ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 4 (2019). С. 3-13.

УДК 517.444

ТЕОРЕМА ОБ ОДНОМ РАДИУСЕ НА СФЕРЕ С ВЫКОЛОТОЙ ТОЧКОЙ

Н.П. ВОЛЧКОВА, ВИТ. В. ВОЛЧКОВ

Аннотация. Рассматриваются локальные аспекты периодичности в среднем на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Согласно классическим свойствам периодических функций всякая непрерывная на единичной окружности $\mathbb{S}^1$ функция, имеющая нулевые интегралы по любому интервалу фиксированной длины $2r$ на $\mathbb{S}^1$, является тождественным нулем тогда и только тогда, когда число r/π иррационально. Кроме того, не существует ненулевой непрерывной функции на $\mathbb{R}$, имеющей нулевые интегралы по всем отрезкам фиксированной длины и их границам. Целью статьи является исследование подобных явлений на сфере в $\mathbb{R}^3$ с выколотой точкой. Изучаются гладкие функции на $\mathbb{S}^2 \setminus (0,0,-1)$, имеющие нулевые интегралы по всем допустимым «сферическим шапочкам» и окружностям одного фиксированного радиуса. Для таких функций установлена новая теорема об одном радиусе, влекущая инъективность соответствующего интегрального преобразования (Теорема 2.1). Получено также усиление известной теоремы Унгара о сферических средних, дающей необходимые и достаточные условия принадлежности «сферической шапочки» классу множеств Помпейю на $\mathbb{S}^2$ (Теорема 4.1). Доказательства основных результатов основаны на описании множества решений $f \in C^\infty(\mathbb{S}^2 \setminus (0,0,-1))$ уравнения свертки $(f * \sigma_r)(\xi) = 0$, $\xi \in B_{\pi-r}$, где $B_{\pi-r}$ – открытый геодезический шар радиуса $\pi - r$ с центром в точке $(0,0,1)$ на $\mathbb{S}^2$, σ_r – дельта-функция, сосредоточенная на ∂B_r. Ключевым инструментом для описания f являются ряды Фурье по сферическим гармоникам на $\mathbb{S}^1$. Показано, что коэффициенты Фурье $f_k(\theta)$ функции f представимы рядами по функциям Лежандра $P_\nu^{-|k|}(\cos\theta)$, связанными с нулями ν функции $P_\nu(\cos r)$. Теоремы 2.1 и 4.1 являются следствием указанного представления функции f и соответствующих свойств функций Лежандра. Результаты, полученные в работе, можно использовать при решении задач, связанных с шаровыми и сферическими средними.

Ключевые слова: сферические средние, преобразование Помпейю, функции Лежандра, уравнения свертки.

Mathematics Subject Classification: 53C65; 44A35

1. Введение

Пусть r – фиксированное положительное число. Очевидным свойством ненулевых $2r$-периодических функций на вещественной оси является отсутствие у них антипериода, равного $2r$. Другими словами, если функция f на $\mathbb{R}$ удовлетворяет соотношениям

$$f(x+r) - f(x-r) = 0, \quad f(x+r) + f(x-r) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

то $f \equiv 0$. В терминах интегральных средних это означает, что любая непрерывная функция на $\mathbb{R}$, имеющая нулевые интегралы по всем отрезкам $K_r = [x-r, x+r]$ и их границам $\partial K_r = \{x \pm r\}$, является тождественным нулем. (Как обычно, интеграл по ∂K_r понимается как сумма значений функции в точках множества ∂K_r.)

N.P. Volchkova, Vit.V. Volchkov, A one-radius theorem on a sphere with pricked point.

Поступила 3 декабря 2018 г.

Указанный факт допускает нетривиальные обобщения для различных многомерных пространств (см. [1]–[5]). В частности, если функция $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, имеет нулевые интегралы по всем шарам и сферам фиксированного радиуса, то $f \equiv 0$ (см. [2]). Утверждения такого типа называются теоремами об одном радиусе.

В данной работе изучаются функции на проколотой двумерной сфере, имеющие нулевые интегралы по всем допустимым «сферическим шапочкам» и окружностям одного фиксированного радиуса. Для таких функций установлена новая теорема об одном радиусе, уточняющая один из результатов в работе [6]. Отметим также, что промежуточным результатом работы является усиление известной теоремы П. Унгара о сферических средних [7] (см. теорему 4.1 в § 4).

2. Формулировка основного результата

Пусть $\mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 – декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^2$,

$$\mathbb{S}' = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : \xi_3 \neq -1\}.$$

Расстояние $d(\xi, \eta)$ между точками $\xi, \eta \in \mathbb{S}^2$ вычисляется по формуле

$$d(\xi, \eta) = \arccos(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3).$$

В частности,

$$d(\xi, o) = \arccos \xi_3, \quad \text{где} \quad o = (0, 0, 1).$$

Множество

$$B_r(\eta) = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : d(\xi, \eta) < r\}, \quad 0 < r < \pi,$$

называется открытым геодезическим шаром («сферической шапочкой») на $\mathbb{S}^2$ радиуса r с центром в точке η. Его граница

$$\partial B_r(\eta) = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : d(\xi, \eta) = r\}$$

является геодезической окружностью радиуса r на $\mathbb{S}^2$ с центром в точке η. Аналогично, множество

$$\overline{B_r(\eta)} = B_r(\eta) \cup \partial B_r(\eta)$$

называется замкнутым геодезическим шаром на $\mathbb{S}^2$ радиуса r с центром в точке η.

Обозначим через $d\xi$ и $dl(\xi)$ элемент площади и элемент длины на $\mathbb{S}^2$ соответственно.

Основным результатом данной работы является следующий сферический аналог теоремы об одном радиусе.

Теорема 2.1. *Пусть r – фиксированное число из интервала $(0; \pi)$, $f \in C^\infty(\mathbb{S}')$ и выполнены следующие условия:*

1) *функция f имеет нулевые интегралы относительно меры $d\xi$ по любому замкнутому геодезическому шару радиуса r на $\mathbb{S}^2$, лежащему в $\mathbb{S}'$;*
2) *функция f имеет нулевые интегралы относительно меры $dl(\xi)$ по любой геодезической окружности радиуса r на $\mathbb{S}^2$, лежащей в $\mathbb{S}'$.*

Тогда $f \equiv 0$.

Этот результат интересно сравнить с теоремой об одном радиусе, полученной в работе [6]. Теорема 2 из [6] показывает, что если $0 < r \leqslant \pi/2$, $f \in C(\mathbb{S}')$ и

$$\int_B f(\xi) d\xi = \int_{\partial B} f(\xi) dl(\xi) = 0 \tag{2.1}$$

для любого замкнутого геодезического шара B радиуса r, лежащего в $\mathbb{S}'$, то $f \equiv 0$. Кроме того, при $\pi/2 < r < \pi$ существуют ненулевые функции f, удовлетворяющие соотношениям (2.1). Если же f гладкая на $\mathbb{S}'$ и удовлетворяет при некотором $r \in (0; \pi)$ условиям 1), 2) в теореме 2.1, то $f \equiv 0$.

Относительно других теорем об одном радиусе см. [2]–[5] и имеющуюся там библиографию.

3. Основные обозначения

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ – множества натуральных, целых, целых неотрицательных и комплексных чисел соответственно. Обозначим через P_ν^μ $(\mu,\nu\in\mathbb{C})$ функции Лежандра первого рода на $(-1,1)$, т.е.

$$P_\nu^\mu(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-x}{2}\right),\qquad \mu\notin\mathbb{N},$$

$$P_\nu^\mu(x)=(-1)^\mu(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^\mu P_\nu(x),\qquad \mu\in\mathbb{N},$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса, Γ – гамма-функция и $P_\nu = P_\nu^0$ (см. [8, гл. 3, п. 3.4, формула (6) и п. 3.6.1, формула (6)]). Для них справедливо интегральное представление Мелера-Дирихле

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\sin\theta)^\mu}{\Gamma\left(\frac12-\mu\right)}\times$$

$$\times\int_0^\theta(\cos t-\cos\theta)^{-\mu-\frac12}\cos\left(\left(\nu+\frac12\right)t\right)dt,\quad \theta\in(0;\pi),\ \mathrm{Re}\mu<\frac12. \tag{3.1}$$

Функции Лежандра второго рода на $(-1,1)$ определяются равенством

$$\frac{(1-x^2)^{\mu/2}Q_\nu^\mu(x)}{2^\mu\pi^{3/2}}=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right)\frac{xF\left(\frac{1-\nu-\mu}{2},\frac{\nu-\mu}{2}+1;\frac32;x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)}-$$

$$-\frac12\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right)\frac{F\left(-\frac{\nu+\mu}{2},\frac{1+\nu-\mu}{2};\frac12;x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)},\quad -\nu-\mu\notin\mathbb{N},$$

$$Q_\nu=Q_\nu^0,\quad -\nu\notin\mathbb{N}.$$

Они связаны с P_ν^μ следующим образом:

$$P_\nu^\mu(-x)=P_\nu^\mu(x)\cos\big(\pi(\nu+\mu)\big)-\frac{2}{\pi}Q_\nu^\mu(x)\sin\big(\pi(\nu+\mu)\big) \tag{3.2}$$

(см. [8, гл. 3, п. 3.4, формулы (14), (15), (20), (21)]). Кроме того,

$$(1-x^2)\left(P_\nu^\mu(x)\frac{d}{dx}Q_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)\frac{d}{dx}P_\nu^\mu(x)\right)=$$

$$=2^{2\mu}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \tag{3.3}$$

(см. [8, гл. 3, п. 3.4, формула (25)]).

Всюду в дальнейшем считаем, что r – фиксированное число, лежащее на интервале $(0;\pi)$. Из (3.1) следует, что функция

$$h(\nu)=P_\nu(\cos r)=P_\nu^0(\cos r)$$

является целой функцией переменной ν экспоненциального типа r. Она имеет бесконечно много нулей, все ее нули являются вещественными, простыми, расположены симметрично относительно точки $-\frac12$ и лежат вне отрезка $[-1;0]$ (см. [3, часть 2, гл. 3]). Для множества нулей этой функции из промежутка $(0;+\infty)$ будет использоваться символ $N(r)$, т.е.

$$N(r)=\{\nu>0: P_\nu(\cos r)=0\}.$$

Положим также
$$\mathcal{Z}(r)=\{l\in\mathbb{N}:P_l(\cos r)=0\}.$$
Отметим, что
$$\mathcal{Z}(\pi/2)=N(\pi/2)=\{2k+1,k\in\mathbb{Z}_+\}.$$
Кроме того, множество $\{r\in(0,\pi):\mathcal{Z}(r)\neq\varnothing\}$ является счетным и всюду плотным на интервале $(0,\pi)$ (см. [9]).

Введем сферические координаты φ, θ на $\mathbb{S}^2$ следующим образом:
$$\xi_1=\sin\theta\sin\varphi,\ \xi_2=\sin\theta\cos\varphi,\ \xi_3=\cos\theta,\quad \varphi\in(0,2\pi),\ \theta\in(0,\pi)$$
(как и выше, $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ – декартовы координаты точки $\xi\in\mathbb{S}^2$). Положим
$$p_{\nu,k}(\theta)=P_\nu^{-k}(\cos\theta), \tag{3.4}$$
$$S_{\nu,k}(\xi)=p_{\nu,|k|}(\theta)e^{ik\varphi},\quad \nu\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{Z}.$$
Функция $S_{\nu,k}$ является вещественно-аналитической на $\mathbb{S}'$. При этом
$$L(S_{\nu,k})=-\nu(\nu+1)S_{\nu,k}, \tag{3.5}$$
где L – оператор Лапласа на $\mathbb{S}^2$, т.е.
$$L=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+ctg\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$
(см. доказательство леммы 4.1 ниже).

Всякой функции $f\in C(\mathbb{S}')$ поставим в соответствие ряд Фурье
$$f\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}}f^k, \tag{3.6}$$
компоненты которого определяются равенствами
$$f^k(\xi)=f_k(\theta)e^{ik\varphi},\quad f_k(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sin\theta\sin\alpha,\sin\theta\cos\alpha,\cos\theta)e^{-ik\alpha}d\alpha.$$
Если $f\in C^\infty(\mathbb{S}')$, то ряд (3.6) сходится к f в стандартной топологии пространства $C^\infty(\mathbb{S}')$ (см. [4, гл. 11, п. 11.1]). Из (3.6) следует формула
$$f^k(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau_\alpha\xi)e^{ik\alpha}d\alpha, \tag{3.7}$$
где τ_α – вращение $\mathbb{R}^3$ в плоскости (x_1,x_2) на угол α, т.е.
$$\tau_\alpha\xi=(\xi_1\cos\alpha-\xi_2\sin\alpha,\xi_1\sin\alpha+\xi_2\cos\alpha,\xi_3).$$

Пусть $O(3)$ – ортогональная группа в $\mathbb{R}^3$,
$$B_r=B_r(o)=\{\xi\in\mathbb{S}^2:\xi_3>\cos r\}=\{(\varphi,\theta):0\leqslant\theta<r\},$$
$$S_r=S_r(o)=\{\xi\in\mathbb{S}^2:\xi_3=\cos r\}=\{(\varphi,\theta):\theta=r\}.$$
Положим
$$U_r(\mathbb{S}')=\Big\{f\in C(\mathbb{S}'):\int_{S_r}f(\tau\xi)dl(\xi)=0\quad\forall\tau\in O(3):\tau\overline{B}_r\subset\mathbb{S}'\Big\}.$$
Класс $U_r(\mathbb{S}')$ можно рассматривать как множество функций $f\in C(\mathbb{S}')$, удовлетворяющих уравнению свертки $f*\sigma_r=0$ в шаре $B_{\pi-r}$, где σ_r – дельта-функция, сосредоточенная на S_r.

4. Вспомогательные утверждения

Обозначим через D_k дифференциальный оператор, определенный на пространстве $C^1(0,\pi)$ следующим образом:

$$(D_k u)(\theta) = (\sin\theta)^k \frac{d}{d\theta}\left(\frac{u(\theta)}{(\sin\theta)^k}\right), \qquad u \in C^1(0,\pi).$$

Пусть также Id – тождественный оператор.

Лемма 4.1. *Имеют место равенства*

$$D_k\, p_{\nu,k} = (k-\nu)(k+\nu+1)p_{\nu,k+1}, \qquad D_{-k}\, p_{\nu,k} = p_{\nu,k-1}, \tag{4.1}$$

$$(L+\nu(\nu+1)Id)(p_{\nu,k}(\theta)e^{ik\varphi}) = 0. \tag{4.2}$$

Доказательство. Используя формулу

$$(1-x^2)\frac{dP_\nu^\mu(x)}{dx} = -\nu x P_\nu^\mu(x) + (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(x)$$

(см. [8, гл. 3, п. 3.8, формула (19)]), находим

$$p'_{\nu,k}(\theta) = \nu\, ctg\,\theta\, p_{\nu,k}(\theta) + \frac{(k-\nu)}{\sin\theta}p_{\nu-1,k}(\theta).$$

Отсюда

$$D_k\, p_{\nu,k}(\theta) = \frac{(k-\nu)}{\sin\theta}(p_{\nu-1,k}(\theta) - \cos\theta\, p_{\nu,k}(\theta)), \tag{4.3}$$

$$D_{-k}\, p_{\nu,k}(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}((\nu+k)\cos\theta\, p_{\nu,k}(\theta) - (\nu-k)p_{\nu-1,k}(\theta)). \tag{4.4}$$

Поскольку

$$P_{\nu-1}^\mu(x) - xP_\nu^\mu(x) = (\nu-\mu+1)\sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu-1}(x),$$

$$(\nu-\mu)xP_\nu^\mu(x) - (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(x) = \sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu+1}(x)$$

(см. [8, гл. 3, п. 3.8, формулы (15), (17)]), из (4.3) и (4.4) получаем (4.1).

Далее, оператор L действует на функцию u вида $u(\xi) = v(\theta)e^{ik\varphi}$ по правилу

$$(Lu)(\xi) = (\ell_k v)(\theta)e^{ik\varphi}, \tag{4.5}$$

где

$$\ell_k = \frac{d^2}{d\theta^2} + ctg\,\theta\frac{d}{d\theta} - \frac{k^2}{\sin^2\theta}Id.$$

Оператор ℓ_k можно представить в виде

$$\ell_k = D_{-k-1}D_k - k(k+1)Id = D_{k-1}D_{-k} - k(k-1)Id. \tag{4.6}$$

Теперь соотношение (4.2) следует из (4.6) и (4.1). □

Лемма 4.2. (i) *Пусть $\varepsilon, \theta \in (0,\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при $\nu \to \infty$ так, что $|\arg\nu| < \pi-\varepsilon$, справедливо асимптотическое равенство*

$$p_{\nu,k}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\frac{\cos((\nu+\frac12)\theta - \frac{\pi}{4}(2k+1))}{(\nu+\frac12)^{k+\frac12}} + O\left(\frac{e^{\theta|\mathrm{Im}\,\nu|}}{|\nu|^{k+\frac32}}\right), \tag{4.7}$$

причем (4.7) выполнено равномерно по θ на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (0,\pi)$.

(ii) *Если $\nu \in \mathbb{C}$, $\theta \in (0,\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то*

$$|p_{\nu,k}(\theta)| \leqslant \frac{1}{k!}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^k \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-k-1} e^{\theta|\mathrm{Im}\,\nu|}. \tag{4.8}$$

(iii) *Пусть* $0 < a < \pi$, $s, k \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\max_{\theta\in[0,a]}\left|\frac{d^s p_{\nu,k}(\theta)}{d\theta^s}\right| = O(\nu^{s-k}), \qquad \nu \to +\infty. \tag{4.9}$$

Доказательство. Учитывая (3.4), по формуле (3.1) имеем

$$p_{\nu,k}(\theta) = \frac{(\sin\theta)^{-k}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\int_{-\theta}^{\theta}(\cos t - \cos\theta)^{k-\frac{1}{2}}e^{i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}dt. \tag{4.10}$$

Из (4.10) и асимптотического разложения интегралов Фурье (см. [10, гл. 2, доказательство теоремы 10.2]) получаем (4.7).

Для доказательства (4.8) снова используем (4.10). Тогда

$$|p_{\nu,k}(\theta)| \leqslant \frac{(\sin\theta)^{-k}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\int_{-\theta}^{\theta}(\cos t - \cos\theta)^{k-\frac{1}{2}}dt\, e^{\theta|\mathrm{Im}\,\nu|}.$$

Интеграл в правой части оценивается следующим образом:

$$\int_0^{\theta}(\cos t - \cos\theta)^{k-\frac{1}{2}}dt = \int_{\cos\theta}^{1}(x-\cos\theta)^{k-\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}}\int_{\cos\theta}^{1}(x-\cos\theta)^{k-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}2^{k-\frac{1}{2}}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k!}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2k}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1},$$

что дает оценку (4.8).

Наконец, докажем (4.9). Оценка (4.9) при $a < \pi/2$ следует из интегрального представления

$$p_{\nu,-k}(\theta)e^{ik\varphi} = i^k\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{2\pi\Gamma(\nu+1)}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos(\psi-\varphi))^{\nu}e^{ik\psi}d\psi, \quad \theta\in(0,\pi/2)$$

и равенства

$$p_{\nu,-k}(\theta) = (-1)^k\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}p_{\nu,k}(\theta)$$

(см. [8, гл. 3, п. 3.7, формулы (25), (26), п. 3.3.1, формула (7), а также п. 3.4, формула (5)]). С другой стороны, асимптотическое разложение (4.7) и второе соотношение в (4.1) показывают, что

$$\max_{0<\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta<\pi}\left|\frac{d^s p_{\nu,k}(\theta)}{d\theta^s}\right| = O(\nu^{s-k-1/2}), \qquad \nu \to +\infty.$$

Используя эти два случая, получаем утверждение (iii). □

Лемма 4.3. (i) *Имеет место равенство*

$$\mathcal{Z}(r) = \mathcal{Z}(\pi - r).$$

(ii) *Если* $p_{\nu,0}(r) = 0$, *то* $p_{\nu,1}(r) \neq 0$.
(iii) *Если* $p_{\nu,0}(r) = 0$, *то* $Q_\nu(\cos r) \neq 0$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из определения множества $\mathcal{Z}(r)$ и соотношения

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

(см. [8, гл. 3, п. 3.4, формула (19)]).

Далее, предположим, что $p_{\nu,0}(r) = p_{\nu,1}(r) = 0$ при некотором $\nu \in \mathbb{C}$. Тогда

$$p_{\nu,0}(r) = p'_{\nu,0}(r) = 0$$

и

$$\frac{d^2}{d\theta^2} p_{\nu,0}(\theta) + ctg\,\theta \frac{d}{d\theta} p_{\nu,0}(\theta) + \nu(\nu+1) p_{\nu,0}(\theta) = 0$$

(см. (4.1), (4.2) и (4.5)). Отсюда в силу единственности решения задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка получаем $p_{\nu,0} \equiv 0$, что противоречит определению P_ν.

Наконец, формула

$$(1 - x^2)\left(P_\nu(x) \frac{d}{dx} Q_\nu(x) - Q_\nu(x) \frac{d}{dx} P_\nu(x)\right) = 1$$

(см. (3.3)) показывает, что равенства $P_\nu(\cos r) = 0$ и $Q_\nu(\cos r) = 0$ не могут выполняться одновременно. Таким образом, лемма 4.3 доказана. □

Лемма 4.4. *Пусть*

$$\delta(\mu, \nu) = \int_0^r p_{\nu,0}(\theta) p_{\mu,0}(\theta) \sin\theta d\theta, \qquad \mu, \nu \in N(r).$$

Тогда $\delta(\mu,\nu) = 0$ *при* $\mu \neq \nu$ *и*

$$\delta(\nu, \nu) > \frac{c}{\nu^2}, \tag{4.11}$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* ν.

Доказательство. При $\mu \neq \nu$ утверждение следует из равенства

$$(\mu - \nu)(\mu + \nu + 1) \int_0^r p_{\nu,0}(\theta) p_{\mu,0}(\theta) \sin\theta d\theta =$$
$$= \sin r (p_{\mu,0}(r) p'_{\nu,0}(r) - p_{\nu,0}(r) p'_{\mu,0}(r))$$

(см. [8, гл. 3, п. 3.12, формула (3)]). Далее, неравенство (4.11) достаточно доказать при всех достаточно больших $\nu \in N(r)$. Пусть $\nu > \frac{\pi}{4r} - \frac{1}{2}$. Положим

$$g(\theta, t) = (\cos t - \cos\theta)^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{4.12}$$

Тогда из (3.1) имеем

$$\delta(\nu, \nu) = \int_0^r (p_{\nu,0}(\theta))^2 \sin\theta d\theta =$$
$$= \frac{2}{\pi^2} \int_0^r \sin\theta \left(\int_0^\theta g(\theta, t) \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t dt\right)^2 d\theta \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{4(\nu+1/2)}} \sin\theta \left(\int_0^\theta g(\theta, t) \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t dt\right)^2 d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4(\nu+1/2)}} \sin\theta \left(\int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta} g(\theta,t)dt\right)^2 d\theta. \tag{4.13}$$

Внутренний интеграл в (4.13) оценивается следующим образом:

$$\int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta} g(\theta,t)dt = \int_{\cos\theta}^{\cos\frac{\theta}{2}} (x-\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sin\theta}\int_{\cos\theta}^{\cos\frac{\theta}{2}} (x-\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}{\sin\theta}. \tag{4.14}$$

Учитывая, что

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\frac{3\theta}{4}}{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}} \geqslant \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{4} \geqslant \frac{3\theta}{4\pi}$$

при $0<\theta<\frac{\pi}{4(\nu+1/2)}$, из (4.13) и (4.14) получаем

$$\delta(\nu,\nu) \geqslant \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4(\nu+1/2)}} \frac{3\theta}{4\pi}d\theta,$$

откуда следует (4.11). □

Лемма 4.5. *Пусть $r\in(0,\pi)$, $\nu\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда для любого $\tau\in O(3)$, такого что $\tau\overline{B}_r\subset B_\pi$, имеют место равенства*

$$\int_{S_r} S_{\nu,k}(\tau\xi)dl(\xi) = 2\pi\sin r\, p_{\nu,0}(r)S_{\nu,k}(\tau o), \tag{4.15}$$

$$\int_{B_r} S_{\nu,k}(\tau\xi)d\xi = 2\pi\sin r\, p_{\nu,1}(r)S_{\nu,k}(\tau o). \tag{4.16}$$

Доказательство. По формуле Пиззетти имеем (см. [11, формула (20)] и (3.5))

$$\int_{S_r} S_{\nu,k}(\tau\xi)dl(\xi) = 2\pi\sin r\times$$

$$\times\left(S_{\nu,k}(\tau o)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L(L+2)...(L+(m-1)m)S_{\nu,k}(\tau o)}{(m!)^2}\left(\sin\frac{r}{2}\right)^{2m}\right) =$$

$$= 2\pi\sin r\, S_{\nu,k}(\tau o)\Bigg(1+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-\nu(\nu+1))(2-\nu(\nu+1))...(m(m-1)-\nu(\nu+1))}{(m!)^2}\left(\sin\frac{r}{2}\right)^{2m}\Bigg) =$$

$$= 2\pi\sin r\, S_{\nu,k}(\tau o)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m-\nu)\Gamma(m+\nu+1)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)(m!)^2}\left(\sin\frac{r}{2}\right)^{2m} =$$

$$= 2\pi\sin r\, S_{\nu,k}(\tau o)F\left(-\nu,\nu+1;1;\left(\sin\frac{r}{2}\right)^2\right).$$

Теперь равенство (4.15) следует из (3.4) и определения функций Лежандра. Далее, используя (4.15) и (4.1), получаем

$$\int_{B_r} S_{\nu,k}(\tau\xi)d\xi = \int_0^r \int_{S_\rho} S_{\nu,k}(\tau\xi)dl(\xi)d\rho =$$
$$= 2\pi\, S_{\nu,k}(\tau o)\int_0^r \sin\rho\; p_{\nu,0}(\rho)d\rho =$$
$$= 2\pi S_{\nu,k}(\tau o)\int_0^r \sin\rho\; (D_{-1}p_{\nu,1})(\rho)d\rho =$$
$$= 2\pi S_{\nu,k}(\tau o)\int_0^r \frac{d}{d\rho}\left(p_{\nu,1}(\rho)\sin\rho\right)d\rho =$$
$$= 2\pi \sin r\, p_{\nu,1}(r) S_{\nu,k}(\tau o).$$

Это завершает доказательство леммы 4.5. □

Лемма 4.6. *Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{S}')$. Тогда для того чтобы $f \in U_r(\mathbb{S}')$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $k \in \mathbb{Z}$ имело место разложение*

$$f^k(\xi) = \sum_{\nu \in N(r)} \alpha_{\nu,k} S_{\nu,k}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}',$$

где $\alpha_{\nu,k} \in \mathbb{C}$ и

$$\alpha_{\nu,k} = O(\nu^{-a}) \quad \text{при} \quad \nu \to +\infty \quad \text{для любого} \quad a > 0. \tag{4.17}$$

Утверждение леммы 4.6 является частным случаем результата, установленного ранее Вит. В. Волчковым [4, теорема 16.6(ii)].

В соответствии с теоремой П. Унгара о сферических средних [7], если функция $f \in C(\mathbb{S}^2)$ имеет нулевые интегралы по всем геодезическим окружностям радиуса r и $P_l(\cos r) \neq 0$ для любого $l \in \mathbb{N}$, то $f \equiv 0$.

Следующий результат является уточнением указанного факта.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{S}')$. Тогда для того чтобы функция f имела нулевые интегралы по всем геодезическим окружностям радиуса r на $\mathbb{S}^2$, лежащим в $\mathbb{S}'$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $k \in \mathbb{Z}$ имело место разложение*

$$f^k(\xi) = \sum_{\nu \in \mathcal{Z}(r)} \alpha_{\nu,k} S_{\nu,k}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}', \tag{4.18}$$

где коэффициенты $\alpha_{\nu,k}$ удовлетворяют условию (4.17).

Доказательство. Сначала предположим, что интегралы от f по всем геодезическим окружностям радиуса r на $\mathbb{S}^2$, лежащим в $\mathbb{S}'$, равны нулю. По лемме 4.6 имеем

$$f^k(\xi) = \sum_{\nu \in N(r)} \alpha_{\nu,k} S_{\nu,k}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}', \tag{4.19}$$

где коэффициенты $\alpha_{\nu,k}$ удовлетворяют условию (4.17). В силу формулы (3.7) интегралы от f^k по всем геодезическим окружностям радиуса r на $\mathbb{S}^2$, лежащим в $\mathbb{S}'$, также равны нулю. В частности, поскольку $S_{\pi-r} = S_r\big((0,0,-1)\big)$, то

$$\int_{S_{\pi-r}} f^k(a_t\xi)dl(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad |t| < r,$$

где

$$a_t\xi = (\xi_1, \xi_2\cos t + \xi_3 \sin t, -\xi_2 \sin t + \xi_3\cos t).$$

Записывая это соотношение для правой части в (4.19) и используя леммы 4.2, 4.5, находим

$$\sum_{\nu\in N(r)} \alpha_{\nu,k} P_\nu(-\cos r) p_{\nu,|k|}(t) = 0, \quad |t| < r. \tag{4.20}$$

Применяя к обеим частям (4.20) дифференциальный оператор $D_{-1}\dots D_{-|k|+1}D_{-|k|}$ (см. (4.9) и (4.1)), получаем

$$\sum_{\nu\in N(r)} \alpha_{\nu,k} P_\nu(-\cos r) p_{\nu,0}(t) = 0, \quad |t| < r.$$

Отсюда на основании (4.9) и леммы 4.4 делаем вывод, что

$$\alpha_{\nu,k} P_\nu(-\cos r) = 0, \quad \nu\in N(r). \tag{4.21}$$

Учитывая формулу (3.2), равенство (4.21) можно переписать в виде

$$\alpha_{\nu,k}\sin(\pi\nu) Q_\nu(\cos r) = 0, \quad \nu\in N(r).$$

Тогда (см. лемму 4.3(iii))

$$\alpha_{\nu,k}\sin(\pi\nu) = 0, \quad \nu\in N(r),$$

и, значит, $\alpha_{\nu,k} = 0$ при $\nu\in N(r)$, $\nu\notin\mathbb{N}$. Ввиду (4.19) это доказывает необходимость в теореме 4.1.

Докажем достаточность. Пусть при любом $k\in\mathbb{Z}$ имеет место разложение (4.18). Тогда из (4.15) и леммы 4.3(i) заключаем, что каждый коэффициент Фурье f^k имеет нулевые интегралы по всем геодезическим окружностям радиуса r на $\mathbb{S}^2$, лежащим в $\mathbb{S}'$. Следовательно, функция f обладает тем же свойством, что и требовалось.

$\square$

5. Доказательство теоремы 2.1

Пусть функция $f\in C^\infty(\mathbb{S}')$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда из первого условия теоремы 2.1 и теоремы 4.1 следует, что для любого $k\in\mathbb{Z}$ имеет место представление (4.18), для коэффициентов которого справедлива оценка (4.17). Далее, в силу второго условия теоремы 2.1 из формулы (3.7) получаем

$$\int_{B_r} f^k(a_t\xi)d\xi = 0 \quad \text{при} \quad |t| < \pi - r. \tag{5.1}$$

Используя (5.1), (4.18), (4.16) и лемму 4.2, находим

$$\sum_{\nu\in\mathcal{Z}(r)} \alpha_{\nu,k}\, p_{\nu,1}(r)\, p_{\nu,|k|}(t) = 0, \quad |t| < \pi - r.$$

Отсюда (см. доказательство теоремы 4.1)

$$\sum_{\nu\in\mathcal{Z}(r)} \alpha_{\nu,k}\, p_{\nu,1}(r)\, p_{\nu,0}(t) = 0, \quad |t| < \pi - r,$$

что равносильно равенству

$$\sum_{\nu\in\mathcal{Z}(\pi-r)} \alpha_{\nu,k}\, p_{\nu,1}(r)\, p_{\nu,0}(t) = 0, \quad |t| < \pi - r$$

(см. лемму 4.3(i)). Теперь лемма 4.4 показывает, что

$$\alpha_{\nu,k}\, p_{\nu,1}(r) = 0, \quad \nu\in\mathcal{Z}(r).$$

Но по лемме 4.3(ii) равенства $p_{\nu,0}(r) = 0$ и $p_{\nu,1}(r) = 0$ не могут выполняться одновременно. Поэтому $\alpha_{\nu,k} = 0$ при $\nu\in\mathcal{Z}(r)$. Это означает, что все $f^k = 0$, откуда $f = 0$. Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C.A. Berenstein, R. Gay *A local version of the two-circles theorem* // Israel J. Math. **55**. 1986. P. 267–288.
2. Волчков В.В. *Решение проблемы носителя для некоторых классов функций* // Матем. сб. **188**:9. 1997. С. 13–30.
3. V.V. Volchkov *Integral geometry and convolution equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003).
4. V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*. Springer-Verlag, London (2009).
5. V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov *Offbeat integral geometry on symmetric spaces*. Birkhäuser, Basel (2013).
6. Волчков Вит. В. *Об инъективности локального преобразования Помпейю на сфере* // Матем. заметки. **81**:1. 2007. С. 59–69.
7. P. Ungar *Freak theorem about functions on a sphere* // J. London Math. Soc. **29**:2. 1954. P. 100–103.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. М.: Наука. (1973).
9. E. Badertscher *The Pompeiu problem on locally symmetric spaces* // J. Analyse Math. **57**. 1991. P. 250–281.
10. Риекстыньш Э.Я. *Асимптотические разложения интегралов*. Рига: Зинатне. (1974).
11. C.A. Berenstein, L. Zalcman *Pompeiu's problem on spaces of constant curvature* // J. D'Analyse Math. **30**. 1976. P. 113–130.

Наталья Петровна Волчкова,
Донецкий национальный технический университет,
ул. Артёма, 58,
83000, г. Донецк, Украина
E-mail: volna936@gmail.com

Виталий Владимирович Волчков,
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
83001, г. Донецк, Украина
E-mail: volna936@gmail.com