lambda(z) \ge c(\min_{[z/2,z]} f)^{-2}, \;\; z \ge D. \tag{37}$$

Отсюда несложно вывести оценки (23).

Обобщенным решением уравнения

$$L^2 u = \Phi, \quad \Phi \in \left(H^2_\sigma\right)^* \tag{38}$$

назовем функцию $u \in H^2_{\sigma,lc}$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_\Omega L u L^* v dx = \Phi(v), \;\; \text{где} \;\; L^* = L_0 - L_1 - d, \; L_1 = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{39}$$

при любой пробной функции $v \in H^2_\sigma$ с ограниченным носителем. Нетрудно проверить, что гладкие решения тождества (39) удовлетворяют краевым условиям (3) и

$$Lu\big|_{x\in\Gamma_1} = 0, \quad \left[\frac{\partial Lu}{\partial n} + \left(\sum_{i=1}^n b_i n_i + \sigma(x) \right) Lu \right]\Bigg|_{x\in\Gamma_2} = 0. \tag{40}$$

Таким образом, "настоящий"квадрат оператора L в (38) получается лишь при $\displaystyle\sum_{i=1}^n b_i n_i = 0$.

При подстановке в (39) пробных функций вида $v = \xi u$ необходимо обеспечить требование $\dfrac{d\xi}{dn} = 0$ на Γ_2. Поэтому, при непустом множестве Γ_2, будем требовать $L_0 u = \Delta u$ и выбирать ξ с линиями уровня, ортогональными к $\partial\Omega$. Мы полагаем $\xi = \xi(g(x))$, где линии уровня функции g ортогональны к $\partial\Omega$. Докажем это.

Легко видеть, что семейство линий $y = cf(t)$ на плоскости (t, y) суть интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = yf'(t)/f(t)$. Тогда линии уровня решения задачи

Коши $yf'(t)g_t = f(t)g_y$, $g(t,0) = t$, ортогональны этому семейству. Функция $g(t,y)$ будет дифференцируема по крайней мере столько раз, сколько дифференцируема функция f'/f. Легко видеть, что функция g из введения, определенная равенством $g(x) = g(x_1, |x'|)$, удовлетворяет соотношениям

$$g(x) = \begin{cases} h^{-1}\left(\dfrac{|x'|^2}{2} + h(x_1)\right) & \text{при } f'(x_1) \neq 0, \\ x_1 & \text{при } f'(x_1) = 0, \end{cases}$$

где функция h определяется равенством $h' = \dfrac{f}{f'}$, с точностью до постоянной, которая выбирается произвольно в каждом интервале монотонности функции f; h^{-1} — обратная функция к h.

В дальнейшем понадобятся оценки производных функции g в тех точках области Ω, где $f(x_1) \neq 0$. Из соображений непрерывности они будут справедливыми всюду в Ω. Дифференцируя равенство

$$h(g) = \frac{|x'|^2}{2} + h(x_1),$$

находим, что

$$h'(g)\nabla g = (h'(x_1),\ x') = \left(\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\ x'\right). \tag{41}$$

Выведем отсюда оценку (при $|x'| < f(x_1)$)

$$|\nabla g| = \left|\left(\frac{h'(x_1)}{h'(g)}, \frac{x'f'(g)}{f(g)}\right)\right| \leq F, \quad g \geq D, \tag{42}$$

в которой постоянная F, вообще говоря, иная, чем в (15). Заметим, что если $f'(x_1) > 0$, то $g(x) > x_1$ и $(x_1, g(x))$ — интервал возрастания f, так что $f(x_1) \leq f(g(x))$. Аналогично, если $f'(x_1) < 0$, то $g(x) < x_1$ и $(g(x), x_1)$ — интервал убывания f, поэтому $f(x_1) \leq f(g(x))$. Далее,

$$h'(x_1) = h'(g) - h''(\theta)(g - x_1).$$

Приращение $(g - x_1)$ оценим так:

$$f^2(x_1)/2 > |x'|^2/2 = h(g) - h(x_1) = h'(\widehat{\theta})(g - x_1).$$

Таким образом, нужная оценка следует из (15),(16):

$$\left|\frac{h'(x_1)}{h'(g)}\right| \leq 1 + \left|\frac{h''(\theta)f^2(x_1)}{2h'(g)h'(\widehat{\theta})}\right| \leq F.$$

Отметим, что обратное отношение также ограничено:

$$\left|\frac{h'(g)}{h'(x_1)}\right| \leq 1 + \left|\frac{h''(\theta)f^2(x_1)}{2h'(x_1)h'(\widehat{\theta})}\right| \leq F.$$

Повторное дифференцирование равенства (41) приводит к соотношению

$$h''(g)\nabla g \otimes \nabla g + h'(g)\nabla^2 g = \mathrm{diag}(h''(x_1), 1, \ldots, 1).$$

При помощи (15), (16) получаем оценку

$$\|\nabla^2 g\| \leq \frac{F}{f(g)}, \quad g \geq D. \tag{43}$$

Аналогично, при $f \in C^3(0,\infty)$, ограничение (20) влечет оценку $|h'''(r)| \le \frac{F}{|h'(r)|}$, $\ r \ge D$, из которой выводим, что

$$\|\nabla^3 g\| \le \frac{F}{|h'(g)|^2} \le \frac{F}{f^2(g)}, \quad g \ge D. \tag{44}$$

Для функций $v \in C_0^\infty(R^n \setminus (\Gamma_1 \cup \Omega_r^\infty))$ из (11) следует неравенство

$$\lambda(r) \int\limits_{\Omega(r)} v^2 dx \le \int\limits_{\Omega(r)} |\nabla v|^2 dx. \tag{45}$$

Далее, если $v \in H^2_\sigma$, то

$$\gamma \int\limits_{\Omega(r)} |\nabla v|^2 dx \le \int\limits_{\Omega(r)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} dx = \int\limits_{\partial\Omega(r)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} n_j v dS - \int\limits_{\Omega(r)} v L_0 v dx =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_2} \sigma v^2 dS - \int\limits_{\Omega(r)} v L_0 v dx \le \int\limits_{\Omega(r)} \left(\frac{(L_0 v)^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon v^2}{2} \right) dx.$$

Выбирая $\varepsilon = \gamma\lambda(r)$ и пользуясь (45), устанавливаем, что

$$\gamma^2 \lambda^2(r) \int\limits_{\Omega(r)} v^2 dx \le \gamma^2 \lambda(r) \int\limits_{\Omega(r)} |\nabla v|^2 dx \le \int\limits_{\Omega(r)} (L_0 v)^2 dx. \tag{46}$$

Полезно также промежуточное неравенство

$$\gamma \int\limits_{\Omega(r)} |\nabla v|^2 dx \le -\int\limits_{\Omega(r)} v L_0 v dx. \tag{47}$$

Перейдем к построению срезающей функции, используемой при доказательстве теорем 1, 2. Пусть $\eta(t)$ — гладкая монотонная функция, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t > 1$, такая, что $\eta' \le 2$, $|\eta''| \le 8$, $|\eta'''| \le 32$. Пусть $\nu \in (7/8, 1)$ и $\beta = 1 - \nu$. Определим функцию $\alpha(t, r)$ при $r > 0$ равенством

$$\alpha(t, r) = \delta \eta \left(\frac{t - r/2}{\beta r} \right) \eta \left(\frac{\nu r - t}{\beta r} \right).$$

Отметим, что при фиксированном r носитель функции α лежит в отрезке $[r/2, \nu r]$. Положим

$$\xi(t, r) = \exp \left(-\int\limits_0^t \alpha(\tau, r) d\tau \right) \eta \left(\frac{r - t}{\beta r} \right).$$

Легко видеть, что

$$|\alpha| \le \delta, \quad |\alpha_t| \le \frac{2\delta}{\beta r}, \quad |\alpha_{tt}| \le \frac{8\delta}{\beta^2 r^2}. \tag{48}$$

Кроме того, $\xi_t = -\alpha\xi$ при $t \le \nu r$, $\ \xi = 0$ при $t \ge r$ и

$$|D_t^i \xi| \le \left(\frac{4}{\beta r} \right)^i \exp \left(-\frac{\delta r}{8} \right), \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad t \ge \nu r. \tag{49}$$

Оценим теперь производные функции $\xi(g(x); r)$ при $r \ge D$. Очевидно, что $\nabla\xi = \xi_t \nabla g = -\alpha\xi\nabla g$ при $g(x) \le \nu r$. Поэтому из (42) и (48) следует неравенство

$$|\nabla \xi| \le F\delta\xi, \quad \text{при } \ g(x) \le \nu r. \tag{50}$$

При помощи (42), (49) находим также, что

$$|\nabla\xi| \le \frac{C}{\beta r}\exp(-\frac{\delta r}{8}), \quad \text{при } \ g(x) \ge \nu r. \tag{51}$$

Далее, пользуясь (48), (43), (42), выводим оценку

$$\|\nabla^2\xi\| = \|\xi_t\nabla^2 g + \xi_{tt}\nabla g\otimes\nabla g\| = \xi\| - \alpha\nabla^2 g + (\alpha^2-\alpha_t)\nabla g\otimes\nabla g\| \le$$
$$\le C\left(\frac{\varepsilon_g F\delta}{m(r)} + \delta^2 + \frac{\delta}{\beta r}\right)\xi, \quad \text{при } \ g(x)\le \nu r, \quad m(r) = \min_{[r/2,r]} f,$$

в которой $\varepsilon_g = 0$ при $g = |x|$ и единице в ином случае. Мы будем выбирать $\delta \ge \dfrac{1}{\beta r}$, поэтому

$$\|\nabla^2\xi\| \le F(\frac{\varepsilon_g\delta}{m(r)} + \delta^2)\xi, \quad g \le \nu r. \tag{52}$$

При $g(x) \ge \nu r$, благодаря (14),(49) и (42), имеем оценку

$$\|\nabla^2\xi\| \le F\left(\frac{\varepsilon_g}{\beta r f(r)} + (\beta r f(r))^{-2}\right)\exp\left(-\frac{\delta r}{8}\right). \tag{53}$$

Аналогично, пользуясь (44), устанавливаем оценки

$$\|\nabla^3\xi\| \le F\left(\frac{\varepsilon_g}{\beta r f^2(r)} + (\beta r f(r))^{-3}\right)\exp\left(-\frac{\delta r}{8}\right), \quad g(x)\ge \nu r, \tag{54}$$

$$\|\nabla^3\xi\| \le F\left(\frac{\varepsilon_g\delta}{f^2(r)} + \delta^3\right)\xi, \quad g \le \nu r. \tag{55}$$

3. Доказательство теорем 1, 2

Введем обозначения $w = \xi u$, $K^*u = [L^*,\xi]u = L^*w - \xi L^*u$, $Ku = [L,\xi]u$, χ — характеристическая функция множества $\Omega(\nu r)$. Тогда

$$Lu\cdot L^*\xi^2 u = Lu\cdot(\xi L^*w + K^*w) = \xi Lu\cdot(L^*w + \xi^{-1}(\chi+1-\chi)K^*w) =$$
$$= (Lw - Ku)\cdot(L^*w + \xi^{-1}\chi K^*w) + (1-\chi)Lu\cdot K^*w =$$
$$= Lw\cdot L^*w + (Lw-Ku)\cdot\xi^{-1}\chi K^*w - \chi Ku\cdot L^*w -$$
$$-(1-\chi)(Ku\cdot L^*w - Lu\cdot K^*w).$$

Пусть $\Phi(v) = 0$ для функций $v\in H^2_\sigma$, $\operatorname{supp} v\subset\Omega(r)$. Подставив в (39) пробную функцию $v = \xi^2(g(x),r)u$, получим

$$\int\limits_{\Omega(r)} \left[(L_0w)^2 - 2d\,w\,L_0w + (d\,w)^2\right]dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega(r)}\left\{(L_1w)^2 - (Lw-Ku)\cdot\xi^{-1}\chi K^*w + \chi Ku\cdot L^*w\right\}dx + I, \tag{56}$$
$$I = \int\limits_{\Omega^r_{\nu r}}(Ku\cdot L^*w - Lu\cdot K^*w)dx.$$

Очевидны оценки

$$|-(Lw-Ku)\cdot\xi^{-1}\chi K^*w + \chi Ku\cdot L^*w| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon|Lw|^2}{2} + \frac{\varepsilon|L^*w|^2}{2} + \frac{\chi}{\varepsilon}(|Ku|^2 + \xi^{-2}|K^*w|^2) \le$$
$$\le 3\varepsilon(|L_0w|^2 + |L_1w|^2 + |dw|^2) + \frac{\chi}{\varepsilon}(|Ku|^2 + \xi^{-2}|K^*w|^2).$$

Воспользовавшись неравенствами (47) и (9), имеем

$$\int\limits_{\Omega} |L_1 w|^2 dx \le \int\limits_{\Omega} |b|^2 |\nabla w|^2 dx \le -\frac{d}{4} \int\limits_{\Omega} w L_0 w dx.$$

Выбрав теперь $\varepsilon = 1/6$, приведем соотношение (56) к виду

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} [|L_0 w|^2 - dwL_0 w + |dw|^2] dx \le \int\limits_{\Omega} 6\chi(|Ku|^2 + \xi^{-2}|K^* w|^2) dx + I. \qquad (57)$$

Заметим, что

$$Ku = Lw - \xi Lu = uL_0\xi + uL_1\xi + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \xi_{x_j} =$$
$$= w\xi^{-1}(L_0\xi + L_1\xi) + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(w_{x_i}\xi^{-1}\xi_{x_j} - \xi^{-2}\xi_{x_i}\xi_{x_j} w). \qquad (58)$$

Далее, $L_0\xi = \sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\xi_{x_i x_j} + \xi_{x_i}(a_{ij})_{x_j})$. Пользуясь (50), (52), (18) и неравенством $\delta/m \le \varepsilon\gamma/m^2 + \delta^2/(\varepsilon\gamma)$, находим, что

$$|L_0\xi| \le \Big(\varepsilon(d + \gamma\lambda(r)) + \frac{\varepsilon_g \varepsilon\gamma c}{m^2(r)} + \frac{MF\delta^2}{\varepsilon\gamma c}\Big)\xi, \ g \le \nu r.$$

$$|\xi^{-1} L_1 \xi| \le |b||\xi^{-1}\nabla\xi| \le C\sqrt{d}\delta \le C(\mu d + \mu^{-1}\delta^2); \quad \mu < 1.$$

Поэтому при помощи (23),(9) и (18) получаем оценку

$$|\chi Ku| \le 2\delta F|\nabla w| + \Big(2\varepsilon(d + \gamma\lambda(r)) + \frac{MF\delta^2}{\varepsilon\gamma c}\Big)|w|, \ g \le \nu r. \qquad (59)$$

Аналогичной оценке подчиняется величина

$$\chi\xi^{-1} K^* w = \xi^{-1}(L^*\xi w - \xi Lw) = \xi^{-1}(wL_0\xi + wL_1\xi + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i}\xi_{x_j}).$$

Мы будем выбирать δ так, чтобы $c^{-1}MF\delta^2 = \gamma\varepsilon^2(d + \gamma\lambda(r))$. Благодаря (12), при достаточно больших r будет выполнено неравенство $\delta \ge 1/(\beta r)$. Тогда из (59) выводим,что

$$|\chi Ku|^2 \le \varepsilon^2\gamma(d + \gamma\lambda(r))|\nabla w|^2 + 36\varepsilon^2(d^2 + \gamma^2\lambda(r)^2)w^2.$$

Выбирая $\varepsilon = 1/36$, при помощи (46) и (47) приводим (57) к виду

$$\frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} [|L_0 w|^2 + |dw|^2] dx \le I.$$

Преобразуем интеграл I, пользуясь формулами

$$K^* w = \xi Ku + 2u \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_{x_i}\xi_{x_j}, \quad L^* w = \xi L^* u + Ku - 2uL_1\xi.$$

Имеем

$$KuL^* w - LuK^* w = -2uLu \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_{x_i}\xi_{x_j} + Ku(Ku - 2L_1(\xi u)).$$

Теперь, действуя, как при выводе (59), нетрудно получить оценки

$$|Ku| \leq \left(C/(\beta r)|\nabla w| + |u|\Big(\frac{\varepsilon_g F}{f^2(r)} + (d+\gamma\lambda(r)) + \frac{C}{\beta^2 r^2}\Big)\right)\exp\left(-\frac{\delta r}{8}\right),$$

$$|I| \leq C\int\limits_{\Omega^r_{\nu r}} \exp\left(-\frac{\delta r}{4}\right)\left(|uLu| + u^2 + |\nabla u|^2\right)dx.$$

Теорема 1 доказана.

Уравнение

$$L^3 u = \Phi, \quad \Phi \in \left(H^3_\Delta\right)^*, \quad L = \Delta + L_1 - d \tag{60}$$

будем рассматривать только в областях вида (10), определяемых функцией $f \in C^3[0,\infty)$.

Для функций $v \in H^3_\Delta$, с ограниченным носителем supp $v \subset \overline{\Omega}(r)$ будет использоваться неравенство

$$\int\limits_\Omega |\Delta v|^2 dx \leq c^{-1}m^2(r)\int\limits_\Omega |\nabla\Delta v|^2 dx, \tag{61}$$

являющееся следствием (45) и (37).

В случае области с отрицательной средней кривизной границы справедливо также неравенство

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v^2_{x_i x_j} dx \leq \int\limits_\Omega |\Delta v|^2 dx. \tag{62}$$

Обобщенным решением уравнения (60) назовем функцию $u \in H^3_{\Delta,lc}$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_\Omega \left\{\nabla Lu\cdot\nabla L^* v + [(L_1-d)Lu]\cdot L^* v\right\}dx = \Phi(v) \tag{63}$$

при любой функции $v \in H^3_\triangle$ с ограниченным носителем.

Предположим, что $\Phi(v) = 0$ при всех v с носителем, лежащим в $\overline{\Omega(r)}$. Подставим в (63) пробную функцию $v = \xi^2 u$. Для обоснования законности такой подстановки следует убедиться, что Lv имеет нулевой след на $\partial\Omega$. Для этого достаточно, чтобы $\Delta v = \xi^2\Delta u + u\Delta\xi^2 + 2\xi\nabla u\nabla\xi = 0$ на $\partial\Omega$. Последнее обеспечивается ортогональностью линий уровня функции $g(x)$ к $\partial\Omega$, поскольку $\partial\Omega$ лежит на поверхности уровня функции u. Введем обозначения $w = \xi u$, $K^*u = [L^*,\xi]u = L^*w - \xi L^*u$, $Hu = [(L_1-d)L,\xi]u$, $G^*u = [\nabla L^*,\xi]u$, $Gu = [\nabla L,\xi]u$.

Тогда

$$\begin{gathered}\nabla Lu\cdot\nabla L^*\xi^2 u = \nabla Lu\cdot(\xi\nabla L^* w + G^* w) = \xi\nabla Lu\cdot(\nabla L^* w + \xi^{-1}(\chi+1-\chi)G^* w) = \\ = (\nabla Lw - Gu)\cdot(\nabla L^* w + \xi^{-1}\chi G^* w) + (1-\chi)\nabla Lu\cdot G^* w = \\ = \nabla Lw\cdot\nabla L^* w + (\nabla Lw - Gu)\cdot\xi^{-1}\chi G^* w - \chi Gu\cdot\nabla L^* w - \\ -(1-\chi)(Gu\cdot\nabla L^* w - \nabla Lu\cdot G^* w).\end{gathered}$$

Аналогично,

$$\begin{gathered}\big((L_1-d)Lu\big)\cdot L^*\xi^2 u = \big((L_1-d)Lu\big)\cdot(\xi L^* w + K^* w) = \\ = \big((L_1-d)Lw - Hu\big)\cdot(L^* w + \xi^{-1}\chi K^* w) + \\ +(1-\chi)\big((L_1-d)Lu\big)\cdot K^* w = (L_1-d)Lw\cdot L^* w + \\ +\big((L_1-d)Lw - Hu\big)\cdot\xi^{-1}\chi K^* w - \chi Hu\cdot L^* w + \\ +(1-\chi)\Big(\big((L_1-d)Lu\big)\cdot K^* w - Hu\cdot L^* w\Big).\end{gathered}$$

В левой части тождества (63) оставим слагаемые $\nabla Lw \cdot \nabla L^* w$ и $dLw \cdot L^* w$, а все остальные слагаемые перенесем вправо и оценим сверху. При оценке выражения $L_1 Lw \cdot L^* w$ будем использовать неравенство $ab \le a^2/6 + 3b^2/2$ для слагаемых с множителем $L_1 \Delta w = b \cdot \nabla \Delta w$ и неравенство $ab \le a^2/2 + b^2/2$ для остальных слагаемых. Получим

$$\int\limits_\Omega \big\{ |\nabla \Delta w|^2 + |d \nabla w|^2 - 2d \nabla w \nabla \Delta w - |\nabla L_1 w|^2 +$$

$$+ d(|\Delta w|^2 + (dw)^2 - 2dw \Delta w - (L_1 w)^2) \big\} dx \le$$

$$\le \int\limits_\Omega \big\{ \frac{1}{2} |\nabla \Delta w|^2 + \frac{3}{2} |\nabla L_1 w|^2 + \frac{3}{2} |d \nabla w|^2 + \frac{5}{2} |b|^2 (|\Delta w|^2 + |L_1 w|^2 + |dw|^2) \big\} dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega \chi \big\{ |Gu \cdot \nabla L^* w| + |\xi^{-1} G^* w \cdot \nabla Lw| + \frac{1}{2} (\xi^{-1} G^* w)^2 + \frac{1}{2} (Gu)^2 +$$

$$+ |Hu \cdot L^* w| + |\xi^{-1} K^* w \cdot (L_1 - d) Lw| + \frac{d}{2} (\xi^{-1} K^* w)^2 + \frac{1}{2d} (Hu)^2 \big\} dx + J, \tag{64}$$

где

$$J = \int\limits_{\Omega^r_{\nu r}} \big\{ |Gu \cdot \nabla L^* w - G^* w \cdot \nabla Lu| + |K^* w \cdot (L_1 - d) Lu - Hu \cdot L^* w| \big\} dx.$$

Докажем, что Gu при $x \in \Omega^{\nu r}_{r/2}$ приводится к виду $A(w)$, где

$$A(w) = \sum_{i,j=1}^n \delta B_{ij}(x) w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n (\mu M + \mu^{-1} \delta^2) B_i(x) w_{x_i} + \delta (M + \delta^2) B(x) w, \ \mu < 1, \tag{65}$$

$M = \max(d, m^{-2}(r))$.

Далее, большой буквой B с индексами или без, будем обозначать скалярные или вектор-функции, ограниченные в Ω постоянной, зависящей только от F. Для доказательства соотношения (65) прямыми вычислениями найдем, что

$$[d\nabla, \xi] u = du \nabla \xi, \quad [\nabla L_1, \xi] u = L_1 u \cdot \nabla \xi + \nabla (u L_1 \xi),$$

$$[\nabla \Delta, \xi] w = \Delta u \cdot \nabla \xi + \nabla (u \Delta \xi) + 2 \nabla (\nabla u \cdot \nabla \xi).$$

Покажем, как оцениваются отдельные слагаемые, входящие в Gu. При помощи (50) получаем оценку

$$|du \nabla \xi| = |dw \xi^{-1} \nabla \xi| \le |F d \delta w| \le C \delta M w.$$

Далее, используя (21), (50) и (52), оценим, например, слагаемое

$$\nabla (u L_1 \xi) = \nabla (w \xi^{-1} L_1 \xi) = \xi^{-1} L_1 \xi \nabla w + w \nabla (\xi^{-1} L_1 \xi);$$

$$|\nabla \xi^{-1} L_1 \xi| \le |\xi^{-2} \nabla \xi| \cdot |b| \cdot |\nabla \xi| + \|\xi^{-1} |b| \nabla^2 \xi\| + \xi^{-1} \|\nabla b\| \cdot |\nabla \xi| \le$$

$$\le C (\sqrt{d} \delta^2 + \sqrt{d} (\delta^2 + \frac{\delta}{m(r)}) + d\delta) \le 3C\delta (M + \delta^2).$$

Оценивая аналогичным образом остальные слагаемые, устанавливаем (65). Точно также устанавливается соотношение $\xi^{-1} G^* w = A^* w$, где A^* имеет вид (65). Нетрудно установить, что $\sqrt{d} \xi^{-1} K^* w = A^k w$, где A^k имеет вид (65) с $B_{ij} = 0$. Далее, $d^{-\frac{1}{2}} Hu = -\sqrt{d} [L, \xi] u + d^{-\frac{1}{2}} b \cdot Gu$, поэтому, ввиду (21), $d^{-\frac{1}{2}} Hu$ также имеет вид (65). Таким образом,

$$\frac{\chi}{2} \big((\xi^{-1} G^* w)^2 + (Gu)^2 + d (\xi^{-1} K^* w)^2 + d^{-1} (Hu)^2 \big) \le$$

$$\le C \big(\delta^2 \|\nabla^2 w\|^2 + (\mu^2 M^2 + \mu^{-2} \delta^4) |\nabla w|^2 + \delta^2 (M^2 + \delta^4) w^2 \big).$$

Покажем, как оцениваются другие слагаемые правой части (64),

$$|Gu\nabla L^*w| \leq \frac{\varepsilon}{2}(|\nabla\Delta w|^2 + |\nabla L_1 w|^2 + |d\nabla w|^2) + \frac{3}{2\varepsilon}(Gu)^2.$$

Далее,

$$|Hu \cdot L^*w| = |d^{-\frac{1}{2}}Hu \cdot d^{\frac{1}{2}}L^*w| \leq \frac{\varepsilon d}{2}(|\Delta w|^2 + |L_1 w|^2 + d^2w^2) + \frac{3}{2\varepsilon d}(Hu)^2.$$

Точно так же, имеем

$$|\xi^{-1}K^*w \cdot (L_1 - d)Lw| = |d^{\frac{1}{2}}\xi^{-1}K^*w \cdot d^{-\frac{1}{2}}(L_1 - d)Lw| =$$

$$= \left| d^{-\frac{1}{2}}\xi^{-1}K^*w \left(\frac{b \cdot \nabla Lw}{\sqrt{d}} - d^{\frac{1}{2}}Lw \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\big(|\nabla\Delta w|^2 + |\nabla L_1 w|^2 + |d\nabla w|^2 + d(|\Delta w|^2 + |L_1 w|^2 + d^2w^2)\big) + \frac{3}{\varepsilon d}(\xi^{-1}K^*w)^2.$$

Заметим еще, что

$$-2d\int_\Omega \{\nabla w \cdot \nabla\Delta w + dw\Delta w\}dx = 2d\int_\Omega \{|\Delta w|^2 + d|\nabla w|^2\}dx.$$

Наконец, при помощи (62), (9), (21) устанавливаем, что

$$\int_\Omega |\nabla L_1 w|^2 dx \leq 2\int_\Omega \{|b|^2\|\nabla^2 w\|^2 + \|\nabla b\|^2|\nabla w|^2\}dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\int_\Omega \{d|\Delta w|^2 + d^2|\nabla w|^2\}dx.$$

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{6}$, приводим (64) к виду

$$I = \int_\Omega \{|\nabla\Delta w|^2 + d|\Delta w|^2 + d^2|\nabla w|^2 + d^3w^2\}dx \leq$$

$$\leq C\int_\Omega \{\delta^2\|\nabla^2 w\|^2 + (\mu^2 d^2 + \mu^{-2}\delta^4)|\nabla w|^2 + \delta^2(d^2 + \delta^4)w^2\}dx + CJ. \tag{66}$$

Выбираем μ и δ так, чтобы $C\delta^2 = \dfrac{M}{8}$, $C\mu^2 = \dfrac{1}{4}$. Если $M = d$, то из (66) с учетом (62), получаем $I \leq 2CJ$. Если $M = m^{-2}(r)$, то, пользуясь неравенствами (46), получаем такое же соотношение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов В.П. *О первой краевой задаче для одного класса гипоэллиптических уравнений* // Матем. сб. Т. 63(105). №2. 1964. С. 11–51.
2. Михайлов В.П. *Первая краевая задача для некоторых полуограниченных гипоэллиптических уравнений* // Матем. сб. Т. 64(106). № 1. 1964. С. 11–51.
3. E. Phragmen, E. Lindelof // Acta math. V. 31. 1908. P. 381–406.
4. Ландис Е.М., Панасенко Г.П. *Об одном варианте теоремы Фрагмена-Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 5. 1979. С. 105–136.
5. R.A. Toupin *Saint-Venant's principle* // Arch. Rat. Mech. Anal. V.18. 1965. P. 83–96.
6. J.K. Knowles *On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity* //Arch. Rat. Mech. Anal. V. 21. 1966. P.1–22.

7. Кондратьев В.А., Копачек И., Ленвеншвим Д.М., Олейник О.А. *Неулучшаемые оценки в пространствах Гельдера и точный принцип Сен-Венана для решения бигармонического уравнения* // Тр. Мат. института СССР. Т. 166. 1984. С. 91–106.
8. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О принципе Сен-Венана в плоской теории упругости* // Докл. АН СССР. Т. 239. № 3. 1978. С. 530–533.
9. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости и краевые задачи для бигармонического уравнения в неоганиченной области* // Сиб. мат. жур. 19. № 5. 1978. С. 1154–1165.
10. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Энергетические оценки обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка и их приложения* // ДАН СССР. Т. 232. № 6. 1977. С. 1257–1260.
11. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Об устранимых особенностях на границе и единственности решений краевых задач для эллиптических и параболических уравнений второго порядка* // Функциональный анализ и его приложения. Вып. 3. 1977. С. 54–67.
12. Кондратьев В.А., Олейник О.А. *Теорема единственности решений внешних краевых задач и аналог принципа Сен-Венана* // УМН. Т. 39. № 4. 1984. С. 165–166.
13. Кондратьев В.А., Олейник О.А. *О единственности решений краевых задач в неограниченных областях и об изолированных особых точках решений системы теории упругости и эллиптических уравнений второго порядка* // УМН. Т. 42. № 4. 1987. С. 189–190.
14. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука. 1973. 576 с.
15. Кожевникова Л.М. *О существовании и единственности решений задачи Дирихле для псевдодифференциальных эллиптических уравнений в областях с некомпактными границами* // Уфимский матем. ж. Том 1. № 1. 2009. С. 38–68.
16. *Герфанов А.Р., Мукминов Ф.Х.* Широкий класс единственности решения для неравномерно эллиптического уравнения в неограниченной области // Уфимский матем. ж. Том 1. № 3. 2009. С. 11–27.
17. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука. 1983. 424 с.
18. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1971. 512 с.
19. Кожевникова Л.М. *Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений* // Изв. РАН. Т. 70. № 6. 2006 С. 93–128.
20. Шишков А.Е. *Принцип Фрагмена-Линделефа для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка* // Успехи мат. наук Т. 43. № 4. 1988. С. 231–232.
21. Биккулов И.М., Мукминов Ф.Х. *О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области* // Матем. сб. Т. 195. № 3. 2004. С. 115–142.

Ильгиз Мидехатович Биккулов,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: `im_radosti@rambler.ru`

Фарит Хамзаевич Мукминов,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул.Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `mfkh@rambler.ru`