ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 (2010). С. 17-34.

УДК 517.95

РЕЗОЛЬВЕНТЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕННЫХ КОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Г.Е. БЕРИКХАНОВА, Б.Е. КАНГУЖИН

Аннотация. В работе дано полное описание корректно разрешимых краевых задач для бигармонического оператора в круге. Затем выписаны их конечномерные возмущения, которые также корректно разрешимы. Приведены формулы резольвенты указаных операторов.

Ключевые слова: моделирование пластин, корректные задачи, задача Дирихле, бигармоническое уравнение, функция Грина, резольвента оператора.

1. Введение

При моделировании пластин и оболочек возникают операторы вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\delta_i, \qquad (*)$$

так как тонкостенные трубы и панели в реальных условиях, как правило, опираются на точечные жесткие и упругие, шарнирные и защемленные опоры, имеют точечно присоединенные массы [1]. Поскольку δ_i — дельта-функции Дирака имеют точечные носители, то речь идет о точечных взаимодействиях. В 1961 году Березин и Фаддеев [2] дали математическое толкование точечных взаимодействий в рамках теории расширений абстрактных операторов.

В настоящей работе сначала описаны всевозможные корректные задачи для операторов вида $(*)$, а затем приведены формулы их резольвенты. При этом удается естественным образом получить конечномерные возмущения для бигармонического оператора. Подобные возмущения по другому поводу исследовались в работе [3].

2. Вспомогательные утверждения и доказательство теорем

В дальнейшем нам понадобится известное утверждение.

Теорема 1. *Решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге* $\Delta^2 W(x,y)=f(x,y)\,, x^2+y^2<r^2$ *задается формулой*

$$W(x,y)=\int\int\limits_{\xi^2+\eta^2<r^2} G(x,y,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

с граничными условиями

$$W|_{x^2+y^2=r^2}=0,\ \left.\frac{\partial W}{\partial \overline{n}}\right|_{x^2+y^2=r^2}=0,$$

G.E. Berikhanova, B.E. Kanguzhin, Resolvent of finite-dimensional perturbed of the correct problems for the biharmonic operator.

Поступила 5 января 2010 г.

где $\frac{\partial}{\partial \overline{n}}$ *— производная по внешней нормали на границе*

$$G(x,y,\xi,\eta)=d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)-$$

$$-d\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\times$$

$$\times\ln\left[\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\right]+$$

$$+dr^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\right)\times$$

$$\times\ln\left[\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\right]+$$

$$+dr^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\right)$$

где d *— некоторая константа, конкретный вид которой не играет роли.*

Обсуждение теоремы 1. Теорема 1 утверждает, что функция Грина для круглой пластины с защемленным краем выписывается в явном виде. Заметим также, что функция влияния $G(x,y,\xi,\eta)$ принимает только неотрицательные значения при любых (x,y) и (ξ,η), поскольку задаче Дирихле для бигармонического уравнения соответствует положительно определенный оператор.

Доказательство. Известно, что фундаментальное решение бигармонического уравнения имеет вид

$$G(x,y)=d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right),$$

где d — некоторая константа. Введем обозначения

$$X^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,$$

$$Y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left|x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right|^2,$$

$$Z^2=r^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\right).$$

Для указанных чисел справедливо тождество $X^2=Y^2-Z^2$, которое проверяется непосредственно. Отсюда, в частности, следует $Y^2>Z^2$. Рассмотрим фундаментальное решение

$$dX^2\ln X^2=d\left(Y^2-Z^2\right)\ln\left(Y^2-Z^2\right)=d\left(Y^2-Z^2\right)\ln Y^2+d\left(Y^2-Z^2\right)\ln\left(1-\frac{Z^2}{Y^2}\right)=$$

$$=dY^2\ln Y^2-dZ^2\ln Y^2+d\left(Y^2-Z^2\right)\left[-\frac{Z^2}{Y^2}-\frac{1}{2}\frac{Z^4}{Y^4}-...\right].$$

Указанные преобразования верны, поскольку $Y^2>Z^2$, отсюда получим тождество

$$dX^2\ln X^2-dY^2\ln Y^2+dZ^2\ln Y^2+dZ^2=d\frac{Z^4}{Y^2}-d\left(Y^2-Z^2\right)\left[\frac{1}{2}\frac{Z^4}{Y^4}+...\right].\qquad(1)$$

Обозначим левую часть тождества через $G(x,y,\xi,\eta)$, тогда $G(x,y,\xi,\eta)=dX^2\ln X^2-dY^2\ln Y^2+dZ^2\ln Y^2+dZ^2$. Покажем, что введенная функция $G(x,y,\xi,\eta)$ представляет функцию Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге. Для простоты при доказательстве теоремы считаем, что $r=1$.

Функция Грина состоит из фундаментального решения и компенсирующих функций:

$$G(x,y,\xi,\eta)=\varepsilon(x,y,\xi,\eta)-g_1(x,y,\xi,\eta)+g_2(x,y,\xi,\eta)+g_3(x,y,\xi,\eta),$$

где

$$\varepsilon(x,y,\xi,\eta)=dX^2\ln X^2=d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right),$$

$$g_1(x,y,\xi,\eta)=dY^2\ln Y^2=d\left(\xi^2+\eta^2\right)\left[\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right]\times$$

$$\times\ln\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)\left[\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right]\right],$$

$$g_2(x,y,\xi,\eta)=dZ^2\ln Y^2=d\left(1-\xi^2-\eta^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)\times$$

$$\times\ln\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)\left[\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right]\right],$$

$$g_3(x,y,\xi,\eta)=dZ^2=d\left(1-\xi^2-\eta^2\right)\left(1-x^2-y^2\right).$$

Вычислим вначале

$$\Delta^2_{x,y}G(x,y,\xi,\eta)=\Delta^2_{x,y}\left[\varepsilon(x,y,\xi,\eta)-g_1(x,y,\xi,\eta)+g_2(x,y,\xi,\eta)+g_3(x,y,\xi,\eta)\right].$$

В правой части каждое слагаемое вычисляем по отдельности $\Delta^2_{x,y}\varepsilon(x,y,\xi,\eta)=$ $=\Delta^2_{x,y}d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)$ при $(\xi,\eta)=(0,0)$. С помощью формулы Лейбница можем записать соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right]=2\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{4x^2}{x^2+y^2}+2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right]=2\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{4y^2}{x^2+y^2}+2.$$

В результате $\Delta_{x,y}\left[(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right]=4\ln(x^2+y^2)+8.$

Поэтому, если (x,y) не совпадает с (ξ,η), то

$$\Delta^2_{x,y}\left[\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right]=4\Delta\ln\left(x^2+y^2\right)+8\Delta 1=$$

$$=4\left(-\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=0.$$

Так как точка (x,y) находится внутри области Ω, а точка $\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)$ вне области Ω, то они не могут совпадать, и, следовательно, аналогично предшествующему выполняется равенство $\Delta^2_{x,y}g_1(x,y,\xi,\eta)=0$.

Поскольку функция $g_2(x,y,\xi,\eta)$ представляет произведение гармонической функции $\ln\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)\left[\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right]\right]$ на радиальный многочлен $(1-x^2-y^2)$, из теоремы Альманзи следует, что $\Delta^2_{x,y}g_2(x,y,\xi,\eta)=0$.

Очевидно, что

$$\Delta^2_{x,y}g_3(x,y,\xi,\eta)=0.$$

Поскольку $d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)$ — фундаментальное решение, то $\Delta^2_{x,y}d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)=\delta_\Omega\left((x,y),(\xi,\eta)\right)$, где $\delta_\Omega\left((x,y),(\xi,\eta)\right)$ — дельта-функция Дирака в области Ω. Таким образом, функция $G(x,y,\xi,\eta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta^2_{x,y}G(x,y,\xi,\eta)=0$ при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$. С другой стороны, $G(x,y,\xi,\eta)$ согласно тождеству (1) равняется правой части (1), то есть

$$G(x,y,\xi,\eta)=d\frac{Z^4}{Y^2}-d\left(Y^2-Z^2\right)\left[\frac{1}{2}\frac{Z^4}{Y^4}+...\right].$$

Поскольку $Z^4 = \left(1-\left(x^2+y^2\right)\right)^2\left(1-\left(\xi^2+\eta^2\right)\right)^2$, то следы на границе $Z^4\big|_{(x,y)\in\partial\Omega}$ и $\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}Z^4\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}$ равны нулю. Поэтому функция $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$ на границе $\partial\Omega$ удовлетворяет граничным условиям Дирихле

$$G\left(x,y,\xi,\eta\right)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\Omega}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{x,y}}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\Omega}=0.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Пусть $h\left(x,y\right)$ — произвольная четыре раза дифференцируемая в круге Ω функция. Введем новую функцию по формуле

$$I\left(x,y\right)=\int\!\!\int\limits_{\Omega}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Delta^2_{\xi,\eta}h\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta,$$

где $\Delta_{\xi,\eta}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ — оператор Лапласа по переменным ξ,η.

Ясно, что функция $I\left(x,y\right)$ обладает свойствами:

$$\Delta^2_{x,y}I\left(x,y\right)=\Delta^2_{x,y}h\left(x,y\right),\ (x,y)\in\Omega, \tag{2}$$

$$I\left(x,y\right)\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial I\left(x,y\right)}{\partial\overline{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{4}$$

С другой стороны, вспоминая вторую формулу Грина $\int\!\int\limits_{\Omega}\Delta^2uvdxdy-\int\!\int\limits_{\Omega}u\Delta^2vdxdy=$ $=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}}\Delta uv-\Delta u\frac{\partial v}{\partial\overline{n}}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}}u\Delta v-u\frac{\partial}{\partial\overline{n}}\Delta v\right)\right]ds$, функцию $I\left(x,y\right)$ можно переписать в виде

$$\begin{gathered}I\left(x,y\right)=\int\!\!\int\limits_{\Omega}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Delta^2_{\xi,\eta}h\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta=\\=\int\!\!\int\limits_{\Omega}h\left(\xi,\eta\right)\Delta^2_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)d\xi d\eta+\\+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG\left(x,y,\xi,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)+\right.\\\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)\right]ds_{\xi,\eta},\end{gathered} \tag{5}$$

где $\overline{n}_{\xi,\eta}$ — внешняя нормаль к окружности $\partial\Omega$ в точке $\left(\xi,\eta\right)$.

В силу симметрии функции Грина $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$ относительно пар $\left(x,y\right)$ и $\left(\xi,\eta\right)$ имеем равенство

$$\Delta^2_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)=\delta_\Omega\left(\left(x,y\right),\left(\xi,\eta\right)\right), \tag{6}$$

где $\delta_\Omega\left(\left(x,y\right),\left(\xi,\eta\right)\right)$ — дельта-функция Дирака в области Ω.

Из (5) и (6) следует равенство

$$\begin{gathered}I\left(x,y\right)=h\left(x,y\right)+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG\left(x,y,\xi,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)+\right.\\\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)\right]ds_{\xi,\eta.}\end{gathered}$$

Поскольку $G(x,y,\xi,\eta)|_{(x,y)\in\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0$, последнее равенство переписываем в виде

$$I(x,y) = h(x,y) + \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} h(\xi,\eta)\, \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) - \right.$$

$$\left. - h(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta}. \tag{7}$$

Удобно ввести обозначение $M(x,y) = h(x,y) - I(x,y)$. Подставим правую часть (7) в соотношение (2). В результате для любой гладкой функции $h(x,y)$ получим соотношение

$$\Delta^2_{x,y} M(x,y) = 0. \tag{8}$$

Теперь используем граничные условия (3), (4). Подставим правую часть (7) в граничные условия (3), (4), тогда для произвольной гладкой функции $h(x,y)$ имеем граничные соотношения

$$\begin{cases} h|_{\partial\Omega} + M|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial \overline{n}_{x,y}}\Big|_{\partial\Omega} + \frac{\partial M}{\partial \overline{n}_{x,y}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В силу произвольности $h(x,y)$ и независимости граничных значений $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} h(\xi,\eta)$, $h(\xi,\eta)$ при $(\xi,\eta) \in \partial\Omega$ убеждаемся в справедливости следующих свойств функции Грина:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = \delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)), \\ \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = -\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)), \\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$ — дельта-функция Дирака на границе $\partial\Omega$.

По-видимому, граничные соотношения (10) для функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ известны, но авторы не смогли найти точные координаты для ссылок. Поэтому сформулируем необходимое для дальнейшего результата в виде отдельного утверждения.

Теорема 2. *Функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге обладает свойствами:*
1) $G(P,Q) = G(Q,P), \forall Q,P \in \Omega,$
2) $G(P,Q) \geq 0, \forall Q,P \in \Omega,$
3) $\Delta^2_{x,y} G(Q,P) = \delta_\Omega(P,Q), \forall Q,P \in \Omega,$
4) $G(P,Q) = 0, P \in \partial\Omega, Q \in \Omega,$
5) $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_p} G(P,Q) = 0, P \in \partial\Omega, Q \in \Omega,$
6) при $P,Q \in \partial\Omega$ *справедливо соотношение* (10).

Теперь образуем новую функцию

$$W(x,y) = \int\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta + h(x,y) - I(x,y), \tag{11}$$

где $h(x,y)$ — произвольная достаточно гладкая функция, $I(x,y)$ определяется по формуле (7).

Теорема 3. *Функция* $W(x,y)$, *введенная по формулам* (11) *и* (7), *является решением следующей задачи:*

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta^2 W(x,y) = f(x,y),\ (x,y)\in\Omega, \\ \\ W(x,y)|_{\partial\Omega} = h(x,y)|_{\partial\Omega}, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W(x,y)\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} h(x,y)\Big|_{\partial\Omega}, \end{array}\right. \tag{12}$$

где $h(x,y)$ — *произвольная достаточно гладкая функция.*

Причем решение задачи (12) единственно, то есть решение задачи (12) зависит только от граничных значений $h(x,y)|_{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} h(x,y)\Big|_{\partial\Omega}$, но не зависит от $h(x,y)$, когда $(x,y)\in\Omega$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения (7) представление (11) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} W(x,y) = \int\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta - \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} h(\xi,\eta)\, \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) - \\ - h(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big]\, ds_{\xi,\eta}. \end{gathered} \tag{13}$$

Проверим для $W(x,y)$ первое соотношение из (12). Справедливость равенства (12) следует из того, что верны (8) и (6). Проверим для $W(x,y)$ второе соотношение из (12). Пусть $(x,y)\in\partial\Omega$. Тогда из равенства 4 теоремы 2 и соотношений (10) следует требуемое граничное соотношение из (12). Третье соотношение из (12) следует из 5 теоремы 2 и соотношений (9). Единственность задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре известна. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

Теперь покажем, как, используя теорему 3, можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для бигармонического уравнения в шаре.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x,y)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x,y)$, то есть пусть существует непрерывный оператор L, отображающий $f(x,y)$ в $h(x,y)$. Напомним, $h(x,y)$ — гладкая функция проколотой области Ω_0. Итак, пусть $h = L(f)$.

Тогда задача (12) примет вид

$$\Delta^2 W(x,y) = f(x,y),\ (x,y)\in\Omega, \tag{14}$$

$$\left\{\begin{array}{l} W(x,y)|_{\partial\Omega} - L(\Delta^2 W)|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W(x,y)\Big|_{\partial\Omega} - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L(\Delta^2 W)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{array}\right. \tag{15}$$

Условия (15), накладываемые на функцию $W(x,y)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (14) при любой правой части $f(x,y)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (14)–(15) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми"условиями вида (15). Слово "краевые"пишем в кавычках из-за того, что в общем случае, эти условия не являются граничными.

Итак, справедлива

Теорема 4. *Для любого непрерывного оператора* L, *отображающего пространство* $\{f\}$ *в множество* $\{h\}$ *гладких функции, задача* (14)–(15) *имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях* f.

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 5. *Если уравнение* (14) *при всех допустимых правых частях* f *с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется* *непрерывный оператор L, отображающий пространство $\{f\}$ в множество $\{h\}$ гладких функции, такой, что дополнительные условия примут вид* (15).

Доказательство. Пусть уравнение (14) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x,y)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $u(x,y,f)$. Введем функцию $W(x,y,f)=\int\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$ и составим разность

$$v(x,y)=u(x,y,f)-W(x,y,f). \tag{16}$$

Ясно, что $v(x,y)$ является решением однородного уравнения $\Delta^2 v=0$ и однозначно определяется по f. Таким образом, любому f соответствует единственная функция v, которая представляет достаточно гладкую функцию и является бигармонической функцией. Обозначим через L оператор, ставящий каждой f в соответствие v, то есть $v=L(f)$.

Рассмотрим совершенно новую функцию по формуле $w(x,y)=W(x,y,f)-v(x,y)$.

В данном случае роль $h(x,y)$ играет функция $v(x,y)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\Delta^2 w(x,y)=f(x,y),$$

$$w(x,y)|_{\partial\Omega}=v(x,y)|_{\partial\Omega}, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}w(x,y)\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}v(x,y)\right|_{\partial\Omega},$$

где $v(x,y)=L(f)$ или $v(x,y)=L(\Delta^2 w)$.
С другой стороны, из представления (16) следует, что $u(x,y,f)=W(x,y,f)+v(x,y)$ также удовлетворяет соотношениям (17). Поэтому из теоремы единственности вытекает, что $u(x,y,f)=w(x,y)$. Следовательно, дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид (17). Теорема 5 полностью доказана.

Для конкретности приведем примеры, вытекающие из теорем 4 и 5. Согласно теореме 4, выбирая оператор L, можно получить те или иные корректные задачи для бигармонического уравнения в шаре. Причем согласно теореме 5 этот способ позволяет описать все возможные корректные задачи.

Пример 1. Пусть оператор L имеет интегральный вид

$$(Lf)(x,y)=\int\limits_{\Omega} K(x,y,t,s)\,f(t,s)\,dtds,$$

где $K(x,y,t,s)$ — достаточно гладкое по (x,y) ядро интегрального оператора. Тогда дополнительные условия (15) примут вид

$$\begin{cases} W(x,y)|_{\partial\Omega}-\int\limits_{\Omega} K(x,y,t,s)\,\Delta^2 W(t,s)\,dtds|_{\partial\Omega}=0,\\ \left.\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}W(x,y)\right|_{\partial\Omega}-\int\limits_{\Omega}\left.\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}K(x,y,t,s)\,\Delta^2 W(t,s)\,dtds\right|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{18}$$

Если к тому же ядро $K(x,y,t,s)$ по переменным (t,s) является бигармонической функцией, то дополнительные условия (18), используя формулу Грина, можно записать в виде краевых условий

$$\begin{cases} W(x,y)|_{\partial\Omega} - \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} \Delta_{t,s} W(t,s) K(x,y,t,s) - \Delta_{t,s} W(t,s) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} K(x,y,t,s) \Big) + \\ + \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} W(t,s) \Delta_{t,s} K(x,y,t,s) - W(t,s) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} \Delta_{t,s} K(x,y,t,s) \Big) \Big] ds_{t,s} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W(x,y) \Big|_{\partial\Omega} - \\ - \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} \Delta_{t,s} W(t,s) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} K(x,y,t,s) - \Delta_{t,s} W(t,s) \frac{\partial^2}{\partial \overline{n}_{t,s} \partial \overline{n}_{x,y}} K(x,y,t,s) \Big) + \\ + \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{t,s}} W(t,s) \Delta_{t,s} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} K(x,y,t,s) - W(t,s) \frac{\partial^2}{\partial \overline{n}_{t,s} \partial \overline{n}_{x,y}} \Delta_{t,s} K(x,y,t,s) \Big) \Big] ds_{t,s} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Таким образом, краевая задача (14)–(19) однозначно разрешима при любых допустимых правых частях, если $K(x,y,t,s)$ — гладкая по (x,y) и бигармоническая по (t,s).

Пример 2. Если оператор L имеет вид $(Lf)(x,y) = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t,s) \exp\left(-\frac{1}{|f(t,s)|} \right) dtds$, где $K(x,y,t,s)$ — достаточно гладкое ядро интегрального оператора, то приходим к нелинейным граничным условиям.

Теперь уточним возможность выбора граничного оператора L. На самом деле, для записи дополнительных условий (15) нам нет необходимости знать значения $(Lf)(x,y)$ во внутренних точках (x,y) из Ω. Достаточно знание информации о следах $(Lf)(x,y)$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} (Lf)(x,y)$ на границе $\partial\Omega$.

В дальнейшем нам удобно вместо $L(f)$ писать $(Lf)(x,y)$ и считать L линейным оператором. Оператор, соответствующий задаче (14)–(15), обозначим через A_L. Тогда A_0 соответствует задаче Дирихле из теоремы 1. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора A_L.

Теорема 6. *Если L — линейный непрерывный оператор из теоремы 4 и 5, то резольвента оператора A_L имеет вид*

$$(A_L - \lambda I)^{-1} f(x,y) = (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y) -$$
$$- \int\limits_{\partial\Omega} \Big\{ \big(A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \big) \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) \Big) -$$
$$- \Big(A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Big) \big(L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) \big) \Big\} ds_{\xi,\eta}.$$

Согласно теореме 6 для вычисления резольвенты на произвольном элементе f достаточно уметь вычислять значения резольвенты на конкретных функциях $\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)$ при $(\xi,\eta) \in \partial\Omega$.

Доказательство. Удобно ввести следующие обозначения

$$u(x,y) = (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y),$$
$$v(x,y,\xi,\eta) = A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta),$$
$$g(\xi,\eta) = L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi,\eta),$$
$$W(x,y) = u(x,y) - \int\limits_{\partial\Omega} \Big[v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big] ds_{\xi,\eta}.$$

Покажем, что $\Delta^2 W = \lambda W + f$. Действительно, рассмотрим

$$\Delta^2 W = \Delta^2 u - \Delta^2 \int\limits_{\partial\Omega} \Big[v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big] ds_{\xi,\eta} =$$
$$= \lambda u + f - \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\Delta^2 v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta^2 v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big] ds_{\xi,\eta}.$$

Поскольку $A_L p(x,y) = \Delta^2 p(x,y)$ при $p \in D(A_L)$, то

$$\Delta^2 A_L (A_L - \lambda I)^{-1} = \Delta^2 \left(I + \lambda (A_L - \lambda I)^{-1} \right) =$$
$$= \Delta^2 + \lambda \Delta^2 (A_L - \lambda I)^{-1} = \Delta^2 + \lambda A_L (A_L - \lambda I)^{-1}.$$

Вспоминая также, что $\Delta^2_{x,y} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) = 0$, $(x,y) \in \Omega$, можем записать соотношение

$$\Delta^2 W = \lambda u + f - \lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left[v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta} =$$
$$= \lambda W + f.$$

Таким образом, функция W удовлетворяет требуемому дифференциальному соотношению $\Delta W = \lambda W + f$. Остается проверить граничные условия вида (15). Для этого рассмотрим разность

$$[W - L\Delta^2 W]|_{\partial\Omega} =$$
$$= \Big[u - \int\limits_{\partial\Omega} \Big(v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big) ds_{\xi,\eta} -$$
$$- L(\lambda W + f) \Big]\Big|_{\partial\Omega} = - \Big[\int\limits_{\partial\Omega} \Big(A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) -$$
$$- A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big) ds_{\xi,\eta} \Big] \Big|_{\partial\Omega} - L(\lambda u + f)|_{\partial\Omega} +$$
$$+ \Big(\lambda L \int\limits_{\partial\Omega} \Big(v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big) ds_{\xi,\eta} \Big) \Big|_{\partial\Omega} =$$
$$= - \Big(\int\limits_{\partial\Omega} \Big(\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big) ds_{\xi,\eta} \Big) \Big|_{\partial\Omega} -$$
$$- \Big[\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \Big((A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) -$$
$$- (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big) ds_{\xi,\eta} \Big] \Big|_{\partial\Omega} - L(\lambda u + f)|_{\partial\Omega} +$$
$$+ \Big(\lambda L \int\limits_{\partial\Omega} \Big(v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big) ds_{\xi,\eta} \Big) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Вспоминая соотношения (10), последнее соотношение запишем в виде

$$[W - L\Delta^2 W]|_{\partial\Omega} = g(\xi,\eta)|_{\partial\Omega} -$$
$$- \Big[\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \Big((A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) -$$
$$- (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big) ds_{\xi,\eta} \Big] \Big|_{\partial\Omega} - L(\lambda u + f)|_{\partial\Omega} +$$
$$+ \Big(\lambda L \int\limits_{\partial\Omega} \Big(v(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g(\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v(x,y,\xi,\eta) g(\xi,\eta) \Big) ds_{\xi,\eta} \Big) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Заметим, что $g(\xi,\eta)|_{\partial\Omega} = L(\lambda u + f)|_{\partial\Omega}$, так как

$$\lambda u + f = \lambda (A_0 - \lambda I)^{-1} f + f = A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f.$$

С другой стороны, функция $(A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)$, а также функция $(A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \in D(A_L)$, и поэтому удовлетворяют соответствующим краевым условиям

$$(A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Big|_{\partial\Omega} = L A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Big|_{\partial\Omega},$$
$$(A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Big|_{\partial\Omega} = L A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому

$$\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\Big|_{\partial\Omega} =$$
$$= L\left(\lambda \int\limits_{\partial\Omega} v\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega},$$
$$\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\Big|_{\partial\Omega} =$$
$$= L\left(\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega},$$

поскольку L — линейный оператор.

Следовательно, выполняется одно из краевых условий (15)

$$\left[W - L\Delta^2 W\right]\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Теперь проверим выполнение второго из краевых условий (15). Для этого рассмотрим разность

$$\left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W\left(x,y\right) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\Delta^2 W\right)\right]\Big|_{\partial\Omega} = \left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} u - \right.$$
$$- \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \frac{\partial^2}{\partial \overline{n}_{x,y} \partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta} -$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda W + f\right)\right]\Big|_{\partial\Omega} =$$
$$= -\left[\int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} A_L \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} A_L \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right]\Big|_{\partial\Omega} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda u + f\right)\Big|_{\partial\Omega} +$$
$$+ \left(\lambda \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega} =$$
$$= -\left(\int\limits_{\partial\Omega} \left(\Delta_{\xi,\eta} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial^2}{\partial \overline{n}_{x,y} \partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Big|_{\partial\Omega} -$$
$$- \left[\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right]\Big|_{\partial\Omega} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda u + f\right)\Big|_{\partial\Omega} +$$
$$+ \left(\lambda \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}.$$

Вспоминая соотношения (10), последнее соотношение запишем в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\Delta^2 W\right]\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} g\left(\xi,\eta\right)\Big|_{\partial\Omega} -$$
$$- \left[\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \left(A_L - \lambda I\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right]\Big|_{\partial\Omega} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda u + f\right)\Big|_{\partial\Omega} +$$
$$+ \left(\lambda \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\left(x,y,\xi,\eta\right) \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g\left(\xi,\eta\right) - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} v\left(x,y,\xi,\eta\right) g\left(\xi,\eta\right)\right) ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega}.$$

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}\, g\left(\xi,\eta\right)\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\lambda u+f\right)\Big|_{\partial\Omega}$, так как

$$\lambda u+f=\lambda\left(A_0-\lambda I\right)^{-1}f+f=A_0\left(A_0-\lambda I\right)^{-1}f.$$

С другой стороны, функции $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\in D\left(A_L\right)$ и поэтому удовлетворяют соответствующим краевым условиям

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\big|_{\partial\Omega}=\\ =\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}LA_L\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Big|_{\partial\Omega},\\ \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Big|_{\partial\Omega}=\\ =\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}LA_L\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Big|_{\partial\Omega}.\end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}\Big|_{\partial\Omega}=\\ =\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}L\left(\lambda\int\limits_{\partial\Omega}v\left(x,y,\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega},\\ \lambda\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}\left(A_L-\lambda I\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}\Big|_{\partial\Omega}=\\ =\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}L\left(\lambda\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}v\left(x,y,\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)ds_{\xi,\eta}\right)\Bigg|_{\partial\Omega},\end{gathered}$$

поскольку L — линейный оператор. Следовательно, выполняется одно из краевых условий (15)

$$\left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}W\left(x,y\right)-\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}}L\left(\Delta^2 W\right)\right]\Bigg|_{\partial\Omega}=0.$$

Теорема 6 полностью доказана.

Выделим конечномерные возмущения задачи (14)–(15) для неоднородного бигармонического уравнения. Для этого применим вышеуказанный метод к проколотому кругу $\Omega_0=\Omega\backslash\left\{M_0\right\}$, где M_0 — некоторая внутренняя точка круга Ω. Возьмем произвольную функцию $h\left(x,y\right)$ из пространства $W_2^4\left(\Omega_0\right)$ и введем функцию по формуле

$$I\left(x,y\right)=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\Omega_\delta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\Delta^2_{\xi,\eta}h\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta,$$

где $\Omega_\delta=\Omega\backslash\Pi_\delta\left(M_0\right)$; $\Pi_\delta\left(M_0\right)=\left\{\left(\xi,\eta\right):x_0-\delta\le\xi\le x_0+\delta,y_0-\delta\le\eta\le y_0+\delta\right\}$ $\left(x_0,y_0\right)$ — координаты точки M_0.

Преобразуем функцию $I\left(x,y\right)$ аналогично формулам (2)–(7) в результате имеем

$$\begin{gathered}I\left(x,y\right)=h\left(x,y\right)-\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-\right.\\ \left.-h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right]ds_{\xi,\eta}- \qquad (20)\\ -\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta\left(M_0\right)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG\left(x,y,\xi,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)+\right.\\ \left.+\left(\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)\right]ds_{\xi,\eta}\end{gathered}$$

при $(x,y)\neq M_0$. Предполагаем также, что относительно $h(\xi,\eta)$ в окрестности точки (x_0,y_0) выполнены условия:

$$\sup_{0<\delta<\delta_0}\sup_{y_0-\delta<\eta<y_0+\delta}\left\{\delta\left(\left|\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}\right|+\left|\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right|+|h(x_0+\delta,\eta)|+\right.\right.$$
$$+|h(x_0-\delta,\eta)|+\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right|+ \tag{21}$$
$$\left.\left.+\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right|+|\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)|+|\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)|\right)\right\}\leq C,$$

$$\sup_{0<\delta<\delta_0}\sup_{x_0-\delta<\xi<x_0+\delta}\left\{\delta\left(\left|\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right|+\left|\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right|+|h(\xi,y_0-\delta)|+\right.\right.$$
$$+|h(\xi,y_0+\delta)|+\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right|+ \tag{22}$$
$$\left.\left.+\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right|+|\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)|+|\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)|\right)\right\}\leq C$$

и существуют пределы

$$\alpha=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi\right\},$$
$$\beta=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta,$$
$$\gamma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi,$$
$$\theta=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\},$$
$$\sigma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h(x_0-\delta,\eta)-h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta,$$
$$\varsigma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h(\xi,y_0+\delta)-h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi.$$

Тогда выпишем предел:

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta}=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0+\delta,\eta)-G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\,d\eta+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0,y_0)-G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\,d\eta+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0+\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}d\eta+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}d\eta-$$

$$-G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta-$$
$$-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{G(x,y,\xi,y_0-\delta)-G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\,d\xi+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0,y_0)-G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\,d\xi+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0-\delta)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}d\xi+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}d\xi-$$
$$-G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi-$$
$$-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(x,y,x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\,d\eta+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\frac{\partial G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\,d\eta+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0+\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot h(x_0+\delta,\eta)\,d\eta+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0-\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot h(x_0-\delta,\eta)\,d\eta-$$
$$-\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta-$$
$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h(x_0+\delta,\eta)-h(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}-\frac{\partial G(x,y,\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\,d\xi+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\frac{\partial G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\,d\xi+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0-\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot h(\xi,y_0-\delta)\,d\xi+$$
$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0+\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot h(\xi,y_0+\delta)\,d\xi-$$
$$-\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi-$$
$$-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h(\xi,y_0-\delta)-h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi.$$

Поскольку по предположению для функции $h(\xi,\eta)$ существует $\delta_0>0$ и $C>0$ такие, что выполняются соотношения (21), (22), то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left(G\left(x,y,\xi,\eta\right)\tfrac{\partial h(\xi,\eta)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}-\tfrac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\right)ds_{\xi,\eta}=$$
$$=\alpha G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\beta\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+$$
$$+\theta\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\sigma\tfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\varsigma\tfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right),$$

где числа $\alpha,\beta,\gamma,\theta,\sigma,\varsigma$ были определены выше.

Здесь учтено, что функция $G\left(x,y,\xi,\eta\right)$ при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$ является достаточно гладкой функцией. Таким образом, из соотношения (20) получаем

$$I\left(x,y\right)=h\left(x,y\right)-\int\limits_{\partial\Omega}\left[\tfrac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-\right.$$
$$\left.-h\left(\xi,\eta\right)\tfrac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right]ds_{\xi,\eta}-$$
$$-\alpha G\left(x,y,x_0,y_0\right)-\beta\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\gamma\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}-$$
$$-\theta\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)-\sigma\tfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)-\varsigma\tfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right).$$

Отсюда

$$h\left(x,y\right)-I\left(x,y\right)=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\tfrac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-\right.$$
$$\left.-h\left(\xi,\eta\right)\tfrac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right]ds_{\xi,\eta}+$$

$$+\alpha G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\beta\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+$$
$$+\theta\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\sigma\tfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\varsigma\tfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right).$$

Поэтому аналог формулы (13) примет вид

$$W\left(x,y\right)=\int\int\limits_{\Omega}G\left(x,y,\xi,\eta\right)f\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\tfrac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}h\left(\xi,\eta\right)\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)-\right.$$

$$\left.-h\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial\overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,\xi,\eta\right)\right]ds_{\xi,\eta}+ \tag{23}$$

$$+\alpha G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\beta\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\tfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+$$
$$+\theta\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\sigma\tfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right)+\varsigma\tfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G\left(x,y,x_0,y_0\right).$$

Для того, чтобы решение $W\left(x,y\right)$, задаваемое формулой (23), принадлежало пространству $L_2\left(\Omega_0\right)$, необходимо положить $\beta=\gamma=\sigma=\varsigma=0$, то есть функция $h\left(x,y\right)$ должна быть непрерывной в точке M_0. Формула (23) дает решение неоднородного бигармонического уравнения в проколотой области Ω_0, которое отличается от решения задачи (14), (15) конечным числом слагаемых. Следовательно, правая часть соотношения (23) представляет решение конечномерного возмущения задачи (14), (15) для оператора Лапласа.

Теорема 7. *Краевая задача для неоднородного бигармонического уравнения в проколотой области* Ω_0.

$$\Delta^2W=f,\Omega_0,$$
$$W\left(x,y\right)|_{\partial\Omega}=h\left(x,y\right)|_{\partial\Omega}$$
$$\left.\tfrac{\partial W(x,y)}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega}=\left.\tfrac{\partial h(x,y)}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega},$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi\right\}=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi\right\},$$

$$\begin{gathered}\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W(x_0-\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}W(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta=\\=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta;\\\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0+\delta)-\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi=\\=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi;\end{gathered}\qquad(24)$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial W(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial W(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial W(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\}=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[W(x_0-\delta,\eta)-W(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h(x_0-\delta,\eta)-h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta;$$
$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[W(\xi,y_0+\delta)-W(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h(\xi,y_0+\delta)-h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi.$$

При любой правой части f имеет единственное решение, и оно задается по формуле (23).

Отметим, что решение краевой задачи из теоремы 7 ищется в классе функций, которые удовлетворяют условиям (21), (22), и существуют пределы (24). Доказательство теоремы 7 приводится точно так же, как доказывалась теорема 3.

Теперь покажем, как, используя теорему 7, можно получить новые граничные корректно разрешимые задачи для бигармонического уравнения в проколотом круге. Для этого достаточно, чтобы функция $h(x,y)$ непрерывным образом зависела от $f(x,y)$, то есть пусть существует непрерывный оператор L, отображающий $f(x,y)$ в $h(x,y)$. Напомним, $h(x,y)$ — гладкая функция в проколотой области Ω_0. Итак, пусть $h=L\left(\Delta^2 W\right)$.
Тогда задача (24) примет вид

$$\Delta^2 W(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega_0;\qquad(25)$$

$$\left.W(x,y)\right|_{\partial\Omega}=\left.L\left(\Delta^2 W\right)\right|_{\partial\Omega};$$
$$\left.\frac{\partial W}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial L\left(\Delta^2 W\right)}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0+\delta,\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0-\delta\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi\right\}=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0+\delta,\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0-\delta\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi\right\},$$
$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta,$$
$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0+\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0+\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi, \tag{26}$$
$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial W(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial W(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial W(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\}=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\right.$$
$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\},$$
$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[W\left(x_0-\delta,\eta\right)-W\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0-\delta,\eta\right)-L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta,$$
$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[W\left(\xi,y_0+\delta\right)-W\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi=$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0+\delta\right)-L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi.$$

Условия (26), накладываемые на функцию $W\left(x,y\right)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (25) при любой правой части $f\left(x,y\right)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (25)–(26) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми"условиями вида (26). Слово "краевые"пишем в кавычках из-за того, что в общем случае, эти условия не являются граничными.

Итак, справедлива

Теорема 8. *Для любого непрерывного оператора L, отображающего пространство $\{f\}$ в множество гладких функции $\{h\}$ в проколотой области Ω_0, задача (25)–(26) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях f.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 9. *Если уравнение (25) при всех допустимых правых частях f с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор L, отображающий пространство $\{f\}$ в множество гладких функции $\{h\}$ в проколотой области Ω_0, такой, что дополнительные условия примут вид (26).*

Доказательства теорем 8 и 9 приводятся точно так же, как доказывались теоремы 4, 5. В дальнейшем нам удобно вместо $L(f)$ писать $(Lf)(x,y)$ и считать L линейным оператором. Оператор, соответствующий задаче (25)–(26) обозначим через A_L. Тогда A_0 соответствует задаче Дирихле из теоремы 1. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора A_L.

Теорема 10. *Если L — линейный непрерывный оператор из теоремы 8 и 9, то резольвента оператора A_L имеет вид*

$$\begin{gathered}
(A_L-\lambda I)^{-1} f(x,y) = (A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y) + \\
+\int\limits_{\partial\Omega}\Big[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} L(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) A_L (A_L-\lambda I)^{-1}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) - \\
-L(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) A_L (A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big] ds_{\xi,\eta} + \\
+\alpha A_L (A_L-\lambda I)^{-1} G(x,y,x_0,y_0) + \beta A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi} + \\
+\gamma A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta} + \theta A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0) + \\
+\sigma A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0) + \varsigma A_L(A_L-\lambda I)^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0),
\end{gathered}$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha = \lim_{\delta\to+0}\Bigg\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0+\delta,\eta) - \frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0-\delta,\eta)\Big] d\eta + \\
&+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\Big[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0-\delta) - \frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0+\delta)\Big] d\xi\Bigg\}; \\
&\beta = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\Big[\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0-\delta,\eta) - \Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0+\delta,\eta)\Big] d\eta; \\
&\gamma = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\Big[\Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0+\delta) - \Delta_{\xi,\eta} LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0-\delta)\Big] d\xi; \\
&\theta = \lim_{\delta\to+0}\Bigg\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\Big[\frac{\partial LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\Big] d\eta + \\
&+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\Big[\frac{\partial LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta} - \frac{\partial LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\Big] d\xi\Bigg\}; \\
&\sigma = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\Big[LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0-\delta,\eta) - LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x_0+\delta,\eta)\Big] d\eta; \\
&\varsigma = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\Big[LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0+\delta) - LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,y_0-\delta)\Big] d\xi.
\end{aligned}$$

Замечание 1. *Если $h(x,y)$ и $\frac{\partial h(x,y)}{\partial \overline{n}}$ на $\partial\Omega$ равно нулю, то теоремы 8, 9 дают одномерное возмущение однородной задачи Дирихле для недородного бигармонического уравнения.*

Замечание 2. *Теоремы 8, 9 сформулированы для области Ω_0 с одной проколотой точкой M_0. Нетрудно сформулировать аналог теорем 8, 9, 10 для областей с конечным числом проколотых точек.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. *Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем.* Новосибирск.: Изд-во СО РАН. 1996. 189 с.
2. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом* // Докл. РАН. 137:5. 1961. С. 1011–1014.
3. Садовничий В.А., Любишкин В.А. *Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов* // Функц. анализ и его приложения. 1986. Т. 20. № 3. С. 55–65.

Гульназ Еженхановна Берикханова,
Семипалатинский государственный педагогический институт,
ул.Танирбергена, 1,
071400, г. Семей, Казахстан
E-mail: gulnazzhen@mail.ru

Балтабек Есматович Кангужин,
Семипалатинский государственный педагогический институт,
ул. Танирбергена, 1,
071400, г. Семей, Казахстан
E-mail: kanbalta@mail.ru